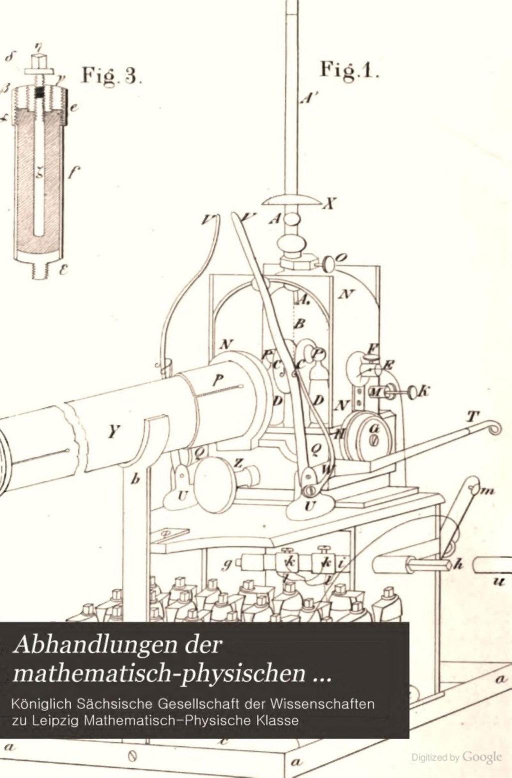



Abhandlungen der mathematisch-physischen ...

Königlich Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig Mathematisch-Physische Klasse

# ABHANDLUNGEN

FÜNFTER BAND.

# INHALT.

M. W. DROBISCH,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN,

# NACHTRÄGE ZUR THEORIE DER MUSIKALISCHEN TONVERHÄLTNISSE.

---

Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1855.

# ABHANDLUNGEN

DER

# KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

---

**ERSTER BAND:** Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Erster Band. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. broch. Preis 4 Thlr. 16 Ngr.

Inhalt:

A. F. MÖBIUS, über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. (Einzeln 24 Ngr.)

P. A. HANSEN, allgemeine Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1 - 2\alpha H + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von $\alpha$. (Einzeln 12 Ngr.)

A. SEEBECK, über die Querschwingungen elastischer Stäbe. (Einzeln 10 Ngr.)

C. F. NAUMANN, über die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. (Einzeln 10 Ngr.)

W. WEBER, elektrodynam. Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). (Einzeln 1 Thlr.)

F. REICH, neue Versuche mit der Drehwaage. (Einzeln 20 Ngr.)

M. W. DROBISCH, Zusätze zum florentiner Problem. (Einzeln 16 Ngr.)

W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus.) (Einzeln 20 Ngr.)

**ZWEITER BAND:** Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Erster Band. Mit einer Karte. hoch 4. 1850. broch. Preis 6 Thlr.

Inhalt:

A. WESTERMANN, Untersuchungen über die in die attischen Redner eingelegten Urkunden. 2 Abhandlungen. (Einzeln 1 Thlr.)

F. A. UKERT, über Dämonen, Heroen und Genien. (Einzeln 24 Ngr.)

TH. MOMMSEN, über das römische Münzwesen. (Einzeln 1 Thlr. 20 Ngr.)

E. v. WIETERSHEIM, der Feldzug des Germanicus an der Weser. (Einzeln 1 Thlr.)

G. HARTENSTEIN, Darstellung der Rechtsphilosophie des Hugo Grotius. (Einzeln 20 Ngr.)

TH. MOMMSEN, über den Chronographen vom Jahre 354. Mit einem Anhange über die Quellen der Chronik des Hieronymus. (Einzeln 1 Thlr. 10 Ngr.)

**DRITTER BAND:** Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Zweiter Band.

Hiervon ist bis jetzt erschienen:

W. ROSCHER, zur Geschichte der Englischen Volkswirthschaftslehre im sechzehnten und siebzehnten Jahrhundert. 1851. 1 Thlr.

——— Nachträge. 1852. 8 Ngr.

J. G. DROYSEN, Eberhard Windeck. 1853. 24 Ngr.

TH. MOMMSEN, Polemii Silvii laterculus. 1853. 16 Ngr.

——— Volusii Maeciani distributio partium. 1853. 6 Ngr.

J. G. DROYSEN, zwei Verzeichnisse, Kaiser Karls V. Lande, seine und seiner Grossen Einkünfte und anderes betreffend. 1854. 20 Ngr.

TH. MOMMSEN, die Stadtrechte der latinischen Gemeinden Salpensa und Malaca in der Provinz Baetica. 1855. 1 Thlr.

# NACHTRÄGE ZUR THEORIE

DER

# MUSIKALISCHEN TONVERHÄLTNISSE

VON

M. W. DROBISCH.

Eine vor Kurzem erschienene kleine Schrift »Zur Theorie der Musik« von Dr. J. N. **Möhring** in Lüneburg, welche sich eng an meine Abhandlung »über musikalische Tonbestimmung und Temperatur« anschliesst, sie gründlich prüft und ihr mehrere werthvolle Bemerkungen beifügt, hat mich zu den nachfolgenden Untersuchungen veranlasst, durch welche jene frühere Arbeit, so wie die im 90sten Bande von Poggendorff's Annalen der Physik gegebene Darstellung der musikalischen Temperaturlehre, einige Ergänzungen erhält, auf mehrere Punkte derselben ein neues Licht fällt, und, wie ich hoffe, die mathematische Bestimmung der Grundlagen der Musik ihrem Abschluss noch näher gebracht werden wird.

1.

Es ist von Nutzen, daran zu erinnern, dass unsre heutige diatonische Tonleiter verhältnissmässig neuen Ursprungs ist, und dass bis in die Mitte des sechszehnten Jahrhunderts die von ihr an drei Stellen abweichende Tonleiter der Griechen, oder, näher bestimmt, der Pythagoreer in Geltung war. Es werden in derselben der (ganze) Ton $\frac{9}{8}$ und der Halbton $\frac{256}{243}$ unterschieden, und es wechseln diese beiden Tonstufen in derselben Zahl und Ordnung wie der ganze und halbe Ton unsrer jetzigen Clavierscala. Die pythagorische Tonleiter hat daher, wenn man die jetzt üblichen Benennungen der Töne anwendet, folgende, den Akustikern wohlbekannte Form:

| *C* | *D* | *E* | *F* | *G* | *A* | *H* | *c* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{81}{64}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{27}{16}$ | $\frac{243}{128}$ | 2 |

mit den Tonstufen

$$\frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{256}{243} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{256}{243}.$$

Bezeichnet man die relative Schwingungszahl der reinen Quinte allgemein durch $Q$, so findet man leicht, dass die vorstehende Scala unter folgendem Schema enthalten ist:

$$1 \quad \frac{Q^2}{2} \quad \frac{Q^4}{4} \quad \frac{2}{Q} \quad Q \quad \frac{Q^3}{2} \quad \frac{Q^5}{4} \quad 2,$$

und dass die ganze und die halbe Tonstufe den Werthen von $\frac{Q^2}{2}$ und $\frac{8}{Q^5}$ entsprechen. Hieraus ersieht man nun sogleich, dass die Töne der pythagorischen Scala durch Fortschreiten und Rückschreiten nach reinen Quinten vom Grundton $C$ aus gewonnen werden können. Es erhalten nämlich alsdann

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| die Töne: | $\underline{F}$ | $C$ | $G$ | $d$ | $a$ | $\bar{e}$ | $\bar{h}$ |
| die Werthe: | $\frac{1}{Q}$ | 1 | $Q$ | $Q^2$ | $Q^3$ | $Q^4$ | $Q^5$, |

die man nur auf den Umfang der ersten Octave von $C$ zu reduciren braucht, um auf die obigen Bestimmungen von $D$, $E$, $F$ etc. zu kommen. Durch Fortsetzung der Tonreihe aufwärts gelangt man successiv von $\bar{h}$ zu $\bar{f}^{\#}$, $\bar{c}^{\#}$, $\bar{g}^{\#}$ etc. und abwärts von $\underline{F}$ zu $H^b$, $\underline{\underline{E}}^b$, $\underline{\underline{A}}^b$ etc., und so erhält man für die erhöhten und erniedrigten Haupttöne folgende Werthe ihrer relativen Schwingungszahlen:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C^{\#}$ | $D^{\#}$ | $E^{\#}$ | $F^{\#}$ | $G^{\#}$ | $A^{\#}$ | $H^{\#}$ |
| $\frac{Q^7}{2^4}$ | $\frac{Q^9}{2^5}$ | $\frac{Q^{11}}{2^6}$ | $\frac{Q^6}{2^3}$ | $\frac{Q^8}{2^4}$ | $\frac{Q^{10}}{2^5}$ | $\frac{Q^{12}}{2^6}$ |
| $D^b$ | $E^b$ | $F^b$ | $G^b$ | $A^b$ | $H^b$ | $c^b$ |
| $\frac{2^3}{Q^5}$ | $\frac{2^2}{Q^3}$ | $\frac{2^5}{Q^8}$ | $\frac{2^4}{Q^6}$ | $\frac{2^3}{Q^4}$ | $\frac{2^2}{Q^2}$ | $\frac{2^5}{Q^7}$ |

*) Man vergl. z. B. den Artikel »Ton« im älteren physikalischen Wörterbuch von Gehler S. 383. D. Möhring leitet diese Scala durch Umkehrung der von Böckh in seinem »Philolaos« angegebenen Tonfolge ab, bemerkt aber hierüber in einer brieflichen Mittheilung noch Folgendes: »Bei der Ableitung der alten griechischen Scala habe ich nur die eine Autorität von Böckh's Philolaos anführen können, weil mir seine *Metra Pindarica* nicht zu Gebote standen, wo ich gewiss noch andre Nachweisungen gefunden haben würde. Erst jetzt habe ich aus einer andern Schrift, die wohl auch als Autorität gelten kann, »die Tonleitern und Musiknoten der Griechen« von Dr. Fr. Bellermann, Berlin 1847, mich eines Bessern belehrt. Sind nämlich die von Dr. Bellermann S. 8 gegebenen Tonleitern des lydischen und hypodorischen Tongeschlechts fest begründet (worüber mir bis jetzt noch kein Urtheil zusteht), so stimmen sie genau mit der Dur- und Mollscala des reinen Quintensystems überein, und die von mir vorgenommene

Man kann eben so, wenn man will, durch weitere Fortsetzung dieses Verfahrens die doppelt und mehrfach erhöhten und erniedrigten Haupttöne bestimmen.

Vergleicht man nun *C, D, E* etc. resp. mit *C*#, *D*#, *E*# etc., so findet sich, dass die Quotienten aus den relativen Schwingungszahlen der Haupttöne in die ihrer resp. Erhöhungen constant, nämlich $= \frac{Q^7}{2^4}$ sind. Zugleich ist dies auch der Werth der Quotienten aus *C*♭, *D*♭, *E*♭ u. s. w. in *C, D, E* u. s. w. Daher ist hier die Erhöhung jedes Tons eben so gross als seine Erniedrigung, und beide sind für alle Töne gleich. Dieser Werth $\frac{Q^7}{2^4} = \frac{3^7}{2^{11}} = \frac{2187}{2048} = 1{,}06790$ ist die Apotome der Pythagoreer. Sie ist nur wenig grösser als die kleine Secunde $\frac{16}{15} = 1{,}06667$, indess der pythagorische halbe Ton $\frac{256}{243} = 1{,}05350$ kleiner als diese ist und der übermässigen Prime $\frac{25}{24} = 1{,}04167$ nahe, dem kleinen Limma $\frac{135}{128} = 1{,}05469$ aber am nächsten kommt. In Theilen des Octavenintervalls ausgedrückt ist die Apotome $= 0{,}08123$, in Theilen des grossen ganzen Tons $= \frac{1}{2{,}09}$; der Intervallwerth von $\frac{16}{15}$ dagegen ist in Theilen des Octavenintervalls $= 0{,}09311$, der Intervallwerth von $\frac{256}{243}$ gleich $0{,}01519$, $= \frac{1}{2{,}26}$ g. T., der von $\frac{25}{24}$ gleich $0{,}05889$, der des kleinen Limma $= 0{,}07682$. Die Intervallwerthe, welche in diesem System den 21 Tönen zukommen, stellt folgende Uebersicht dar:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *C* | 0 | *C*# | 0,09474 | *D*♭ | 0,07518 |
| *D* | 0,16992 | *D*# | 0,26466 | *E*♭ | 0,24511 |
| *E* | 0,33985 | *E*# | 0,43459 | *F*♭ | 0,32030 |
| *F* | 0,41504 | *F*# | 0,50978 | *G*♭ | 0,49032 |
| *G* | 0,58496 | *G*# | 0,67970 | *A*♭ | 0,66015 |
| *A* | 0,75489 | *A*# | 0,84963 | *H*♭ | 0,83007 |
| *H* | 0,92481 | *H*# | 1,01955 | *c*♭ | 0,90526 |

Nach dieser Ableitung erweist sich nun das pythagorische Tonsystem als reines Quintensystem, d. h. als ein solches, in dem die Werthe aller Töne ausser der Octave von dem der reinen Quinte $Q = \frac{3}{2}$ abhängen. Es ist bemerkenswerth, dass in diesem System die erhöhten

Umkehrung der griechischen Scala würde dann nur bei dem dorischen Tongeschlecht (welches allerdings das rein griechische giebt) nöthig sein, um sie in Uebereinstimmung mit der Durscala des reinen Quintensystems zu bringen.«

Töne $C^\sharp$, $D^\sharp$ u. s. f. der Reihe nach höher liegen als die ihnen nächsten erniedrigten $D^b$, $E^b$ u. s. w. Denn es ist

$$\frac{C^\sharp}{D^b} = \frac{D^\sharp}{E^b} \text{ etc.} = \frac{Q^{12}}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288},$$

was $> 1$ und zwar das pythagorische Komma ist, dessen Intervallwerth $= 0{,}01955$ oder nahe $= \frac{1}{8,7}$ des grossen ganzen Tons. Um soviel stehen also hier die erhöhten Töne höher als die ihnen nächsten erniedrigten.

Zugleich entspringt aber auch aus diesem System die gleichschwebende Temperatur im weitesten Sinne. Denn giebt man zuerst $Q$ einen solchen Werth, dass die relative Schwingungszahl des pythagorischen Komma's $= 1$, sein Intervall also $= 0$ wird, was geschieht, wenn man $Q = 2^{\frac{7}{12}}$, also $\frac{2,99662}{2}$ statt $\frac{3}{2}$ setzt, so wird $C^\sharp = D^b$, $D^\sharp = E^b$ u. s. f., und man erhält das System der gewöhnlichen oder mittleren gleichschwebenden Temperatur mit seinen 12 Tönen. Setzt man $Q < 2^{\frac{7}{12}}$, so wird der Werth des pythagorischen Komma's $\frac{Q^{12}}{2^7} < 1$, und man erhält gleichschwebende Temperaturen, in denen die erhöhten Töne tiefer liegen als die ihnen nächsten erhöhten. Setzt man endlich $Q > 2^{\frac{7}{12}}$, so erhält man gleichschwebende Temperaturen, in welchen, wie im reinen Quintensystem selbst, die erhöhten Töne höher liegen als die ihnen nächsten erniedrigten.

## 2.

Seitdem durch Zarlino im Jahr 1558*) statt der pythagorischen grossen Terz $\frac{81}{64}$ die reine $\frac{5}{4}$ eingeführt, die grosse Sexte, als Umkehrung der reinen kleinen Terz $\frac{6}{5}$, gleich $\frac{5}{3}$ gesetzt, und die grosse Septime als reine grosse Terz der Quinte betrachtet, daher $= \frac{15}{8}$ bestimmt wurde, erhielt die diatonische Tonleiter ihre jetzige Gestalt, in welcher die relativen Schwingungszahlen der Haupttöne folgende sind:

| $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $A$ | $H$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{15}{8}$ | $2$ |

Setzt man die rel. Schwingungszahl der grossen Terz allgemein $= T$, die der Quinte, wie zuvor, $= Q$, so wird das Schema dieser Scala

*) Kiesewetter, Geschichte unsrer heutigen Musik S. 112.

$$1 \quad \frac{Q^2}{2} \quad T \quad \frac{2}{Q} \quad Q \quad \frac{2T}{Q} \quad QT \quad 2,$$

mit den Stufen

$$\frac{Q^2}{2} \quad \frac{2T}{Q^2} \quad \frac{2}{QT} \quad \frac{Q^2}{2} \quad \frac{2T}{Q^2} \quad \frac{Q^2}{2} \quad \frac{2}{QT},$$

so dass hier drei Tonstufen, nämlich der grosse ganze Ton $\frac{Q^2}{2} = \frac{9}{8}$, der kleine ganze Ton $\frac{2T}{Q^2} = \frac{10}{9}$ und der halbe Ton $\frac{2}{QT} = \frac{16}{15}$ unterschieden werden. Wie man aus dieser Scala die erhöhten und erniedrigten Töne bestimmen kann, indem man der Reihe nach jeden Ton derselben zum Grundton macht und nach dem Schema der Scala für jeden solchen Grundton die Töne aufsucht, die seine Scala bilden, dann auch die gefundenen erhöhten und erniedrigten Töne wieder zu Grundtönen macht und ihre Scalentöne bestimmt, ist in den früheren beiden Abhandlungen ausführlich entwickelt worden. Es zeigte sich aber dabei, dass sich für die erhöhten und erniedrigten Töne nicht Werthe angeben lassen, die allen Tonarten zugleich völlig Genüge leisten, sondern verschiedene Tonarten verschiedene Werthe jener Nebentöne, ja zum Theil sogar der Haupttöne selbst, fordern, wenn ihre Scala rein sein, d. h. dem Schema der *C*-dur-Scala genau entsprechen soll. D. Möhring giebt mir hierbei, ohne im Uebrigen die Richtigkeit dieses Resultats in Zweifel zu stellen, Schuld, dass ich in der Beztimmung der kleinen Secunde $D^b$, der übermässigen Secunde $D^\#$ und der kleinen Septime $H^b$ durch die Verhältnisszahlen $\frac{16}{15}$, $\frac{125}{108}$, $\frac{16}{9}$ von den Angaben der physikalischen Lehrbücher abgewichen sei, und dass ich das jetzt übliche Intervall der kleinen Secunde $\frac{27}{25}$ das grosse Limma genannt habe. Diese Ausstellung ist jedoch unbegründet; denn ich habe meine Benennungen jener Verhältnisszahlen nicht nach eigner Willkür gewählt, sondern bin dabei Autoritäten wie Euler, Marburg, Chladni u. A. gefolgt, und die in Art. 29 meiner ersten Abhandlung so wie in Poggendorff's Annalen (B. 90. S. 360) aufgestellte Tafel ist, mit einziger Veränderung der grossen Secunde (für die ich mit Chladni u. v. A. den ältern Werth $\frac{9}{8}$ beibehalten habe), dieselbe, welche Muncke im neuen physikalischen Wörterbuch (Bd. 8. S. 340) als die »gewöhnliche« aufführt.*) Indess muss ich doch Herrn M. in so fern

---

*) Muncke setzt die grosse Secunde $= \frac{10}{9}$, giebt ihr aber fälschlich den Decimalwerth 1,125, der zu $\frac{9}{8}$ gehört. Es muss derselbe entweder 1,11111 heissen, oder die gr. Secunde $= \frac{9}{8}$ gesetzt werden.

eine Berechtigung zu seiner Bemerkung zugestehen, als er sich auf ein Tonsystem berufen konnte, auf welches mich auch schon Fechner aufmerksam gemacht hat,*) und das ich, da es, wie ich im Folgenden (Art. 4) nachweisen werde, in Frankreich allgemein angenommen ist, das französische nennen will, wogegen das eben angeführte das deutsche heissen mag. Nach diesem System erhält man die Verhältnissquotienten der erhöhten Töne aus denen der Haupttöne durch Multiplication mit $\frac{25}{24}$, die der erniedrigten Töne durch Division mit $\frac{25}{24}$. Ebenso kann man aus den hierdurch gefundenen Werthen der Töne mit Kreuzen und Been die der Töne mit Doppelkreuzen und Doppelbeen u. s. w. bestimmen. Der Grund dieses Verfahrens scheint folgender. In dem pythagorischen oder reinen Quintensystem ist die Apotome, durch welche die rel. Schwingungszahlen der Haupttöne multiplicirt die erhöhten, dividirt die erniedrigten Töne geben, gleich dem Quotienten aus der relativen Schwingungszahl von $E^b$ in die von $E$. Behält man diese Bestimmung bei und beachtet, dass in dem modernen Tonsystem $E$ den Werth $\frac{5}{4} = T$, $E^b$ den Werth $\frac{6}{5} = \frac{Q}{T}$ hat, so ist der Werth der Apotome $= \frac{T^2}{Q} = \frac{25}{24}$ und demnach das Verfahren, die Erhöhungen und Erniedrigungen zu bestimmen, dem im Quintensystem eingeführten ganz analog. Hiernach haben nun im französischen System die 21 Töne (mit Ausschluss der Octave, die immer $= 2$) folgende relative Schwingungszahlen.

| | | |
|---|---|---|
| $C = 1$ | $C^\sharp = \frac{T^2}{Q} = \frac{25}{24}$ | $D^b = \frac{Q^3}{2T^2} = \frac{27}{25}$ |
| $D = \frac{Q^2}{2} = \frac{9}{8}$ | $D^\sharp = \frac{QT^2}{2} = \frac{75}{64}$ | $E^b = \frac{Q}{T} = \frac{6}{5}$ |
| $E = T = \frac{5}{4}$ | $E^\sharp = \frac{T^3}{Q} = \frac{125}{96}$ | $F^b = \frac{2}{T^2} = \frac{32}{25}$ |
| $F = \frac{2}{Q} = \frac{4}{3}$ | $F^\sharp = \frac{2T^2}{Q^2} = \frac{25}{18}$ | $G^b = \frac{Q^2}{T^2} = \frac{36}{25}$ |
| $G = \frac{2T}{Q} = \frac{3}{2}$ | $G^\sharp = T^2 = \frac{25}{16}$ | $A^b = \frac{2}{T} = \frac{8}{5}$ |
| $A = \frac{2T}{Q} = \frac{5}{3}$ | $A^\sharp = \frac{2T^3}{Q^2} = \frac{125}{72}$ | $H^b = \frac{Q^2}{T} = \frac{9}{5}$ |
| $H = QT = \frac{15}{8}$ | $H^\sharp = T^3 = \frac{125}{64}$ | $c^b = \frac{2Q}{T^2} = \frac{48}{25}$ |

Die Grössen der Intervalle dieser Töne sind folgende:

*) Centralblatt für Naturwissenschaft und Anthropologie 1854. Nr. 16. S. 299, mit Hinweisung auf Biot's Physik II. S. 35 d. 3. Aufl. v. Fechner's Uebersetzung. Hieraus mag dieses System wol auch in deutsche Lehrbücher der Physik übergegangen sein, in denen es allerdings, namentlich in neuerer Zeit, häufig gefunden wird.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C$ | 0 | $C^\sharp$ | 0,05889 | $D^b$ | 0,11103 |
| $D$ | 0,16992 | $D^\sharp$ | 0,22882 | $E^b$ | 0,26303 |
| $E$ | 0,32193 | $E^\sharp$ | 0,38082 | $F^b$ | 0,35614 |
| $F$ | 0,41504 | $F^\sharp$ | 0,47393 | $G^b$ | 0,52607 |
| $G$ | 0,58496 | $G^\sharp$ | 0,64386 | $A^b$ | 0,67807 |
| $A$ | 0,73697 | $A^\sharp$ | 0,79586 | $H^b$ | 0,84800 |
| $H$ | 0,90689 | $H^\sharp$ | 0,96578 | $c^b$ | 0,94111 |

Dieses System weicht nun von dem deutschen in der That an den drei von D. Möhring bezeichneten Stellen ab. In dem letztern nämlich ist

$$D^\sharp = \frac{2T^3}{Q^3} = \frac{125}{108}; \; D^b = \frac{2}{QT} = \frac{16}{15}; \; H^b = \frac{2^2}{Q^2} = \frac{16}{9}.$$

Die Töne $E^\sharp$ und $H^\sharp$ werden im deutschen System mit Stillschweigen übergangen. Wir werden diese Lücke im Folgenden (Art. 5) ergänzen. Zunächst aber kommt es darauf an, zu prüfen, was das französische System in Absicht auf die Reinheit der verschiedenen Tonarten leistet.

3.

Begnügen wir uns hierbei mit den vierundzwanzig gangbarsten Tonarten, so erhalten wir für die relativen Schwingungszahlen, welche die Intervalle zwischen den Tönen der Dur- und Mollscala und dem Grundton bestimmen, folgende Werthe:

I. Dur.

| Grundton | gr. Sec. | gr. Terz | Quarte | Quinte | gr. Sexte | gr. Septime |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C$ | $\frac{Q^2}{2}$ | $T$ | $\frac{2}{Q}$ | $Q$ | $\frac{2T}{Q}$ | $QT$ |
| $G$ | $\frac{2T}{Q^2}$ | $T$ | $\frac{2}{Q}$ | $Q$ | $\frac{2T}{Q}$ | $\frac{4T^2}{Q^3}$ |
| $D$ | $\frac{2T}{Q^2}$ | $\frac{4T^2}{Q^4}$ | $\frac{2}{Q}$ | $\frac{4T}{Q^3}$ | $\frac{2T}{Q}$ | $\frac{4T^2}{Q^3}$ |
| $A$ | $\frac{Q^2}{2}$ | $T$ | $\frac{Q^3}{2T}$ | $Q$ | $\frac{2T}{Q}$ | $QT$ |
| $E$ | $\frac{2T}{Q^2}$ | $T$ | $\frac{2}{Q}$ | $Q$ | $\frac{2T}{Q}$ | $QT$ |
| $H$ | $\frac{2T}{Q^2}$ | $T$ | $\frac{2}{Q}$ | $\frac{4T}{Q^3}$ | $\frac{2T}{Q}$ | $\frac{4T^2}{Q^3}$ |
| $F$ | $\frac{Q^2}{2}$ | $T$ | $\frac{Q^3}{2T}$ | $Q$ | $\frac{Q^3}{2}$ | $QT$ |
| $H^b$ | $\frac{2T}{Q^2}$ | $T$ | $\frac{2}{Q}$ | $\frac{4T}{Q^3}$ | $\frac{2T}{Q}$ | $\frac{4T^2}{Q^3}$ |
| $E^b$ | $\frac{2T}{Q^2}$ | $T$ | $\frac{2}{Q}$ | $Q$ | $\frac{2T}{Q}$ | $QT$ |
| $A^b$ | $\frac{Q^2}{2}$ | $T$ | $\frac{Q^3}{2T}$ | $Q$ | $\frac{2T}{Q}$ | $QT$ |
| $D^b$ | $\frac{2T}{Q^2}$ | $\frac{4T^2}{Q^4}$ | $\frac{2}{Q}$ | $\frac{4T}{Q^3}$ | $\frac{2T}{Q}$ | $\frac{4T^2}{Q^3}$ |
| $G^b$ | $\frac{2T}{Q^2}$ | $T$ | $\frac{2}{Q}$ | $Q$ | $\frac{2T}{Q}$ | $\frac{4T^2}{Q^3}$ |

## II. Moll.

| Grundton | gr. Sec. | kl. Terz | Quarte | Quinte | kl. Sexte | kl. Septime |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | $\frac{Q^2}{2}$ | $\frac{Q}{T}$ | $\frac{Q^3}{2T}$ | $Q$ | $\frac{2}{T}$ | $\frac{Q^2}{T}$ |
| *E* | $\frac{2T}{Q^2}$ | $\frac{Q}{T}$ | $\frac{2}{Q}$ | $Q$ | $\frac{2}{T}$ | $\frac{Q^2}{T}$ |
| *H* | $\frac{2T}{Q^2}$ | $\frac{Q}{T}$ | $\frac{2}{Q}$ | $\frac{4T}{Q^3}$ | $\frac{2}{T}$ | $\frac{4}{Q^2}$ |
| *F♯* | $\frac{Q^2}{2}$ | $\frac{Q}{T}$ | $\frac{Q^3}{2T}$ | $Q$ | $\frac{Q^4}{2T^2}$ | $\frac{Q^2}{T}$ |
| *C♯* | $\frac{Q^2}{2}$ | $\frac{Q}{T}$ | $\frac{2}{Q}$ | $Q$ | $\frac{2}{T}$ | $\frac{Q^2}{T}$ |
| *G♯* | $\frac{2T}{Q^2}$ | $\frac{Q}{T}$ | $\frac{2}{Q}$ | $Q$ | $\frac{2}{T}$ | $\frac{4}{Q^2}$ |
| *D* | $\frac{2T}{Q^2}$ | $\frac{4}{Q^3}$ | $\frac{2}{Q}$ | $\frac{4T}{Q^3}$ | $\frac{2}{T}$ | $\frac{4}{Q^2}$ |
| *G* | $\frac{2T}{Q^2}$ | $\frac{Q}{T}$ | $\frac{2}{Q}$ | $Q$ | $\frac{2}{T}$ | $\frac{4}{Q^2}$ |
| *C* | $\frac{Q^2}{2}$ | $\frac{Q}{T}$ | $\frac{2}{Q}$ | $Q$ | $\frac{2}{T}$ | $\frac{Q^2}{T}$ |
| *F* | $\frac{Q^2}{2}$ | $\frac{Q}{T}$ | $\frac{Q^3}{2T}$ | $Q$ | $\frac{Q^4}{2T^2}$ | $\frac{Q^2}{T}$ |
| *H♭* | $\frac{2T}{Q^2}$ | $\frac{Q}{T}$ | $\frac{2}{Q}$ | $\frac{4T}{Q^3}$ | $\frac{2}{T}$ | $\frac{4}{Q^2}$ |
| *E♭* | $\frac{2T}{Q^2}$ | $\frac{Q}{T}$ | $\frac{2}{Q}$ | $Q$ | $\frac{2}{T}$ | $\frac{Q^2}{T}$ |

Hieraus ergeben sich nun hinsichtlich der Reinheit der Tonarten folgende Resultate.

### I. Dur.

*C*, völlig rein;
*E*, *E♭*, gr. Secunde zu tief;
*A*, *A♭*, Quarte zu hoch;
*G*, *G♭*, gr. Secunde und gr. Septime zu tief;
*F*, Quarte und gr. Sexte zu hoch;
*H*, *H♭*, gr. Secunde, Quinte und gr. Septime zu tief;
*D*, *D♭*, gr. Secunde, gr. Terz, Quinte und gr. Septime zu tief.

### II. Moll.

*C*, *C♯*, völlig rein;
*E*, *E♭*, gr. Secunde zu tief;
*A*, Quarte zu hoch;
*G*, *G♯*, gr. Secunde und kl. Septime zu tief;
*F*, *F♯*, Quarte und kl. Sexte zu hoch;
*H*, *H♭*, gr. Secunde, Quinte und kl. Septime zu tief;
*D*, gr. Secunde, kl. Terz, Quinte und kl. Septime zu tief.

Man erkennt auch in diesen Abweichungen, die immer das syntonische Komma $\frac{Q^4}{4T} = \frac{81}{80}$ betragen, den regelmässigen Bau des Systems. Unter den 72 Intervallen jedes der beiden Tongeschlechter sind in Dur 8 gr. Secunden, 2 gr. Terzen, 3 Quarten, 4 Quinten, 1 gr. Sexte und 6 gr. Septimen, also zusammen 24 Intervalle unrein. In Moll sind 7 gr. Secunden, 1 kl. Terz, 3 Quarten, 3 Quinten, 2 kl. Sexten und 5 kl. Septimen, also zusammen 21 Intervalle unrein. Wollte man noch $F^{\sharp}$- und $C^{\sharp}$-Dur, $E^{\flat}$- und $A^{\flat}$-Moll in Betracht ziehen, so würde sich in Dur und Moll die Zahl der unreinen Intervalle gleich stellen, nämlich in beiden 26 unter 84 Intervallen betragen. Vergleicht man diese Resultate mit denen, welche das deutsche System giebt,*) so zeigt sich das französische im Vortheil. Denn jenes hat unter denselben 24 Tonarten nur 2 völlig reine, und in jedem der beiden Tongeschlechter unter 72 Intervallen 25 unreine, nämlich in Dur 7 gr. Secunden, 4 gr. Terzen, 3 Quarten, 4 Quinten, 2 gr. Sexten, 5 gr. Septimen; in Moll 7 gr. Secunden, 2 kl. Terzen, 3 Quarten, 4 Quinten, 3 kl. Sexten und 6 kl. Septimen. Nicht nur in der Gesammtzahl der reinen Intervalle, sondern auch insbesondre in den wichtigen Intervallen der Terzen verdient daher das französische System vor dem deutschen den Vorzug.

4.

Das französische Tonsystem steht jedoch wiederum im Ganzen an Reinheit dem Systeme nach, das ich im Anhang I. zu meiner ersten Abhandlung und bei Poggendorff (S. 364) angegeben habe. In diesem sind nämlich unter den 28 Tonarten 3 in Dur und 2 in Moll völlig rein, die Anzahl der unreinen Intervalle in Dur beträgt nur 15, nämlich 4 gr. Secunden, 2 gr. Terzen, 2 Quarten, 2 Quinten, 5 gr. Sexten; in Moll 21, nämlich 5 gr. Secunden, 5 kl. Terzen, 3 Quarten, 3 Quinten, 3 kl. Sexten und 2 Septimen. Nur in Moll kann in Frage kommen, ob die völlige Reinheit einer Tonart mehr nicht ein zu theurer Preis für 4 Tonarten mehr sei, in denen die charakteristische kleine Terze zu tief steht. Ich darf aber hierbei nicht mit Stillschweigen übergehen, dass dieses System, auf das ich selbständig gekommen bin, schon Delezenne aufgestellt hat,**) wie mir erst jetzt, bei wiederholtem Studium seiner Abhandlung,

*) Poggendorff's Annalen B. 90. S. 364.

**) *Recueil de travaux de la soc. d. sciences de Lille.* 1827, *p.* 51.

bemerklich geworden ist. Die Art und Weise, nach der es Delezenne ableitet, ist aber von der meinigen völlig verschieden und lässt den eigenthümlichen Bau desselben nicht durchschauen. Sein Verfahren ist folgendes. Nach dem Schema der *C*-durscala bestimmt er die Durscalen für die Grundtöne *G, D, A, E, H* und findet durch die erste $F^{\#}$, durch die zweite $C^{\#}$, die dritte $G^{\#}$, die vierte $D^{\#}$, die fünfte $A^{\#}$. Auf die gefundenen Werthe von $F^{\#}$ und $C^{\#}$ baut er ferner die Durscalen dieser Grundtöne wieder nach dem Schema von *C*-dur und erhält dadurch resp. $E^{\#}$ und $H^{\#}$. Weiter bestimmt er $H^{b}$ aus der Durscala für *F* und, da $E^{b} = \frac{6}{5}$ gegeben ist, aus der Durscala für $E^{b}$ den Werth von $A^{b}$; ebenso $D^{b}$ aus $A^{b}$-dur, $G^{b}$ aus $D^{b}$-dur, $\dot{c}^{b}$ aus $H^{b}$-dur und $F^{b}$ aus $E^{b}$-dur. Er bedient sich also durchgängig nur der diatonischen Durscala. Dass die hierdurch erhaltenen Werthe der Töne nicht in allen Tonarten reine Scalen geben, entgeht ihm nicht, aber er sieht sie als die Normalwerthe an und bestimmt in Kommaten die Abweichungen von denselben, die durch gewisse Tonarten, wenn sie rein sollen, gefordert werden. Wie sehr er dieses System als eine Verbesserung des in Frankreich bräuchlichen ansieht, geht aus folgenden Worten hervor (S. 38): *Ces détails élémentaires me donnent l'occasion de rectifier une erreur qui se trouve répétée dans tous les ouvrages d'acoustique que j'ai pu consulter. On y lit, en effet, que pour diéser une note, il faut la multiplier par* $\frac{25}{24}$, *et la diviser par* $\frac{25}{24}$, *pour la bémoliser. Cette règle est vraie lorsqu'on veut insérer soit un dièse soit un bémol entre ré et mi ou entre sol et la, dont l'intervalle est un ton mineur* $\frac{10}{9}$; *mais elle est fausse dans les autres cas. L'erreur est d'un comma sur une note portant un ou deux dièses ou bémols etc.*

5.

Das Verhältniss aller drei angeführten Systeme, des französischen, deutschen und Delezenne'schen zu einander, so wie zum reinen Quintensystem, lässt sich durch folgende Betrachtung ins Licht setzen. Bezeichnen wir die ersten, zweiten etc. obern Octaven von *C, D* etc. durch $\dot{C}$, $\dot{D}$ etc., $\ddot{C}$, $\ddot{D}$ etc., die untern durch $C_1$, $D_1$ etc., $C_2$, $D_2$ etc., so haben die nach der Quintenfolge geordneten Töne $F_1$, *C*, *G*, $\dot{D}$, $\dot{A}$, $\ddot{E}$, $\ddot{H}$, vermöge der modernen Tonleiter, folgende Werthe:

$$\frac{1}{Q},\ 1,\ Q,\ Q^2,\ \frac{4T}{Q},\ 4T,\ 4QT;$$

folglich sind die Quotienten aus jedem derselben in den nächstfolgenden der Reihe nach

$$Q,\ Q,\ Q,\ \frac{4T}{Q^3},\ Q,\ Q,$$

anstatt dass das pythagorische System lauter Quinten zeigt. Der Werth $\frac{4T}{Q^3} = \frac{40}{27}$ ist eine alterirte, nämlich um das syntonische Komma $\frac{81}{80}$ verminderte Quinte $\frac{40}{27}$, deren Intervall $= 0.56704$. Bestimmt man nun $\dddot{F}^{\#}$ aus $\ddot{H}$ durch Multiplication mit $\frac{4T}{Q^3}$, und daraus durch successive Multiplication mit derselben Folge von reinen und alterirten Quinten $Q, Q, Q, \frac{4T}{Q^3}$ etc. die Töne $\dot{C}^{\#}$, $\dot{G}^{\#}$, $\dot{D}^{\#}$, $\dot{A}^{\#}$, $\ddot{E}^{\#}$, $\ddot{H}^{\#}$, ebenso andrerseits zuerst $H_2^b$ aus $F_1$ durch Division mit $\frac{4T}{Q^3}$, und hieraus durch succesive Division mit derselben, aber in umgekehrter Ordnung zu nehmenden Reihe der reinen und alterirten Quinten die Töne $E_2^b$, $A_3^b$, $D_3^b$, $G_4^b$, $C_4^b$, $F_5^b$ und reducirt alle Töne, die ausserhalb des Umfangs der ersten Octave von $C$ liegen, auf diesen, so erhält man die Werthe, welche die französische Scala giebt. Stellen wir nach dieser Angabe alle Töne des Systems zusammen, so ergeben sich folgende Fortschreitungen:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
F_5^b & & C_4^b & & G_4^b & & D_3^b & & A_3^b & & E_2^b & & H_2^b & & F_1 \\
& Q & & Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & & Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & \\
F_1 & & C & & G & & \dot{D} & & \dot{A} & & \ddot{E} & & \ddot{H} & & \dddot{F}^{\#} \\
& Q & & Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & & Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & \\
\dddot{F}^{\#} & & \dot{C}^{\#} & & \dot{G}^{\#} & & \dot{D}^{\#} & & \dot{A}^{\#} & & \ddot{E}^{\#} & & \ddot{H}^{\#} & & \\
& Q & & Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & & Q & & Q & & &
\end{array}$$

Statt der 20 reinen Quinten, die im pythagorischen System zwischen $F_5^b$ und $\ddot{H}^{\#}$ liegen und 11,69925 Octaven umfassen, finden wir hier nur 15 reine Quinten $= 8{,}77444$ Octaven und 5 alterirte Quinten $= 2{,}83520$ Oct. Der Umfang des Systems beträgt also nur 11,60964 Octaven. Dividirt man diese Zahl durch 20, so erhält man den mittleren Werth des Quintenintervalls $= 0{,}58048$, was dem Werth $\frac{18}{31} = 0{,}58065$ dieses Intervalls in der gleichschwebenden Temperatur von 31 Stufen sehr nahe kommt. Es ist auch $\frac{\ddot{H}^{\#}}{F_5^b} = Q^{15}\left(\frac{4T}{Q^3}\right)^5 = 4^5T^5 = 5^5$, daher die rel. Schwingungszahl der mittleren Quinte die 20ste Wurzel hieraus, also $= \sqrt[4]{5}$.

In dem deutschen System ist für die Haupttöne der Wechsel der reinen und alterirten Quinten derselbe wie im französischen, für die

erhöhten und erniedrigten Töne aber befolgt er eine andre Ordnung. Es sind nämlich hier die Fortschreitungen folgende:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
F^{b}_{5} & & C^{b}_{4} & & G^{b}_{4} & & D^{b}_{3} & & A^{b}_{3} & & E^{b}_{2} & & H^{b}_{2} & & F_{1} \\
& Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & & Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & & Q & \\
F_{1} & & C & & G & & \overset{1}{D} & & \overset{1}{A} & & \overset{2}{E} & & \overset{2}{H} & & \overset{2}{F}\sharp \\
& Q & & Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & & Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & \\
\overset{3}{F}\sharp & & \overset{3}{C}\sharp & & \overset{4}{G}\sharp & & \overset{4}{D}\sharp & & \overset{5}{A}\sharp & & \overset{5}{E}\sharp & & \overset{6}{H}\sharp & & \\
& Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & & Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & & &
\end{array}
$$

Der Umfang dieses Systems enthält 14 reine Quinten = 8,18948 Octaven und 6 alterirte Quinten = 3,40224 Octaven, beträgt also 11,59172 Octaven, woraus die mittlere Quinte = 0,57959 folgt, welche der der gleichschwebenden Temperatur von 50 Stufen $\frac{29}{50} = 0,58000$ nahe kommt. Da hier $\frac{\overset{6}{H}\sharp}{F^{b}_{5}} = Q^{14}\left(\frac{4T}{Q^3}\right)^6 = \frac{4^6 T^6}{Q^4}, = \frac{2^4 . 5^6}{3^4}$, so ist die relative Schwingungszahl der mittleren Quinte, als die 20ste Wurzel aus diesem Werthe, $= \sqrt[10]{\frac{2^2 . 5^3}{3^2}} = \sqrt[10]{\frac{500}{9}}$. Aus obiger Quintenfolge ergiebt sich nun

$$
\begin{array}{ll|ll}
C\sharp = \frac{T^2}{Q} = \frac{25}{24} = C . \frac{T^2}{Q} & & D^b = \frac{2}{QT} = \frac{16}{15} = D : \frac{Q^3 T}{4} & \\
D\sharp = \frac{2T^3}{Q^3} = \frac{125}{108} = D . \frac{4T^3}{Q^5} & & E^b = \frac{Q}{T} = \frac{6}{5} = E : \frac{T^2}{Q} & \\
E\sharp = \frac{T^3}{Q} = \frac{125}{96} = E . \frac{T^2}{Q} & & F^b = \frac{2}{T^2} = \frac{32}{25} = F : \frac{T^2}{Q} & \\
F\sharp = \frac{2T^2}{Q^2} = \frac{25}{18} = F . \frac{T^2}{Q} & & G^b = \frac{Q^2}{T^2} = \frac{36}{25} = G : \frac{T^2}{Q} & \\
G\sharp = T^2 = \frac{25}{16} = G . \frac{T^2}{Q} & & A^b = \frac{2}{T} = \frac{8}{5} = A : \frac{T^2}{Q} & \\
A\sharp = \frac{2T^3}{Q^2} = \frac{125}{72} = A . \frac{T^2}{Q} & & H^b = \frac{4}{Q^2} = \frac{16}{9} = H : \frac{Q^3 T}{4} & \\
H\sharp = \frac{4T^4}{Q^4} = \frac{625}{324} = H . \frac{4T^3}{Q^5} & & c^b = \frac{2Q}{T^2} = \frac{48}{25} = c : \frac{T^2}{Q} &
\end{array}
$$

Wir haben also hier drei Werthe der Apotome, nämlich $\frac{4T^3}{Q^5} = \frac{250}{243}$, zur Erhöhung von $D$ und $H$; $\frac{Q^3 T}{4} = \frac{135}{128}$, zur Erniedrigung von $D$ und $H$; und $\frac{T^2}{Q} = \frac{25}{24}$ zur Erhöhung und Erniedrigung aller übrigen Haupttöne. Das nunmehr durch Bestimmung der Werthe von $E\sharp$ und $H\sharp$ vervollständigte System weicht also von dem französischen, dessen Apotome durchgängig $= \frac{T^2}{Q}$ ist, in den vier Tönen $D\sharp$, $D^b$, $H\sharp$ und $H^b$ ab. Diesen kommen hier der Reihe nach zu die Intervalle 0,21090; 0,09311; 0,94786 und 0,83008.

Das System **Delezenne's** endlich hat folgende Abwechslungen der reinen und alterirten Quinten:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
F^b_5 & & C^b_4 & & G^b_4 & & D^b_3 & & A^b_2 & & E^b_2 & & H^b_2 & & F_1 \\
& \frac{4T}{Q^3} & & Q & & Q & & Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & & Q & \\
F_1 & & C & & G & & \overset{1}{D} & & \overset{1}{A} & & \overset{2}{E} & & \overset{2}{H} & & \overset{2}{F}\# \\
& Q & & Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & & Q & & Q & & Q & \\
\overset{3}{F}\# & & \overset{4}{C}\# & & \overset{4}{G}\# & & \overset{5}{D}\# & & \overset{5}{A}\# & & \overset{6}{E}\# & & \overset{6}{H}\# & & \\
& Q & & \frac{4T}{Q^3} & & Q & & Q & & Q & & Q & & &
\end{array}$$

Es folgen hier also immer vier reine Quinten auf eine alterirte, und das ganze Tonsystem umfasst 16 reine Quinten = 9,35940 Octaven und 4 alterirte = 2,26816 Octaven, also im Ganzen 11,62756 Octaven, woraus für den Mittelwerth der Quinte 0,58138 folgt, der dem der gleichschwebenden Temperatur von 43 Stufen $\frac{25}{43}$ = 0,58140 sehr nahe kommt. Da hier $\frac{\overset{6}{H}\#}{F^b_5} = Q^{16}\left(\frac{4T}{Q^3}\right)^4 = (4QT)^4 = \frac{3^4 . 5^4}{2^4}$, so ist die relative Schwingungszahl der mittleren Quinte $= \sqrt[5]{\frac{15}{2}}$. Nach obiger Quintenfolge wird nun hier

$$\begin{array}{ll}
C\# = \frac{Q^3T}{4} = \frac{135}{128} = C . \frac{Q^3T}{4} & D^b = \frac{2}{QT} = \frac{16}{15} = D : \frac{Q^3T}{4} \\
D\# = \frac{QT^2}{2} = \frac{75}{64} = D . \frac{T^2}{Q} & E^b = \frac{Q}{T} = \frac{6}{5} = E : \frac{T^2}{Q} \\
E\# = \frac{Q^3T^2}{4} = \frac{675}{512} = E . \frac{Q^3T}{4} & F^b = \frac{2}{T^2} = \frac{32}{25} = F : \frac{T^2}{Q} \\
F\# = \frac{Q^2T}{2} = \frac{45}{32} = F . \frac{Q^3T}{4} & G^b = \frac{4}{Q^2T} = \frac{64}{45} = G : \frac{Q^3T}{4} \\
G\# = T^2 = \frac{25}{16} = G . \frac{T^2}{Q} & A^b = \frac{2}{T} = \frac{8}{5} = A : \frac{T^2}{Q} \\
A\# = \frac{Q^2T^2}{2} = \frac{225}{128} = A . \frac{Q^3T}{4} & H^b = \frac{4}{Q^2} = \frac{16}{9} = H : \frac{Q^3T}{4} \\
H\# = \frac{Q^4T^2}{4} = \frac{2025}{1024} = H . \frac{Q^3T}{4} & c^b = \frac{8}{Q^3T} = \frac{256}{135} = c : \frac{Q^3T}{4}
\end{array}$$

Dieses System, dessen Intervalle in der ersten Abhandlung S. 100 angegeben sind, hat demnach zwei Werthe der Apotome, nämlich $\frac{T^2}{Q} = \frac{25}{24}$, zur Erhöhung von $D$ und $G$, und zur Erniedrigung von $E$, $F$ und $A$, und $\frac{Q^3T}{4} = \frac{135}{128}$, zur Erhöhung von $C$, $E$, $F$, $A$, $H$, und zur Erniedrigung von $D$, $G$, $H$ und $c$.

6.

Hinsichtlich der Einfachheit des Baues ist nun unbedingt das französische System den beiden übrigen vorzuziehen, aber auch selbst hinsichtlich der approximativen Reinheit möchten am Ende die Vorzüge und Mängel desselben im Vergleich mit dem System Delezenne's sich mindestens die Wage halten. Die Abweichungen des deutschen Systems von ihm glaubt D. Möhring daraus erklären zu müssen, dass man einen Ergänzungston zur Octave sowohl für $D$ als für $H$ vermisst habe, der doch allen übrigen Tönen zukommt, und dass man, um diesen zu erhalten, $H^b = \frac{2}{D} = \frac{16}{9}$, $D^\sharp = \frac{2}{H} = \frac{16}{15}$ gesetzt habe. Um dem französischen System nun auch diese Regelmässigkeit zuzuwenden, schlägt Dr. M. vor, als den Werth der grossen Secunde $\frac{2T}{Q^2} = \frac{10}{9}$ anzunehmen und damit als die reine Durscala folgende anzusehen:

$$1, \ \frac{10}{9}, \ \frac{5}{4}, \ \frac{3}{2}, \ \frac{5}{3}, \ \frac{15}{8}, \ 2,$$

also $D = \frac{10}{9}$ zu setzen; ein Vorschlag, in dem er bekanntlich schon Vorgänger gehabt hat. In der That wird dadurch nicht nur der beabsichtigte Zweck erreicht, sondern man findet auch bei weiterer Untersuchung, dass nach dieser Veränderung genau noch eben so viel Tonarten rein bleiben wie zuvor und die übrigen in gleicher Zahl und Art der Intervalle von der Reinheit abweichen,*) wofern man nun die vorstehende Scala als die völlig reine betrachtet. Der Höhenunterschied der Töne $\frac{9}{8}$ und $\frac{10}{9}$ ist an sich nicht unmerklich, sondern gleich dem syntonischen Komma, also $\frac{1}{9,5}$ des gr. ganzen Tons; es fragt sich also, ob die diatonische Tonleiter diese Vertauschung der grösseren ganzen Tonstufe mit der kleineren in dem Uebergange von $C$ zu $D$ und die umgekehrte Vertauschung im Uebergange von $D$ zu $E$ verträgt. Denn dass sich nicht durch Accorde die reine grosse Secunde, als eine Dissonanz, mit gleicher Sicherheit experimental feststellen lässt wie die Consonanzen, wird wol zugegeben werden müssen. Gleichwohl scheint doch aus Delezenne's Versuchen, die derselbe in aller Ausführlichkeit beschreibt, hervorzugehen, dass eine solche Abänderung der Scala unzulässig ist. Diese Versuche nämlich sollen gegen Galin, welcher lehrte, dass alle ganze

*) In dem Schema des vorigen Artikels vertauscht nur in jeder der drei Zeilen das dritte $Q$ seine Stelle mit dem darauf folgenden $\frac{4T}{Q^2}$.

Stufen der diatonischen Scala gleich seien, beweisen, dass factisch von tüchtigen Künstlern auf den Streichinstrumenten diese Scala genau so ausgeführt werde, wie es die Zahlen 1, $\frac{9}{8}$, $\frac{5}{4}$ u. s. w. fordern, d. h. mit sorgfältiger, wenn auch natürlich unbewusster Unterscheidung des grösseren und kleineren ganzen Tons. Die vier geschickten Musiker Baumann, Delannoy, Rebier und Noguer wenigstens, die an Delezenne's Versuchen Theil nahmen, spielten auf allen Streichinstrumenten und in verschiedenen Tonarten die Durscala, wenn sie sie langsam und mit Aufmerksamkeit vortrugen, völlig im Einklang mit den Tönen, welche Delezenne, jenen Maassen entsprechend, auf dem Tonometer angab. Liess sich also hier mit Sicherheit erkennen, dass das erste Intervall dem zweiten nicht gleich, sondern grösser als dieses war, so spricht dies gegen die Vertauschbarkeit dieser Intervalle, denn um diese für zulässig zu erachten, hätten mindestens eben so oft diese Intervalle gleich gefunden werden müssen. So lange daher nicht durch andre Versuchsreihen nachgewiesen ist, dass namhafte Künstler eine Intonation haben, die von der der genannten abweicht; glaube ich allerdings die Durscala in ihrer herkömmlichen Form für unantastbar halten zu müssen, wenn es sich darum handelt, die dem musikalischen Gehör unsrer Künstler, mag dasselbe nun auf tiefer liegenden ästhetischen Principien oder blosser Gewöhnung beruhen, am meisten zusagende Tonfolge anzugeben. Aus diesem Grunde habe ich in meinen Abhandlungen nicht nur die Consonanzen, sondern auch die Secunden und Septimen als akustisch feststehende Töne behandelt.

## 7.

D. Möhring stimmt mir jedoch völlig bei, wenn ich behaupte, dass alle diese Systeme zuletzt, im Ganzen betrachtet, unbefriedigende Resultate geben, weil die Intervalle, die in der grösseren Anzahl der Tonarten unrein bleiben müssen, viel zu stark von der Reinheit abweichen. Auch erklärt er sich einverstanden mit der von mir zur festen Bestimmung aller erhöhten und erniedrigten Töne in Anwendung gebrachten Methode der kleinsten Quadratsummen, welche ein Tonsystem giebt, das ich das der möglich reinsten gleichschwebenden Temperatur genannt habe, und in dem das Intervall der temperirten Quinte = 0,5810541

oder nahe $= \frac{43}{74}$ ist. Ich füge hinzu, dass, wenn man die grosse Secunde $= \frac{10}{9}$ setzt, das temperirte Quintenintervall

$$\frac{\lg\left(\frac{2\cdot 5^{14}}{3}\right)}{55\,.\,\lg 2} = 0{,}5804005$$

wird, was unmerklich von $\frac{18}{31}$ abweicht. Da Dr. M. bezweifelt, dass sich die Werthe der Secunden mit gleicher Präcision experimental bestimmen lassen, wie die der Consonanzen, so ist es natürlich, dass er nach derselben Methode untersucht, wie gross das temperirte Quintenintervall sein muss, wenn nur die Summe der Quadrate der Abweichungen der Quinte und der beiden Terzen von der Reinheit ein Minimum sein soll. Er findet dann das Quintenintervall

$$\frac{\lg\left(\frac{2^2\cdot 5^7}{3^2}\right)}{26\,.\,\lg 2} = 0{,}5801377$$

und setzt dies näherungsweise $= \frac{29}{50}$, was indess nur bis auf 3 Decimalen genau den gefundenen Werth darstellt. Dieses Resultat zeigt aber, dass, wenn man die Secunden unberücksichtigt lässt, man eine von der Reinheit entferntere Quinte erhält.

Dagegen scheint mir meine eigne Rechnung noch einer kleinen Verbesserung fähig. Ich habe zur Bestimmung des Quintenintervalls $q$ nicht die Quarte zugezogen, weil diese die Octavenergänzung der Quinte ist. Wenn man sich jedoch die Aufgabe stellt, denjenigen Werth von $q$ zu finden, bei welchem die Summe der Quadrate der Abweichungen aller Töne der Durscala von der Reinheit ein Minimum ist, so kann die Quarte nicht unberücksichtigt bleiben. Weil aber das Quadrat ihrer Abweichung, welches, wenn $f$ das Intervall der reinen Quarte, durch $(1 - q - f)^2$ auszudrücken ist (da die Abweichungen der Quarte und Quinte immer entgegengesetzt sind), auch, weil $1 - f = g$, gleich $(g - q)^2$ gesetzt werden kann, so kommt es nun darauf an, $q$ so zu bestimmen, dass, wenn $d$, $e$, $a$, $h$ die reinen Intervalle der grossen Secunde, grossen Terz, grossen Sexte und grossen Septime bedeuten, die Summe

$$(d-2q+1)^2+(e-4q+2)^2+2(g-q)^2+(a-3q+1)^2+(h-5q+2)^2$$

ein Minimum wird. Bildet man nun ihren Differentialquotienten und setzt denselben $= 0$, so erhält man

$$q = \frac{23+2d+4e+2g+3a+5h}{56}$$

oder, wenn man für $d$, $e$, $g$, $a$, $h$ ihre logarithmischen Ausdrücke durch die relativen Schwingungszahlen setzt,

$$q = \frac{\lg\left(\frac{3^7 . 5^3}{2^8}\right)}{14 . \lg 2} = 0,5811220,$$

ein Werth, der der Reinheit etwas näher kommt als der, welcher sich ohne Berücksichtigung der Quarte ergiebt, indem hier die Abweichung der Quinte $\frac{1}{44,25}$ g. g. T. ist, die dort $\frac{1}{43,4}$ beträgt; ein freilich sehr geringer Unterschied. Der Näherungswerth von $q$ lässt sich in zweiziffrigen Zahlen auch nicht anders als durch $\frac{43}{74}$ ausdrücken. Der ihm entsprechende Werth von $Q$ ist $\sqrt[14]{\frac{3^7 . 5^3}{2^8}}$. Nach dem scharfen Werth von $q$ erhält man aber für die Intervalle der 21 Töne mit dem Grundton folgende Bestimmungen:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $C$ | 0 | $C^\sharp$ | 0,06785 | $D^\flat$ | 0,09439 |
| $D$ | 0,16224 | $D^\sharp$ | 0,23010 | $E^\flat$ | 0,25663 |
| $E$ | 0,32449 | $E^\sharp$ | 0,39234 | $F^\flat$ | 0,35102 |
| $F$ | 0,41888 | $F^\sharp$ | 0,48673 | $G^\flat$ | 0,51327 |
| $G$ | 0,58112 | $G^\sharp$ | 0,64898 | $A^\flat$ | 0,67551 |
| $A$ | 0,74337 | $A^\sharp$ | 0,81122 | $H^\flat$ | 0,83776 |
| $H$ | 0,90561 | $H^\sharp$ | 0,97346 | $c^\flat$ | 0,93215 |

Wie gering der Einfluss dieser Verbesserung auf die Reinheit der Scala im Ganzen ist, geht aus der Summe der Quadrate der Abweichungen der sechs benutzten Töne hervor. Denn dieser findet sich hier $= 0,00013762$, für $q = 0,58105$ aber, wenn man ebenfalls die Quarte mit in Rechnung zieht, $= 0,00013774$.

## 8.

Betrachtet man aber nicht alle Töne der $C$-durscala als feststehend, so ist ohne Zweifel Folgendes die einfachste Lösung des Problems, die 21 Töne zu fixiren.

Der Mangel, den die Temperatur beseitigen soll, besteht darin, dass in allen drei zuvor geprüften Systemen (im deutschen wenigstens innerhalb der 24 gebräuchlichsten Tonarten) ein Theil der Töne, welche die Scalen bilden, bald um das syntonische Komma $\frac{81}{80}$ zu hoch, bald um dasselbe zu tief liegen. Nun ist aber der allgemeine Ausdruck dieses Komma's $\frac{Q^4}{4T}$, folglich die Grösse seines Intervalls, wenn $\frac{\lg Q}{\lg 2} = q$, $\frac{\lg T}{\lg 2} = t$

gesetzt wird, $4q - t - 2$. Es müssen daher, wenn die zuvor erwähnten Abweichungen verschwinden sollen, $q$ und $t$ so bestimmt werden, dass

$$4q - t - 2 = 0.$$

Sollen nun zugleich $q$ und $t$ von ihren reinen Werthen $g$ und $e$ möglichst wenig abweichen, so muss $(g - q)^2 + (e - t)^2$, oder, da nach der vorstehenden Gleichung $t = 4q - 2$,

$$(g - q)^2 + (e - 4q + 2)^2$$

ein Minimum werden. Differentiirt man daher diese Summe nach $q$ und setzt den Differentialquotienten gleich Null, so erhält man

$$q = \frac{8 + 4e + g}{17} = \frac{\lg\left(\frac{3 \cdot 5^4}{2}\right)}{17 \cdot \lg 2} = 0{,}5807454,$$

oder nahe $= \frac{18}{31} = 0{,}5806484$. Es ist damit zugleich ein neuer und einfacher Beweis gegeben, dass nur durch gleichschwebende Temperatur (deren charakteristisches Kennzeichen die Gleichung $t = 4q - 2$ ist) die 21 Töne sich fixiren lassen,*) und dass, wenn man dabei nur die Quinte und grosse Terz als maassgebend ansieht, dieses am besten die Temperatur leistet, deren Quinte nahe das Intervall $\frac{18}{31}$ hat, oder deren relative Schwingungszahl genau gleich $\sqrt[17]{\frac{3 \cdot 5^4}{2}}$ ist. Dieses System ist in § 46 meiner ersten Abhandlung dargestellt. Es ist das von Delezenne besprochene Galin's. Die Summe der Quadrate der Abweichungen der 6 Töne $D, E, F, G, A, H$, welche $q = 0{,}58075$ giebt, ist $= 0{,}00014540$; die von $E$ und $G$ allein $= 0{,}000018827$.

9.

Fast genau dieselben Werthbestimmungen und jedenfalls solche, die von denen des vorigen Artikels ganz unmerkbar abweichen, erhält man aber auch, wenn man ganz einfach die Quinte von der reinen grossen Terz abhängig macht, indem man das syntonische Komma $\frac{Q^4}{4T} = 1$ setzt und hieraus $Q$ durch $T$ bestimmt, was

$$Q = \sqrt[4]{4T} = \sqrt[4]{5} = \frac{2{,}99070}{2}$$

und

$$q = \frac{\lg 5}{4 \cdot \lg 2} = 0{,}5804819$$

*) Was auf etwas andre Weise schon in § 35 der ersten Abhandlung erwiesen ist.

giebt, wovon ebenfalls $q = \frac{18}{31}$ als genäherter Werth anzusehen ist, wie, nach Delezenne (a. a. O. S. 19), schon Galin bemerkt haben muss. Man kann dieses System mit D. Möhring, der auf dasselbe durch andre, nicht so einfache Betrachtungen kommt, das reine Terzensystem nennen. Bezeichnet man die kleine Terz durch $T'$, so folgt in diesem System, da $Q = TT'$, zwischen beiden Terzen die Relation

$$T^3 T'^4 = 4\,,$$

die Möhring ebenfalls bemerkt hat. Die Apotome, durch die hier, wie in allen vom reinen Quintensystem abhängigen Tonsystemen, die erhöhten und erniedrigten Töne bestimmt werden, ist

$$\frac{T}{T'} = \frac{T^2}{\sqrt[4]{4T}} = \frac{5\cdot\sqrt[4]{5^3}}{4^2}\,.$$

Hiernach lassen sich die relativen Schwingungszahlen der 21 Töne durch Irrationalzahlen genau bestimmen. Die Intervallwerthe derselben, die, wie aus dem Vorgehenden hervorgeht und durch die Vergleichung mit § 16 der ersten Abhandlung bestätigt wird, von denen der gleichschwebenden Temperatur, deren Quintenintervall $= \frac{18}{31}$, ganz unmerkbar abweichen, sind folgende:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $C$ | 0 | $C^\sharp$ | 0,06337 | $D^\flat$ | 0,09759 |
| $D$ | 0,16096 | $D^\sharp$ | 0,22434 | $E^\flat$ | 0,25855 |
| $E$ | 0,32193 | $E^\sharp$ | 0,38530 | $F^\flat$ | 0,35614 |
| $F$ | 0,41952 | $F^\sharp$ | 0,48289 | $G^\flat$ | 0,51711 |
| $G$ | 0,58048 | $G^\sharp$ | 0,64386 | $A^\flat$ | 0,67807 |
| $A$ | 0,74145 | $A^\sharp$ | 0,80482 | $H^\flat$ | 0,83904 |
| $H$ | 0,90241 | $H^\sharp$ | 0,96578 | $c^\flat$ | 0,93663 |

Aber auch von dem möglichreinsten System in Art. 7 weicht das vorstehende sehr wenig ab. Denn die Haupttöne beider Systeme sind schlechthin ununterscheidbar, und die stärksten Abweichungen der Nebentöne, die auf $E^\sharp$ und $H^\sharp$ fallen, betragen noch nicht resp. $\frac{1}{28}$ und $\frac{1}{22}$ g. T. Man kann daher sagen, dass das reine Terzensystem mit einer dem Ohr völlig genügenden Genauigkeit das möglichreinste System selbst darstellt.

Bemerkenswerth scheint endlich noch Folgendes. Sucht man das Tonsystem, dessen Töne relative Schwingungszahlen haben, welche die geometrischen Mittel zwischen den gleichbenannten Tönen des reinen Quinten- und reinen Terzensystems, deren Intervalle mit dem Grundton

daher die arithmetischen Mittel zwischen den Intervallen derselben Töne sind, so erhält man dasselbe aus den Werthbestimmungen der Quinte, durch welche die aller andern Töne gegeben sind. Diese giebt nun für die Quinte des gesuchten mittleren Systems die relative Schwingungszahl $\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt[4]{5}}$ und das Intervall $\frac{1}{2}(0{,}58496 + 0{,}58048) = 0{,}58272$. Dieser Werth ist aber von dem Quintenintervall der gewöhnlichen gleichschwebenden Temperatur 0,58333 noch nicht um $\frac{1}{278}$ g. T., also völlig unmerkbar verschieden; auch beträgt die Differenz der nächsten erhöhten und erniedrigten Töne nur noch $\frac{1}{23}$ g. T. Die zwölfstufige gleichschwebende Temperatur verdient daher auch in dieser Beziehung den Namen der mittleren, den ich ihr in der früheren Abhandlung deshalb beigelegt habe, weil sie die beiden Classen von Temperaturen scheidet, von denen die eine die erhöhten Töne tiefer, die andre höher setzt als die erniedrigten (vgl. oben Art. 1). Das reine Terzensystem gehört in die erste Classe, wie das reine Quintensystem in die zweite.

## 10.

Man könnte gegen die vorstehenden Resultate den Einwurf machen, dass, wie gerechtfertigt sie auch in mathematischer Hinsicht seien, sie doch in musikalischer nicht ganz befriedigten. Denn es ergebe sich, in Art. 7., für die Abweichung der Quinte $\frac{1}{44{,}25}$ g. T., für die der grossen Terz aber $\frac{1}{66{,}3}$; es verlange aber das Ohr gerade umgekehrt die Quinte reiner als die Terz, und zwar sei, nach Delezenne, die Empfindlichkeit für die Unreinheit der Quinte 1,94 mal oder fast zweimal so gross als für die der grossen Terz.*) Dies führt auf den Gedanken, den Werth des

*) S. 35 meiner ersten Abhandlung ist der nach Delezenne noch bemerkbare Unterschied einer unreinen Quinte von der reinen richtig = 0,1461 Komma angegeben, aber nicht genau reducirt. Er beträgt 0,00262 Octave, was $= \frac{1}{64{,}9}$ des grossen ganzen Tons ist, nicht, wie dort steht, $\frac{1}{67{,}5}$. Die übrigen Reductionen sind richtig, nur muss es Z. 6 v. u. heissen 1,12 Komma $= \frac{1}{8{,}5}$ g. T. statt 1,11 Komma etc. Der Werth des syntonischen Komma's, den ich S. 30 zu $\frac{1}{9{,}4}$ g. T. angegeben habe, ist genauer $\frac{1}{9{,}5}$ g. T. Ich trage noch nach, dass Delezenne für die Octave als Grenze der Unterscheidbarkeit 0,31 Komma $= \frac{1}{30{,}6}$ g. T. fand. Für die grosse Sexte lag diese Grenze

Quintenintervalls $q$ so zu bestimmen, dass der absolute Fehler desselben sich zu dem des Intervalls der grossen Terz wie 1 : 1,94 verhalte. Hieraus ergiebt sich, wenn $e$ und $g$ die vorige Bedeutung behalten, die Bedingungsgleichung

$$1{,}94\,.\,(g-q) = 4q - e - 2,$$

woraus folgt

$$q = \frac{2 + e + 1{,}94\,.\,g}{5{,}94}$$

$$= \frac{\lg\left(5\,.\,\left(\frac{3}{2}\right)^{1{,}94}\right)}{5{,}94\,.\,\lg 2} = 0{,}5819468.$$

Dies giebt folgende Intervallwerthe:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $C$ | 0 | $C^{\#}$ | 0,07363 | $D^{b}$ | 0,09026 |
| $D$ | 0,16389 | $D^{\#}$ | 0,23752 | $E^{b}$ | 0,25416 |
| $E$ | 0,32779 | $E^{\#}$ | 0,40142 | $F^{b}$ | 0,34442 |
| $F$ | 0,41805 | $F^{\#}$ | 0,49163 | $G^{b}$ | 0,50832 |
| $G$ | 0,58195 | $G^{\#}$ | 0,65558 | $A^{b}$ | 0,67221 |
| $A$ | 0,74584 | $A^{\#}$ | 0,81947 | $H^{b}$ | 0,83610 |
| $H$ | 0,90973 | $H^{\#}$ | 0,98336 | $c^{b}$ | 0,92637 |

Die Quinte ist hier um $\frac{1}{56{,}4}$ g. g. T. zu tief, die Quarte um ebensoviel zu hoch, die grosse Terz um $\frac{1}{29}$ zu hoch, die grosse Sexte $\frac{1}{19{,}2}$ zu hoch, die grosse Secunde um $\frac{1}{28{,}2}$ zu tief, die grosse Septime um $\frac{1}{59{,}9}$ zu hoch.

Im System des Art. 7, in welchem die Abweichungen in dem nämlichen Sinne stattfinden, betragen sie für die Quinte und Quarte $\frac{1}{44{,}25}$, für die grosse Terz $\frac{1}{66{,}3}$, für die grosse Sexte $\frac{1}{26{,}6}$, für die grosse Secunde $\frac{1}{22{,}1}$, für die grosse Septime $\frac{1}{132{,}75}$.

Hiernach findet im vorliegenden System allerdings eine gleichmässigere Vertheilung der Abweichungen statt, aber für die Quinte ist an absoluter Reinheit wenig gewonnen, und die Terzen, die im möglichreinsten System so gut als rein sind, haben hier merklich verloren. Die Summe der Quadrate aller Fehler muss natürlich grösser sein. In der That beträgt sie 0,00024815, ist also fast doppelt so gross.

---

zwischen 0,299 Komma $= \frac{1}{31{,}7}$ g. T. und 0,441 Komma $= \frac{1}{21{,}5}$ g. T. Von der Quarte giebt er (S. 13) nur beiläufig an, dass sie eine Aenderung von $\frac{1}{3}$ Komma $= \frac{1}{28{,}5}$ g. T. nicht verträgt.

11.

Man erhält eine anschauliche und zugleich sehr genaue Uebersicht von der Grösse der Intervalle, die den 21 Tönen in den verschiedenen Systemen zukommen, wenn man, wie in § 22 der ersten Abhandlung, diese Intervalle als Bogenlängen eines Kreises ansieht, dessen Umfang dem Intervall der Octave entspricht. Es genügt dann eigentlich schon die Angabe dieser Bogenlängen nach Graden. Denn es ist 1 Grad $= 0{,}00278$ Octave $= \frac{1}{61{,}1}$ ganz. Ton; ferner 0,00262 Octave, der kleinste hörbare Unterschied in der Stimmung der Quinte, $= 56' 35''$, und das syntonische Komma $\frac{81}{80} = \frac{1}{9{,}5}$ g. T. gleich $6^0 27'$. Es ist daher eine mehr als zureichende Schärfe, wenn in den folgenden Täfelchen die Grössen der Intervalle bis auf Zehntel des Grads berechnet sind.

1) Französisches Tonsystem (Art. 2).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *C* | 0° | *C*♯ | 21°,2 | *D*♭ | 40°,0 |
| *D* | 61,2 | *D*♯ | 82,4 | *E*♭ | 94,7 |
| *E* | 115,9 | *E*♯ | 137,1 | *F*♭ | 128,2 |
| *F* | 149,4 | *F*♯ | 170,6 | *G*♭ | 189,4 |
| *G* | 210,6 | *G*♯ | 231,8 | *A*♭ | 244,1 |
| *A* | 265,3 | *A*♯ | 286,5 | *H*♭ | 305,3 |
| *H* | 326,5 | *H*♯ | 347,7 | *c*♭ | 338,8 |

2) Deutsches Tonsystem (Art. 5).

Weicht von dem französischen nur ab in den Tönen

| | | | |
|---|---|---|---|
| *D*♯ | 75°,9 | *D*♭ | 33°,5 |
| *H*♯ | 341,2 | *H*♭ | 298,8 |

3) Delezenne's Tonsystem (Art. 5)

hat die Haupttöne mit dem französischen und deutschen System gemein. Die Bestimmungen der erhöhten und erniedrigten Töne sind folgende:

| | | | |
|---|---|---|---|
| *C*♯ | 27°,6 | *D*♭ | 33°,5 |
| *D*♯ | 82,4 | *E*♭ | 94,7 |
| *E*♯ | 143,5 | *F*♭ | 128,2 |
| *F*♯ | 177,0 | *G*♭ | 182,9 |
| *G*♯ | 231,8 | *A*♭ | 244,1 |
| *A*♯ | 293,0 | *H*♭ | 298,8 |
| *H*♯ | 354,1 | *c*♭ | 323,4 |

4) Möglichreinstes Tonsystem (Art. 7).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *C* | 0° | *C#* | 24°,4 | $D^b$ | 34°,0 |
| *D* | 58,4 | *D#* | 82,8 | $E^b$ | 92,4 |
| *E* | 116,8 | *E#* | 141,2 | $F^b$ | 126,4 |
| *F* | 150,8 | *F#* | 175,2 | $G^b$ | 184,8 |
| *G* | 209,2 | *G#* | 233,6 | $A^b$ | 243,2 |
| *A* | 267,6 | *A#* | 292,0 | $H^b$ | 301,6 |
| *H* | 326,0 | *H#* | 350,4 | $c^b$ | 335,6 |

5) Reines Terzensystem (Art. 9).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *C* | 0° | *C#* | 22°,8 | $D^b$ | 35°,1 |
| *D* | 57,9 | *D#* | 79,6 | $E^b$ | 93,1 |
| *E* | 115,9 | *E#* | 138,7 | $F^b$ | 128,2 |
| *F* | 151,0 | *F#* | 173,8 | $G^b$ | 186,2 |
| *G* | 209,0 | *G#* | 231,8 | $A^b$ | 244,1 |
| *A* | 266,9 | *A#* | 289,7 | $H^b$ | 302,0 |
| *H* | 324,9 | *H#* | 347,7 | $c^b$ | 337,2 |

6) Reines Quintensystem (Art. 1).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *C* | 0° | *C#* | 34°,1 | $D^b$ | 27°,1 |
| *D* | 61,2 | *D#* | 95,3 | $E^b$ | 88,2 |
| *E* | 122,3 | *E#* | 156,5 | $F^b$ | 115,3 |
| *F* | 149,4 | *F#* | 183,5 | $G^b$ | 176,5 |
| *G* | 210,6 | *G#* | 244,7 | $A^b$ | 237,7 |
| *A* | 271,8 | *A#* | 305,9 | $H^b$ | 298,8 |
| *H* | 332,9 | *H#* | 370,0 | $c^b$ | 325,9 |

7) Mittlere Temperatur.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *C* | 0° | *C#* = $D^b$ | 30° |
| *D* | 60 | *D#* = $E^b$ | 90 |
| $F^b$ = *E* | 120 | *F#* = $G^b$ | 180 |
| *E#* = *F* | 150 | *G#* = $A^b$ | 240 |
| *G* | 210 | *A#* = $H^b$ | 300 |
| *A* | 270 | *H#* = *c* | 360 |
| $c^b$ = *H* | 330 | | |

12.

Weder das möglichreinste Tonsystem (Art. 7), noch das ihm nahe kommende reine Terzensystem (Art. 9) entspricht den Bedürfnissen unsrer heutigen Musik. Denn es liegen in ihm, wie in den zuvor ausgeführten drei Systemen und in allen gleichschwebenden Temperaturen, in denen das Quintenintervall kleiner als $\frac{7}{12}$ ist, die erhöhten Töne tiefer als ihre nächstbenachbarten erniedrigten, und es stehen ihm daher die Bedenken entgegen, die sich nach Herbart, Griepenkerl u. A. gegen diese Lage geltend machen lassen. D. Möhring tritt diesen Bedenken nicht nur bei, sondern giebt auch eine schätzbare Thatsache, durch welche die umgekehrte Lage dieser Töne als die von dem Musiker wirklich beobachtete nachgewiesen wird. Er verband sich nämlich mit dem Musikdirector Meyer in Lüneburg, einem geschickten Violonspieler, um nach dessen Griffen auf der $G$-Saite die Unterschiede der Saitenlängen der Töne $G$, $G^{\sharp}$, $A^{b}$ und $A$ durch directe Messung zu bestimmen. Er fand $G - A^{b} = 2'' \, 6'''$ rheinl. Duodecimalmass, $G - G^{\sharp}$ nahe $= 3''$, und $G - A = 5''$. Obgleich Dr. M. diese Messung nicht als eine vollkommen genaue betrachtet, so hält er sie doch für sicher genug, um darüber keinen Zweifel zu lassen, dass der praktische Musiker wirklich $A^{b}$ tiefer nimmt als $G^{\sharp}$. Es lässt sich aber auch zeigen, dass diese Maassbestimmungen mit den Differenzen, welche diese Saitenlängen nach dem reinen Quintensystem oder der demselben sehr nahe kommenden gleichschwebenden Temperatur, deren Quintenintervall $= \frac{31}{53}$, haben müssen, so nahe übereinstimmen, wie es bei der Unvollkommenheit der Messungsart, welche die Schärfe nicht erreichen kann, die sich bei Vergleichung der Töne des Instruments mit dem Unisono des Tonometers erlangen lässt, immerhin nur erwartet werden kann. Seien nämlich $x$, $x'$, $x''$, $x'''$ die den Tönen $G$, $A^{b}$, $G^{\sharp}$, $A$ der Reihe nach zukommenden Intervalle mit $C$, wie gewöhnlich in Theilen des Octavenintervalls ausgedrückt, ferner $l$, $l'$, $l''$, $l'''$ der Reihe nach die Saitenlängen dieser Töne, so ist

$$\lg \frac{l'}{l} = -(x'-x) \lg 2, \; \lg \frac{l''}{l} = -(x''-x) \lg 2, \; \lg \frac{l'''}{l} = -(x'''-x) \lg 2.$$

Nach dem reinen Quintensystem sowohl als für jede gleichschwebende Temperatur ist nun, da $x$ das Intervall der Quinte,

$$x' = 3 - 4x, \quad x'' = 8x - 4, \quad x''' = 3x - 1.$$

Ist daher die Quinte rein, also $x = 0{,}58496$, so folgt

$$x' = 0{,}66015, \quad x'' = 0{,}67970, \quad x''' = 0{,}75489;$$

daher ist

$$\lg\frac{l'}{l} = -0{,}07519 \,.\, \lg 2, \quad \lg\frac{l''}{l} = -0{,}09474 \,.\, \lg 2, \quad \lg\frac{l'''}{l} = 0{,}16993 \,.\, \lg 2.$$

Berechnet man hieraus $\frac{l'}{l}$, $\frac{l''}{l}$, $\frac{l'''}{l}$, so erhält man

$$\frac{l-l'}{l-l'''} = \frac{0{,}05078}{0{,}11111} = 0{,}46; \quad \frac{l-l''}{l-l'''} = \frac{0{,}06313}{0{,}11111} = 0{,}57.$$

Nach Dr. M.'s Messung ist aber $l - l' = 30'''$, $l - l'' = 36'''$, $l - l''' = 60'''$. Dies giebt also

$$\frac{l-l'}{l-l'''} = 0{,}5 \text{ und } \frac{l-l''}{l-l'''} = 0{,}6,$$

was als eine vollkommen befriedigende Uebereinstimmung angesehen werden kann.*)

13.

Jedes System der gleichschwebenden Temperatur, in dem das Quintenintervall grösser ist als $\frac{7}{12}$, nähert sich dem Charakter des reinen Quintensystems; denn von den Terzen schwebt die grössere aufwärts, die kleinere abwärts, d. h. jene ist grösser, diese kleiner als die gleichnamige reine Terz, und dasselbe gilt von den Terzen des Quintensystems; zugleich haben die erhöhten Töne zu den erniedrigten hier wie dort dieselbe relative Lage. Da nun (Art. 10 Anm.) die Quinte erst bei einer Abweichung ihres Intervalls, die $>$ 0,00262, anfängt merkbar unrein zu werden, so sind alle Quinten, deren Intervall grösser als 0,58234 und kleiner als 0,58758, als völlig rein zu betrachten. Da aber aufwärts schwebende Quinten, da sie die grosse Terz noch mehr von der Reinheit entfernen als die reine Quinte, auszuschliessen sind, und übrigens nach dem Vorstehenden nur solche in Betracht kommen, deren Intervall grösser als $\frac{7}{12} = 058333$, so sind nur alle diejenigen Temperaturen als brauchbare Annäherungen an das reine Quintensystem anzusehen, deren Quintenintervall zwischen diesem letzteren Grenzwerth und 0,58496 liegt. Für den Grenzwerth $\frac{7}{12}$ (die mittlere gleichschw. Temperatur) schwebt die grosse Terz um $\frac{1}{14{,}9}$ g. g. T. aufwärts, die kleine Terz um $\frac{1}{13}$ g. T. abwärts; im reinen Quintensystem dagegen steht die

*) Noch genauere und vermehrte Messungen, die zu denselben Resultaten führen, theilt die Beilage zu dieser Abhandlung mit.

grosse Terz sogar um ein syntonisches Komma oder $\frac{1}{9,5}$ g. T. zu hoch, die kleine Terz um eben so viel zu tief. Für beide Systeme und alle zwischenliegende weichen also die Terzen nicht unmerklich von der Reinheit ab, und zwar um so mehr, je mehr sich das System von der gewöhnlichen gleichschwebenden Temperatur entfernt und dem reinen Quintensystem nähert. Aber in demselben Maasse treten auch die erhöhten und erniedrigten Töne, die jene Temperatur gleichsetzt, auseinander, bis ihr Unterschied zuletzt dem pythagorischen Komma oder $\frac{1}{8,7}$ g. T. gleichkommt. Auf dieser Unterscheidung beruht nun aber gerade die Feinheit der Musik der Streichinstrumente. Diese ist demnach mit reinen Terzen, deren relative Schwingungszahlen $\frac{5}{4}$ und $\frac{6}{5}$, völlig unvereinbar. Aus diesen Gründen, und weil in unsrer Musik die erhöhten Töne höher liegen müssen als die ihnen nächsten erniedrigten, habe ich in meiner grössern Abhandlung als das Tonsystem, dem die Musik der Streichinstrumente höchst wahrscheinlich am nächsten komme, diejenige gleichschwebende Temperatur bezeichnet, in welcher das Quintenintervall $= \frac{31}{53}$ ist, was von dem der reinen Quinte nur um $\frac{1}{2832}$ g. T. abweicht, und in dem der Unterschied der nächsten erhöhten und erniedrigten Töne $\frac{1}{9}$ g. T. beträgt. D. Möhring tritt dieser Annahme im Wesentlichen vollkommen bei, giebt ihr aber einen fasslicheren und entschiedeneren Ausdruck, indem er geradezu sagt: das System der Streichinstrumente ist das reine Quintensystem, von dem ja in der That die angeführte Temperatur so gut als nicht verschieden ist. Ich bin hiermit ganz einverstanden. Wenn derselbe aber hinzusetzt: diese Instrumente könnten also der Temperatur ganz entbehren, so ist dies ein Ausdruck, der mindestens leicht Missverständnisse zulässt. Allerdings ist er jedenfalls approximativ richtig, wenn man die Töne der Streichinstrumente mit denen des reinen Quintensystems vergleicht, unrichtig aber, wenn man sie der modernen diatonischen Scala mit ihren reinen Terzen gegenüberstellt. Mit diesen verglichen, ist das reine Quintensystem selbst als ein System der gleichschwebenden Temperatur anzusehen, nämlich als dasjenige, in welchem zwar nicht Quinte, Quarte und grosse Secunde, wohl aber die grosse Terz, grosse Sexte und grosse Septime temperirt sind. Die Musik der Streichinstrumente ist also allerdings rein im Sinne der antiken diatonischen Tonleiter der Pythagoreer, aber nicht rein im Vergleich mit der modernen von Zarlino eingeführten

und von der heutigen Akustik anerkannten Tonleiter. Ist es nun, wie man doch wohl annehmen darf, durch unparteiische, von aller Vorliebe für einfache rationale Zahlenverhältnisse völlig freie Versuche wirklich erwiesen, dass sich die Schwingungsmengen der Töne des Dreiklangs in seiner grössten Reinheit genau wie die Zahlen 4, 5, 6 verhalten, folglich die grosse Terz durch $\frac{5}{4}$, die kleine durch $\frac{6}{5}$ auszudrücken ist, so kann das System der Streichinstrumente als akustisch rein nicht gelten; denn es muss, um erhöhte und erniedrigte Töne zu unterscheiden und diese in den Lagen zu haben, welche die enharmonischen Verwechselungen bei gewissen Uebergängen fordern, die grosse Terz höher, die kleine tiefer setzen als die reine.

14.

Aber wie lässt sich dies mit Delezenne's oben (Art. 6) angeführten Versuchen vereinigen? — Man muss wol hierbei zunächst bedenken, dass der intelligente Musiker auf den Streichinstrumenten nicht blos mechanisch und sklavisch ein angelerntes System von Griffen befolgt, sondern dass er dieses, von seinem musikalischen Gefühl geleitet, nach den Umständen modificirt. Es ist daher sehr wahrscheinlich, dass, wenn er aufgefordert wird, mit möglichster Sorgfalt und Ruhe eine sein Gehör völlig befriedigende Scala zu spielen, er etwas anders greifen wird, als wenn er im raschen Tempo nur seiner Gewohnheit folgt, oder die Töne ausser der Ordnung der Scala anzugeben hat. Dies bestätigen auch Delezenne's eigne Worte. Er sagt z. B. (S. 46 seiner Abhandlung): *Si le morceau est lent, quelle que soit la note sur laquelle on s'arrête, on la trouve presque toujours juste et rarement en erreur d'un demi-comma, dans les positions faciles. Si après un grand nombre de mesures, on s'arrête sur une note voisine du chevalet, l'erreur monte quelquefois à un comma, et jamais à deux. Quand le mouvement est très-rapide et que la main s'élance du haut en bas de la touche pour attaquer la note à vérifier, on trouve parfois une erreur de deux commas, si l'on a joué long-temps avant de s'arrêter. — Quand on parcourt différens tons et qu'on s'arrête avant d'être rentré en ut; quand le prélude est prolongé et rapide; quand les doigts franchissent toutes les distances, on trouve encore plus de notes justes que de fausses, et l'erreur de ces dernières s'est quelquefois élevée jusqu'à un demi-ton majeur.* — Ueber die relative Lage der erhöhten und erniedrigten Töne bemerkt

Delezenne nichts Besondres; man müsste daher nach seinen Angaben annehmen, dass sie immer seinem Tonsystem entsprechend gegriffen worden wären, was doch kaum glaublich, ja in manchen Fällen unmöglich ist. Zwar bemerkt er (S. 24): *D'autres veulent même que le dièse soit plus aigu que le bémol, ce qui a lieu en effet, comme nous venons de le dire, quand cette note diésée est sensible* (die grosse Septime) *et qu'elle conduit à la tonique.* Und dies führt ihn auf die Construction der Scala des Quintensystems, deren historische Stellung ihm aber so völlig unbekannt ist,*) dass er sie nur für seine eigne versuchsweise Neuerung hält. Jedoch verwirft er sie, als dem Ohr nicht genügend. Er sagt von ihr (S. 25): *En la jouant sur la basse dont j'ai parlé plus haut, elle a séduit plus d'un artiste à la première audition; mais ils ne tardaient pas à reconnaitre que le mi et le la étaient un peu trop hauts; bien qu'ils fussent contents du si en montant.* Man sieht hieraus wenigstens, dass diese Scala für das Ohr verführerisch war und daher in der praktischen Musik, der die ideale Reinheit der Tonleiter nicht das höchste und letzte Ziel ist, wohl eine Stelle finden kann. Ob dies aber wirklich der Fall sei, wird durch weitere Versuche ermittelt werden müssen.

## 15.

Hierzu scheint mir nun folgender Vorschlag sehr geeignet. Ich habe in § 53 meiner ersten Abhandlung nachgewiesen, dass in der gleichschwebenden Temperatur, deren Quintenintervall $= \frac{31}{53}$, welche mit dem reinen Quintensystem fast zusammenfällt, durch die Tonfolge

$$C \quad D \quad F^b \quad F \quad G \quad H^{bb} \quad c^b \quad c$$

sehr nahe die reine *C*-durscala $1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, 2$ dargestellt wird. Es lässt sich dies auch leicht für das reine Quintensystem selbst zeigen. In diesem kommen nämlich den vorstehenden Tönen der Reihe nach folgende Werthe zu:

*) Irrig sagt er (S. 3): *Depuis Pythagore et Ptolemée, tous les physiciens, tous les auteurs d'acoustique pure ou appliquée à la musique, admettent l'inégalité d'ut à ré, de ré à mi etc.* Die Verhältnisse der reinen Terzen waren zwar nicht nur dem Ptolemäus bekannt, sondern schon früher von Didymus (38 v. Chr.) aufgefunden worden, allein sie galten bis ins sechzehnte Jahrhundert für unvollkommene Consonanzen und erhielten nicht das Bürgerrecht in der Scala. S. Kiesewetter's Geschichte der heutigen Musik S. 112.

$$1 \quad \frac{Q^2}{2} \quad \frac{2^5}{Q^8} \quad \frac{2}{Q} \quad Q \quad \frac{2^6}{Q^9} \quad \frac{2^5}{Q^7} \quad 2.$$

Diese Tonleiter hat die Stufen

$$\frac{Q^2}{2} \quad \frac{2^6}{Q^{10}} \quad \frac{Q^7}{2^4} \quad \frac{Q^2}{2} \quad \frac{2^6}{Q^{10}} \quad \frac{Q^2}{2} \quad \frac{Q^7}{2^4}.$$

Der grosse ganze Ton wird also streng richtig durch $\frac{Q^2}{2}$ dargestellt. Den kleinen ganzen Ton aber, der nach der modernen Scala $\frac{2T}{Q^2}$, vertritt hier der Werth $\frac{2^6}{Q^{10}}$, und den halben Ton $\frac{2}{QT}$ der Werth $\frac{Q^7}{2^4}$. Demnach weicht der kleine ganze Ton um $\frac{Q^8 T}{2^5} = \frac{3^8 . 5}{2^{15}}$, der halbe Ton um $\frac{2^5}{Q^8 T} = \frac{2^{15}}{3^8 . 5}$ von seinem wahren Werthe ab, der erstere steht also um eben so viel zu hoch, als der letztere zu tief. Das dieser Abweichung entsprechende Intervall ist aber

$$\frac{\lg\left(\frac{3^8 . 5}{2^{15}}\right)}{\lg 2} = \frac{\lg \frac{32805}{32768}}{\lg 2} = 0{,}0016280,$$

d. i. $\frac{1}{103{,}7}$ des grossen ganzen Tons. Die Abweichung der obigen Tonfolge des Quintensystems von der modernen diatonischen Tonleiter ist also unter allen Umständen völlig unmerkbar, und diese Tonfolge stellt genau diejenige Scala dar, die Delezenne als die normale ansieht. Es kommt nun darauf an, wie sich der Musiker verhalten wird, wenn man ihm aufgiebt, auf seinem Streichinstrument die obige Tonfolge *C*, *D*, *F*♭, *F* etc. zu spielen, und um wie viel diese Töne, wenn man ihre Folge mit der Scala *C*, *D*, *E*, *F* etc. wechseln lässt, durch das Unisono mit dem Tonometer verglichen, von den Tönen dieser letztern Scala differiren. Nach allem Vorstehenden wird der Musiker die Tonreihe *C*, *D*, *E*, *F* etc. nahe nach dem Quintensystem spielen, die Tonreihe *C*, *D*, *F*♭, *F* etc. aber die reine Durscala sein, die, nach Delezenne, das musikalische Gefühl am meisten befriedigt, und die der Künstler unbewusst spielen mag, wenn er sich allein von seinem Gehör leiten lässt. Bestätigen nun wirkliche Versuche diese Erwartung, so ist bewiesen, dass das Spiel der Streichinstrumente sich in der Regel dem Quintensystem anschliesst und nur etwa da, wo es auf grösstmögliche Reinheit der Scala ankommt, davon zu Gunsten der modernen Tonleiter abweicht. Mit Hinsicht auf die in der Beilage enthaltenen Beobachtungen des D. Möhring kann aber wenigstens der erstere Theil dieses Satzes schon jetzt als bewiesen angesehen werden.

16.

Als das Endergebniss aller im Vorstehenden und in der ersten Abhandlung enthaltenen Untersuchungen stellt sich nun folgender Satz heraus: die von Zarlino begründete und von den Akustikern anerkannte diatonische Tonleiter mit der grossen Terz $\frac{5}{4}$, der grossen Sexte $\frac{5}{3}$ und der grossen Septime $\frac{15}{8}$ kann für unsre heutige Musik nicht als maassgebend, sondern nur als exceptionell gelten, und alle darauf gebaute Systeme der 21 bräuchlichen Töne sind für diese Musik weder in theoretischer, noch in praktischer Beziehung brauchbar; das normative System derselben ist vielmehr das reine Quintensystem, also das alte pythagoreische. Ueber den ersten dieser drei Punkte ist schon in Art. 13 und 14 das Nöthige gesagt. Was den zweiten und dritten betrifft, so mag zur Recapitulation noch Folgendes beigefügt werden. Die auf die moderne diatonische Scala gegründeten Systeme (Art. 11, 1 bis 5) können nicht maassgebend sein, weil sie sämmtlich die erhöhten Töne tiefer setzen als ihre nächsten erniedrigten, der praktische Musiker aber auf den Streichinstrumenten factisch jene höher setzt als diese. Zugleich ist diese Lage in theoretischer Hinsicht nothwendig, weil sonst jene Unklarheit und Verwirrung entsteht, die bis jetzt über diesen Punkt in den Grundlehren der theoretischen Musik herrschte. Denn von der Unmöglichkeit, nach jenen Systemen die Uebergänge durch die sogenannte enharmonische Verwechselung gründlich zu begreifen, wird man zu der Lehre von der »Mehrdeutigkeit der Töne« getrieben, die den reellen Unterschied der erhöhten und erniedrigten Töne für einen blos nominellen ausgiebt und sich der gewöhnlichen gleichschwebenden Temperatur in die Arme wirft, die diese Unterscheidung der Sache nach ganz fallen lässt. Dieser Widerstreit zwischen einer ungenügenden Theorie und einer Praxis, die das Bessere richtig zu treffen gewusst hat, wird nun vollständig gelöst, wenn man zu der Einsicht gelangt, dass es eine ganze Classe von gleichschwebenden Temperaturen giebt, welche die erhöhten und erniedrigten Töne in der theoretisch nothwendigen und von dem Praktiker befolgten Lage enthalten, eine Classe, deren äusserste Grenzen einerseits die gewöhnliche zwölfstufige Temperatur, andrerseits das reine Quintensystem ist. Zwischen diesen Grenzen muss sich die Praxis, wie sie ist,

bewegen. Weil aber selbst für das reine Quintensystem der Unterschied der erhöhten Töne von ihren nächsten erniedrigten, der hier am grössten ist, nicht mehr als $\frac{1}{8,7}$ des ganzen Tons beträgt, so ist es unzweifelhaft, dass das Spiel des Musikers, wenn es diesen Unterschied hörbar darstellen soll, dieser Grenze mindestens sehr nahe kommen muss,*) und dass dieses reine Quintensystem als die Norm der Praxis anzusehen ist. Es ist aber auch die einzig richtige Basis der Compositionslehre, die nicht von den 12 Tönen der Clavierscalen ausgehen darf, bei welchen doppelte Benennungen für dieselben Töne unvermeidlich sind, aber es auch ganz unbegreiflich bleibt, warum man sich nicht mit einfachen begnügt (daher wol auch neuerdings ein unglücklicher Versuch auftauchte, die Zeichensprache der Musik zu vereinfachen). Sie darf sich nicht einmal von vorn herein auf die 21 bräuchlichen Töne beschränken und doppelt, dreifach, vielfach erhöhte oder erniedrigte Töne für blosse Bezeichnungen ohne reelle Unterscheidung von den einfachen ausgeben wollen, denn sie sind eben so reell und selbständig wie diese. Sie muss vielmehr von dem Quintensystem ausgehen, in dem an sich die Zahl der Töne unbegrenzt ist, indess freilich davon meistens nur 21 (selten Doppelkreuze und Doppelbee) in musikalischen Gebrauch kommen. Die ganze musikalische Notation steht mit dem Fortschreiten und Rückschreiten nach Quinten im engsten Zusammenhang. Denn von *C*-dur, ohne Vorzeichnung, ausgehend, giebt die obere Quinte von *C*, *G*-dur mit einem Kreuz, die

*) Für die zwischen beiden äussersten Grenzen die Mitte haltende Temperatur, deren Quintenintervall = 0,58415, würde der Unterschied der mehrgenannten Töne nur noch $\frac{1}{17,3}$ g. T. betragen. Es mag hier folgender Zusatz zu § 54 der früheren Abhandlung eine Stelle finden. Setzt man die Differenz des Intervalls der temperirten grossen Terz $4q - 2$ von dem der reinen 0,32193, also $4q - 2,32193 = u$, die Differenz der Intervalle von je zwei nächsten erhöhten und erniedrigten Tönen, wie $C^{\sharp} - D^{\flat}$, d. i. $12q - 7 = p$, so erhält man durch Elimination von $q$

$$u = 0,01140 + \tfrac{1}{3}p.$$

Hieraus erhellt, dass die Aenderung des Werthes von $u$ immer nur ein Drittel der Aenderung des Werthes von $p$ beträgt. Für $q = \frac{7}{12}$ ist $p = 0$, $u = 0,01140 = \frac{1}{14,9}$ g. T.; für $q = 0,58496$ ist $p = 0,01955 = \frac{1}{8,7}$ g. T., $u = 0,01792 = \frac{1}{9,5}$ g. T. Während also, beim Uebergang von der Quinte der mittleren Temperatur zu der reinen, $p$ von 0 bis $\frac{1}{8,7}$ g. T. wächst, wächst $u$ nur von $\frac{1}{14,9}$ bis $\frac{1}{9,5}$ g. T. Für das zuvor erwähnte mittlere Quintenintervall $q = 0,58415$, für welches $p = \frac{1}{17,3}$, ist $u = \frac{1}{11,6}$ g. T.

zweite Quinte, *D*-dur mit 2 Kreuzen u. s. f., eben so die untere Quinte von *C*, *F*-dur mit einem Be, die zweite untere Quinte *B*-dur mit 2 Been u. s. f. Dasselbe findet, wie bekannt, in Bezug auf die Molltonarten statt, wenn man nach Quinten von *A* aus vor- und rückschreitet. Es ist auch hier, wenn man die Sache allgemein fasst, zunächst nicht an eine beschränkte Zahl von Tönen und Tonarten, etwa nach einem Quintencirkel, zu denken. Um zu einem solchen zu gelangen, muss man erst die reine Quinte temperiren, d. h. das Intervall $\frac{\lg \frac{3}{2}}{\lg 2}$, das sich in aller Strenge nur durch einen unendlichen Decimalbruch darstellen lässt, durch einen genäherten endlichen oder den ihm gleichen gemeinen Bruch ausdrücken. So kommt man auf die Cirkel von 12, 19, 31, 41, 43, 53 Quinten u. s. w., die sämmtlich gleichschwebende Temperaturen von eben so viel Tönen geben, wobei es ganz gleichgültig ist, ob die Musik sie alle oder nur zum Theil anwendet. Die gewöhnliche gleichschwebende Temperatur ist daher nur ein höchst specieller Fall des Quintensystems überhaupt und eignet sich demnach auf keine Weise dazu, der allgemeinen theoretischen Tonlehre zu Grunde gelegt zu werden; denn sie beschränkt den Gesichtskreis und giebt zu grossen Missverständnissen, Irrthümern und Unklarheiten Veranlassung. Ihr Werth für die Tasteninstrumente bleibt unbestritten; er beruht aber nur darauf, dass die Complication des Mechanismus zu gross werden würde, wenn jeder der 21 Töne seine eigne Taste erhalten sollte. Dasselbe gilt von den Blasinstrumenten mit fixirten Tönen. Denn dass man eine weit harmonischere Orchestermusik erhalten würde, wenn sich die Blasinstrumente so einrichten liessen, dass sie, wie die Streichinstrumente, dem Quintensystem folgten, kann nach dem Vorstehenden nicht mehr bezweifelt werden. Kenner haben schon die Bemerkung gemacht, dass die Verdrängung der frischen Naturtöne der Hörner und Trompeten durch die temperirten der Ventilinstrumente der Orchestermusik hinsichtlich der Reinheit ihrer Harmonie keinen Gewinn gebracht hat. In der That kann diese niemals vollkommen sein, wo neben den Tönen des Quintensystems zugleich die der 12stufigen gleichschwebenden Temperatur auftreten. Ob aber die Behauptung mancher musikalischen Schriftsteller, dass diese leise Verschiedenheit der Stimmung der Streich- und Blasinstrumente die Quelle von neuen und eigenthümlichen Schönheiten werde, in der Wahrheit begründet ist, oder auf Täuschung und Einbildung beruht, möchte doch wol erst einer, freilich nicht leicht zu führen-

den nähern Untersuchung bedürfen. Wie leicht hier Täuschungen möglich sind, geht schon daraus hervor, dass man die pythagoreische Tonleiter als eine unserm Ohr gänzlich fremd gewordene betrachtet und die Vermuthung ausgesprochen hat, die unreinen Terzen müssten in der Harmonie der Alten eine eigenthümliche Wirkung hervorgebracht haben,*) indess wir doch in unserm Streichquartett, nach den vorstehenden Ergebnissen, diese Terzen und ihre harmonische Wirkung noch immer hören und uns ihrer erfreuen.

*) Gehler sagt (phys. Wörterbuch, Art. Ton, S. 383): »Man hat dieses System (das reine Quintensystem) bis ins sechzehnte Jahrhundert beibehalten, woraus freilich ein ganz eigner Charakter der alten Musik entstehen musste, die überhaupt mehr auf Melodie als auf Harmonie beruhte, bei welcher die unreinen Terzen eine eigne Wirkung thun mussten. Alles dieses schränkt sich blos auf die Töne der Instrumente ein, die den Gesang begleiteten; der freie Sänger, der die Töne hervorbringen darf, wie sie das Gehör verlangt, wird unstreitig auch bei den Alten, selbst ohne Absicht, die Terzen nach seinem Gefühl temperirt, und statt der systematischen unreinen die gefälligeren reinen gesungen haben.« Bei wieviel Sängern mag aber die Intonation bis auf $\frac{1}{9}$ des ganzen Tons richtig und zuverlässig sein?

# BEILAGE.

Das wichtige Resultat, das Herr D. Möhring durch die in Art. 12 angeführten Messungen gewonnen hatte, veranlasste mich, ihm den Wunsch vorzulegen, dass er jene Messungen nicht nur mit Sorgfalt wiederholen, sondern auch auf die grosse und kleine Terz ausdehnen möchte. Die Bestimmung dieser beiden letzteren Intervalle durch Messung schien mir ein wahres *experimentum crucis;* denn es musste sich dadurch entscheiden, ob der Musiker auf den Streichinstrumenten reine oder irgendwie temperirte Terzen spiele. Herr D. Möhring hat meiner Aufforderung aufs bereitwilligste und mit völlig befriedigendem Erfolge entsprochen, wie aus folgender Mittheilung hervorgeht, von der er mir gestattet hat beliebigen Gebrauch zu machen.

Er schreibt: »Um unbefangen bei der Messung zu sein, hatte ich meinen Freund, den Dr. med. Stieck gebeten, an derselben Theil zu nehmen. Die nachfolgenden Angaben sind auf diese Weise entstanden, dass wir abwechselnd massen und uns gegenseitig controlirten. Weder der Musikdirector Meyer noch der Dr. Stieck wussten bei dem Experiment, wobei ich dieses Mal Ihrem Wunsche gemäss mein Augenmerk besonders auf die Bestimmung der grossen und kleinen Terz richtete, etwas von der Rechnung und hatten beide kein Urtheil darüber, ob das Resultat mit der Berechnung nach dem Quintensystem übereinstimmen würde oder nicht. Ich hatte Herrn Meyer gebeten, sich einfach nach dem Gehör zu richten und die Töne so anzugeben, wie er sie gewöhnlich spiele; während der Dr. Stieck, wie schon gesagt, mir zur Controle der Messung diente. Als Maassstab benutze ich einen officiellen Maassstab der Hannoverschen Chaussee-Verwaltung vom Jahre 1847 (Calenberger Duodecimalmaass) und daneben einen kleineren, der aber ganz genau mit dem obigen übereinstimmte. Ich muss übrigens bemerken, dass eine ganz genaue Messung dadurch schwierig wurde, dass bei verschiedenen Tönen, je nach ihrer Entfernung vom Sattel, von Herrn Meyer verschiedene Finger zum Druck benutzt werden mussten, was allerdings nicht ohne Bedeutung ist, wegen der verschiedenen Breite der drückenden Finger. Am einfachsten ergab sich die Bestimmung derjenigen Töne, deren Lage weiter vom Sattel sich entfernt, weil hier-

bei der kleine Finger (der schmalste) benutzt werden konnte, während bei *As* der Zeigefinger zum Druck verwandt werden musste. Bei *Gis* benutzte Herr Meyer den Mittelfinger. Herr Meyer zeigte uns nun, dass, bei unveränderter Lage des Fingers, nach Verschiedenheit des Drucks, je nachdem er die dem Leibe zugewandte oder abgewandte Seite des Fingers stärker an die Saite andrückte, der Ton sich etwas erhöhte oder erniedrigte. Diese Modification des Tons ist den Violinspielern wohl bekannt, wie ich selbst aus früherer Erfahrung weiss. Deshalb bat ich Herrn Meyer, immer nur mit der Mitte des Fingers den Hauptdruck auszuüben, und nahm deshalb auch bei der Messung an, dass immer nur der mittlere Theil des Fingers beim Druck vollständig wirksam sei. Ich denke, Sie werden darin mit mir übereinstimmen. Die Anwendung etwa eines Klemmers schien mir bei diesen Versuchen, wo der Musiker durch sein musikalisches Gehör zur Hervorbringung der Töne bestimmt werden soll, deshalb unthunlich, weil ihm bei der Auffindung der Töne in ihren verschiedenen Lagen, in Dur und Moll, der Gebrauch der zu benutzenden Saite nicht immer abgeschnitten werden darf.

»Die folgenden Angaben enthalten alle Messungen, die ich vorgenommen habe, wobei ich noch bemerke, dass der Zoll auf dem Maassstabe in 8 gleiche Theile getheilt war. Ich hätte gern bei der Messung noch mehrere Wiederholungen vorgenommen, allein ich scheute mich, die Güte des Herrn Meyer noch mehr in Anspruch zu nehmen, da die vorgenommenen Messungen circa zwei Stunden erforderten.

| Länge der *G*-saite | $A$ | $H$ | $H^b$ | $A^b$ | $G^\sharp$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 45 Zoll | $5\frac{3}{16}''$ | $9\frac{4}{8}''$ | $7\frac{1}{8}''$ | $2\frac{1}{8}''$ | $3''$ |
| 45 | 5 | $9\frac{3}{8}$ | 7 | $2\frac{1}{8}$ | $2\frac{7}{8}$ |
| $45\frac{1}{8}$ | $5\frac{1}{8}$ | $9\frac{3}{8}$ | $7\frac{3}{8}$ | $2\frac{3}{8}$ | 3 |
| 45 | $5\frac{1}{16}$ | $9\frac{3}{8}$ | $7\frac{1}{8}$ | | |
| 45 | 5 | | | | |
| 45 | | | | | |

Die dritte Messung der *G*-saite scheint mir mangelhaft, jedoch musste ich sie Ihnen mittheilen. Nehme ich 45″ als genaue Länge der *G*-saite, so erhalte ich nach dem reinen Quintensystem für

$$A = 5'', \quad H = 9''\,5''',3\,, \quad H^b = 7''\,0''',4\,, \quad A^b = 2''\,3''',4\,, \quad G^\sharp = 2''\,10''',3.$$

Sie sehen aus diesen Zusammenstellungen, dass die Messung entschieden günstig für das Quintensystem ausgefallen, wobei die grösste Abweichung von der Berechnung die kleine Terz trifft, die etwas über $1\frac{1}{2}$ Linien beträgt.

»So scheint denn auch die Praxis im Spiel auf den Saiten- (Streich-) Instrumenten für die Theorie des reinen Quintensystems zu sprechen. Oder sollte die Praxis an verschiedenen Orten so verschieden sein, dass man verschiedene Schulen unterscheiden müsste? Dann würde doch wohl nichts weiter übrig bleiben, als denjenigen Schulen den Vorzug einzuräumen, die in ihrem Spiele dem Quintensystem folgen, da diese die

Theorie für sich haben. Dass Herr Meyer ein tüchtiger Musiker ist und namentlich die Bassgeige, die doch bei einem Concert von blossen Streichinstrumenten maassgebend ist, vorzüglich zu behandeln versteht, wird hier Niemand in Abrede stellen können.«

Ich erläutere diese werthvollen Resultate, welche Herr D. Möhring gewonnen hat, und die, wie mich dünkt, auf Jeden den Eindruck der vollen Zuverlässigkeit machen müssen, noch durch einige Berechnungen, welche, wie ich glaube, noch mehr klar machen werden, von welcher entscheidenden Bedeutung sie sind. Als die Differenzen zwischen der Saitenlänge von $G$ und den Saitenlängen von $A^b$, $G^\sharp$, $A$, $H^b$, $H$ ergeben sich im Mittel aus den obigen Messungen für

$$G-A^b,\quad G-G^\sharp,\quad G-A,\quad G-H^b,\quad G-H$$
$$27''',5\qquad 35''',5\qquad 60''',9\qquad 86''',25\qquad 112''',8$$

Nimmt man nun mit Dr. M. die Länge der $G$-saite $= 45'' = 540'''$ an, so erhält man mittels der aus Art. 12 folgenden Formel

$$x' - x = \frac{\lg \frac{l}{l'}}{\lg 2}$$

die Intervalle zwischen $G$ und $A^b$, $G^\sharp$, $A$, $H^b$, $H$, wenn man $l = 540$ und der Reihe nach $l' = l - 27,5 = 512,5$; $l' = l - 35,5 = 504,5$; $l' = l - 60,9 = 479,1$; $l' = l - 86,25 = 453,75$; $l' = l - 112,8 = 427,2$ setzt. Hieraus ergiebt sich folgende Tabelle, in welcher die zweite Columne die Grösse des Intervalls nach der Messung, die dritte nach dem Quintensystem, die vierte die Abweichung von dem letzteren in Theilen des grossen ganzen Tons enthält.

| Intervall | nach Messung | nach d. Quintsyst. | Abweichung |
|---|---|---|---|
| $G - A^b$ | 0,07541 | 0,07519 | $+\frac{1}{772}$ g. T. |
| $G - G^\sharp$ | 0,09811 | 0,09474 | $+\frac{1}{50}$ „ |
| $G - A$ | 0,17262 | 0,16992 | $+\frac{1}{63}$ „ |
| $G - H^b$ | 0,25106 | 0,24511 | $+\frac{1}{28}$ „ |
| $G - H$ | 0,33804 | 0,33985 | $-\frac{1}{94}$ „ |

Man bemerkt hier eine, wiewohl sehr schwache Tendenz, sowohl die kleine Terz der reinen 0,26303 als die grosse der reinen 0,32193 etwas näher zu bringen. Doch liegt die gemessene kleine Terz unter der reinen immer noch um $\frac{1}{14,2}$ g. T., weicht also von ihr doppelt so stark ab als von der des Quintensystems, indess die gemessene grosse Terz um $\frac{1}{10,6}$ g. T. über der reinen liegt, also fast neunmal so viel von ihr abweicht als von der des Quintensystems.

Noch schlagender dürfte Folgendes sein. Aus der obigen Formel ergiebt sich,

wenn man $2^{x'-x} = y'$ setzt, wo $y'$ die relative Schwingungszahl der Töne über $G$ in Bezug auf dieses ist,

$$l' = \frac{l}{y'},$$

eine Formel, die auch schon von selbst klar ist. Setzt man nun für $y'$ successiv die Werthe, die $A^b$, $G^\sharp$, $A$, $H^b$, $H$ sowohl nach dem Quintensystem als nach dem französischen haben, so erhält man die folgende Tabelle, in der die dritte Columne ganz mit der Berechnung des Dr. M. übereinstimmt, die drei letzten die von ihm gemessenen Werthe von $l'$ enthalten.

| Intervall | Quintensystem | | Französ. System | | Messung | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $y'$ | $l'$ | $y'$ | $l'$ | Maximum | Minimum | Mittel |
| $G - A^b$ | $\frac{256}{243}$ | 512,58 | $\frac{16}{15}$ | 506,25 | 514,5 | 510,0 | 512,5 |
| $G - G^\sharp$ | $\frac{2187}{2048}$ | 505,68 | $\frac{25}{24}$ | 518,39 | 505,5 | 504,0 | 504,5 |
| $G - A$ | $\frac{9}{8}$ | 480,00 | $\frac{10}{9}$ | 486,00 | 480,0 | 477,75 | 479,1 |
| $G - H^b$ | $\frac{32}{27}$ | 455,62 | $\frac{6}{5}$ | 450,00 | 456,0 | 451,5 | 453,75 |
| $G - H$ | $\frac{81}{64}$ | 426,67 | $\frac{5}{4}$ | 432,00 | 427,5 | 426,0 | 427,2 |

Im deutschen System und dem Delezenne's ist das Intervall $G - H^b$, wie im Quintensystem, durch $\frac{32}{27}$ bestimmt. Man sieht hier auf einen Blick, wie genau das Quintensystem mit der Messung zusammentrifft, und wie stark die andern Systeme davon abweichen. Beiläufig zeigt sich aber auch, dass die von Herrn D. Möhring (vgl. Art. 6) befürwortete grosse Secunde $\frac{10}{9}$ durch seine eigne Messung nicht bestätigt wird.

Ich füge endlich noch folgende Bemerkungen aus einem Briefe des Herrn D. Möhring bei: »In Bezug auf das Quintensystem erlaube ich mir, Ihnen noch einen kleinen, ganz einfachen, wie mir aber scheint, schlagenden Beweis mitzutheilen, dass die Streichinstrumente, eben weil sie nach Quinten eingestimmt werden, auch der Scala des Quintensystems für die beiden Terzen $c - e$, $a - \bar{c}$ sich bedienen müssen. Nehmen wir z. B. an, dass beim Orchester die Bratsche und die beiden Violinen folgende Noten neben einander zu spielen hätten:

| Bratsche, | zweite Violine, | erste Violine, |
|---|---|---|
| $c$ | $\bar{\bar{c}}$ | $\bar{\bar{e}}$ |

(wobei die Blasinstrumente die Doppeloctave zwischen dem $c$ der Bratsche und dem $\bar{\bar{c}}$ der zweiten Violine ausfüllen mögen), so ist doch klar, dass, da die Töne auf der Bratsche und ersten Violine durch blosses Anstreichen der nach Quinten eingestimmten Saiten hervorgebracht werden, während dass $\bar{\bar{c}}$ auf der zweiten Violine durch den richtigen Griff auf der $a$-Saite hervorzubringen ist, dieses $\bar{\bar{c}}$ offenbar mit dem $c$ auf der

Bratsche harmoniren muss, da eine fehlerhafte Octave unser Ohr ohne Frage am empfindlichsten berühren würde. Sind nun die Quinten auf der Bratsche und den Violinen rein eingestimmt, und ist $\overline{\overline{c}}$ als reine Doppeloctave zu c gegriffen, so muss $\overline{\overline{c}} : \overline{\overline{e}} = 64 : 81$ sein. Für die Bestimmung der kleinen Terz möchte sich in ähnlicher Weise folgende Zusammenstellung eignen:

| Bratsche, | zweite Violine, | erste Violine. |
|---|---|---|
| $c$ | $\overline{a}$ | $\overline{\overline{c}}$ |

Dieser Beweis enthält freilich für Sie nichts Neues und ist dazu ein specieller, könnte aber vielleicht zu Anfang, bei der Begründung der Scala nach dem Quintensystem, benutzt werden, um die gangbare Ansicht von den relativen Schwingungszahlen der beiden Terzen $\frac{5}{4}$ und $\frac{6}{5}$ in Bezug auf die Streichinstrumente zu erschüttern, und möchte sich zur Ueberzeugung derjenigen Musiker empfehlen, die nicht alles wissenschaftlichen Sinnes baar sind.«

**VIERTER BAND**: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Zweiter Band. Mit 19 Tafeln. 1855. Preis 6 Thlr. 20 Ngr.

Inhalt:

M. W. DROBISCH, über musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 1 Thlr.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit XVIII Tafeln. 1852. 1 Thlr. 10 Ngr.

P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 1 Thlr.

——— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2 + r'^2 - 2rr'$ (cos $U$ cos $U'$ + sin $U$ sin $U'$ cos $J$). 1854. 1 Thlr.

O. SCHLÖMILCH, über die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 8 Ngr.

——— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 16 Ngr.

P. A. HANSEN, die Theorie des Aequatoreals. 1855. 24 Ngr.

C. F. NAUMANN, über die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 10 Ngr.

A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. 1855. 20 Ngr.

**FÜNFTER BAND**: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Dritter Band.

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musikalischen Tonverhältnisse. 1855. 12 Ngr.

---

# SITZUNGSBERICHTE.

## KLEINERE ABHANDLUNGEN.

**BERICHTE** über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Erster Band. Aus den Jahren 1846 und 1847. Mit Kupfern. gr. 8. 12 Hefte.

——— Zweiter Band. Aus dem Jahre 1848. Mit Kupfern. gr. 8. 6 Hefte.

Vom Jahre 1849 an sind die Berichte der beiden Classen getrennt erschienen.

——— Mathematisch-physische Classe. 1849, 3 Hefte. 1850, 3 Hefte. 1851, 2 Hefte. 1852, 2 Hefte. 1853, 3 Hefte. 1854, 3 Hefte.

——— Philologisch-historische Classe. 1849, 5 Hefte. 1850, 4 Hefte. 1851, 5 Hfte. 1852, 4 Hfte. 1853, 5 Hfte. 1854, 6 Hfte. 1855, 1. 2. Heft.

Jedes Heft der Berichte ist einzeln zu dem Preise von 10 Ngr. zu haben.

*Leipzig*, *August* 1855.

S. Hirzel.

# SCHRIFTEN

DER

## FÜRSTLICH-JABLONOWSKISCHEN GESELLSCHAFT

ZU LEIPZIG.

---

**ABHANDLUNGEN** bei Begründung der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtsfeier Leibnizens herausgegeben von der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft. Mit dem Bildnisse von Leibniz in Medaillon und zahlreichen Holzschnitten und Kupfertafeln. 61 Bogen in hoch 4. 1846. broch. Preis 5 Thlr.

Inhalt:

W. WACHSMUTH, Briefe von Leibniz an Christian Philipp.

A. F. MÖBIUS, Ueber eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik. Mit einer Tafel. (Einzeln 16 Ngr.)

M. W. DROBISCH, Ueber die mathematische Bestimmung der musikalischen Intervalle. (Einzeln 12½ Ngr.)

A. SEEBECK, Ueber die Schwingungen der Saiten. (Einzeln 10 Ngr.)

C. F. NAUMANN, Ueber die Spiralen der Conchylien. (Einzeln 16 Ngr.)

F. REICH, Elektrische Versuche. (Einzeln 7½ Ngr.)

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen. Mit Holzschnitten. (Einzeln 1 Thlr.)

E. H. WEBER, Zusätze zur Lehre vom Baue und den Verrichtungen der Geschlechtsorgane. Mit 9 Kupfertafeln. (Einzeln 1 Thlr. 10 Ngr.)

C. G. LEHMANN, Beiträge zur Kenntniss des Verhaltens der Kohlensäureexhalation unter verschiedenen physiologischen und pathologischen Verhältnissen. (Einzeln 10 Ngr.)

**PREISSCHRIFTEN** gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft.

1. H. GRASSMANN, Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Characteristik. Mit einer erläuternden Abhandlung von *A. F. Möbius*. hoch 4. 1847. 20 Ngr.
2. H. B. GEINITZ, das Quadergebirge oder die Kreideformation in Sachsen, mit Berücksichtigung der glaukonitreichen Schichten. Mit 1 color. Tafel. hoch 4. 1850. 16 Ngr.
3. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die Mondfinsternisse des Almagest. hoch 4. 1851. 10 Ngr.
4. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die wichtigeren Finsternisse, welche von den Schriftstellern des classischen Alterthums erwähnt werden. hoch 4. 1853. 20 Ngr.
5. H. B. GEINITZ, Darstellung der Flora des Hainichen-Ebersdorfer und des Flöhaer Kohlenbassins. hoch 4. Mit 14 Kupfertafeln in gr. Folio. 1854. 8 Thlr.

*Leipzig.* **S. Hirzel.**

---

Ferner ist bei mir erschienen:

**WIETERSHEIM**, E. von, Gedächtnissrede auf Seine Majestät Friedrich August, König von Sachsen, gehalten in der öffentlichen Sitzung der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften am 27. Oct. 1854. hoch 4. broch. 10 Ngr.

**S. Hirzel.**

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

AUSEINANDERSETZUNG

EINER ZWECKMÄSSIGEN METHODE

ZUR

# BERECHNUNG DER ABSOLUTEN STÖRUNGEN

DER KLEINEN PLANETEN.

VON

P. A. HANSEN.

---

ERSTE ABHANDLUNG.

Man hat zuweilen bei Erwähnung des Problems der drei Körper die Bemerkung hinzugefügt, dass dasselbe noch nicht vollständig gelöst sei, ohne zugleich anzugeben, was denn in Bezug auf die Lösung desselben noch zu thun übrig ist; es möchte daher nicht undienlich sein den Standpunkt, auf welchem sich dieselbe gegenwärtig befindet, näher zu erörtern. Ich bemerke hiefür zuerst, dass die Benennung „Problem der drei Körper" ursprünglich speciell nur auf die Ermittelung der Bewegung des Mondes und der Sonne in Bezug auf die Erde angewandt wurde, dass man aber in späterer Zeit und gegenwärtig noch oft darunter die Ermittelung der Bewegungen einer beliebigen Anzahl von frei schwebenden Körpern versteht, die sich gegenseitig im graden Verhältniss ihrer Massen, und im umgekehrten Verhältniss der Quadrate ihrer Entfermungen von einander anziehen.

Wenn man dieses Problem ohne irgend eine Beschränkung betrachtet, dann ist dessen Auflösung freilich noch nicht sehr weit gediehen, es kommt aber auch in dieser Ausdehnung, so viel wir bis jetzt wissen, in der Natur nicht vor, ja es ist nicht unmöglich, dass es gar nicht dauernd vorkommen kann, weil den Bewegungen eines solchen Systems von Körpern die Stabilität mangeln würde. Wenn die Zahl der sich gegenseitig anziehenden Körper $n$ ist, so beruht die Auflösung dieses Problems auf der Integration von $3\,n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung, und verlangt also die Ausführung von $6\,n$ Integrationen. Von diesen kann man seit langer Zeit zehn ausführen, aber alle Bemühungen, die man angewandt hat, um mehrere zu finden, sind bis jetzt ohne Erfolg gewesen. Zwar sind Fälle vorgekommen, wo der eine oder andere gemeint hat, ein eilftes Integral gefunden zu haben, es hat sich aber immer gezeigt, dass nur eine neue Transformation der vorher bekannten

zehn Integrale erlangt worden war. Diese zehn Integrale reichen zur vollständigen Lösung des Problems nicht einmal hin, wenn man auch die Zahl der Körper auf drei beschränkt, indem hiefür 18 Integrationen erforderlich sind, und also noch acht auszuführen übrig bleiben.

Die Mechanik zerlegt die Bewegungen der Körper irgend eines Systems in drei verschiedene Gattungen von Bewegungen, wodurch diese anschaulich und der mathematischen Behandlung möglichst zugänglich gemacht werden. Sie sondert die fortschreitende Bewegung des ganzen Systems im Raume von den gegenseitigen Bewegungen der Körper in Bezug auf einander, und diese wieder von der Rotationsbewegung jedes einzelnen Körper um eine in demselben gedachte veränderliche Achse ab. Sehen wir hier die Körper des Systems als materielle Punkte ohne Ausdehnung an, so fällt die zuletzt genannte Bewegung weg, und es handelt sich nur um die beiden erstgenannten. Von den oben genannten zehn ausgeführten Integrationen beziehen sich sechs auf die fortschreitende Bewegung des ganzen Systems, und da diese überhaupt nur die Integration von drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, also nur sechs Integrationen verlangt, so ist sie vollständig bekannt. Der Satz, welcher sich aus diesen Integralen ergiebt, lautet, dass der gemeinschaftliche Schwerpunkt des ganzen Systems von Körpern sich im Raume in grader Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt. Zieht man diese drei Differentialgleichungen von den oben genannten $3n$ ab, so bleiben $3(n-1)$ übrig, und es sind also $6(n-1)$ Integrationen auszuführen, die die relative Bewegung der Körper, entweder in Bezug auf den gemeinschaftlichen Schwerpunkt aller, oder in Bezug auf einen derselben geben. Von diesen Integrationen sind nur vier gegeben, von welchen das eine sich auf die Erhaltung der lebendigen Kraft des Systems, und die drei andern auf die Erhaltung der von den Radien beschriebenen Flächen beziehen.

Nehmen wir wieder an, dass das ganze System nur aus drei Körpern bestehe, so sind zur Ermittelung der gegenseitigen Bewegungen zwölf Integrationen auszuführen, wovon wieder wie oben acht noch nicht vorhanden sind. Selbst wenn man bei der Annahme von nur drei Körpern die Beschränkung einführt, dass sie sich in Einer und derselben Ebene bewegen, reichen die vorhandenen Integrale nicht aus, denn von den auszuführenden Integrationen fallen alsdann vier weg, so dass acht

übrig bleiben, während von den gegebenen zwei wegfallen; es fehlen mithin immer noch sechs Integrale.

Die Annahme, dass die zwei Körper sich in Einer und derselben Ebene um den dritten bewegen, findet bis auf Weniges bei dem Monde und der Sonne in Bezug auf die Erde statt, und in dieser Aufgabe tritt ausserdem noch der Umstand ein, dass die Wirkung des Mondes auf die relative Bewegung der Sonne sehr gering ist. Übergeht man diese, so werden die Sonnencoordinaten gegebene Functionen der Zeit, und durch Einführung dieser neuen Beschränkung fallen wieder vier Integrationen weg, so dass im Ganzen nur vier auszuführen übrig bleiben, wogegen nur zwei gegeben sind, so dass auch dieses Problem, wenn in demselben nicht noch mehr Beschränkungen stattfänden, auch als ungelöst betrachtet werden müsste.

Nachdem wir hiemit die Umstände erörtert haben, unter welchen das in Rede stehende Problem noch nicht gelöst worden ist, kommen wir auf diejenigen, in welchen die Lösung vorhanden ist. Zuvörderst ist zu bemerken, dass unter gewissen sich auf die ursprüngliche Lage und Geschwindigkeit sich erstreckenden Bedingungen die Ermittelung der Bewegungen eines Systems von drei oder mehreren Körpern, das heisst die Ausführung aller dafür erforderlichen Integrationen gelungen ist. Es gehören unter andern hiezu die Bedingungen, dass die Körper sich entweder in grader Linie befinden, oder mit einander ein bestimmtes Vieleck bilden. Die Forderungen, die diese gelösten Fälle des allgemeinen Problems verlangen, sind indess zu abstract, als dass man annehmen könnte, sie wären in der Natur vorhanden, zumal da die Bewegungen, die auf solcher Grundlage beruhen, gemeiniglich so wenig stabil sind, dass sie von den geringsten ausserdem hinzukommenden Kräften zerstört werden müssen.

Beschränkt man die Zahl der Körper des Systems auf zwei, so ist die vollständige und allgemeine Auflösung erlangt. Die Zahl der hiefür auszuführenden Integrationen ist ursprünglich sechs, da man aber im Voraus einsehen kann, dass die Bewegung dieser Körper in einer Ebene vor sich gehen muss, so kann man sogleich die Coordinaten derselben auf diese Ebene beziehen, wodurch die Zahl der erforderlichen Integrationen auf vier herabsteigt. Nun ist zwar die Zahl der allgemein erhaltenen, eben angeführten Integrationen hier nur zwei, allein in diesem Falle vereinfachen sich die Differentialgleichungen der Bewegung

so, dass man die übrigen zwei Integrationen leicht erhalten kann. Das Problem der zwei Körper ist also vollständig gelöst, und das Resultat der Auflösung besteht in folgenden Sätzen. Der eine Körper beschreibt um den andern vermöge einer Centralkraft, die der Summe der beiden Massen proportional ist, einen Kegelschnitt, und diese Bewegung geschieht so, dass die von dem Radius Vector beschriebenen Flächen der Zeit, in welcher sie beschrieben werden, proportional sind. Betrachtet man mehrere Körper, die, ohne einander gegenseitig anzuziehen, Einen Körper des Systems nach dem Eingangs genannten Gesetz anziehen und von diesem wieder angezogen werden, so finden für die Bewegung eines jeden dieser Körper um diesen letztgenannten die beiden eben genannten Gesetze statt, und man erhält ausserdem noch ein drittes Gesetz, zufolge welches die Quadrate der Verhältnisse der Flächen zur Zeit sich zu einander verhalten, wie die Producte aus den Parametern der beschriebenen Kegelschnitte in die Aggregate der beiden bezüglichen Massen.

Dieses sind mit geringer Modification die drei Gesetze, die Keppler mehr wie ein halbes Jahrhundert vor Newton entdeckte, welchem wir die Entdeckung des oben genannten allgemeinen Gravitationsgesetzes verdanken, aus welchem jene Gesetze eine einfache Folge sind.

Im Vorhergehenden habe ich den Zustand beschrieben, in welchem sich die Auflösung des Problems der drei Körper befindet, wenn man die Intensität der Kräfte, vermöge welcher die Körper auf einander einwirken, beliebig annimmt, und komme nun zu dem Falle, in welchem über die Beschaffenheit dieser Kräfte die Annahme eingeführt wird, dass eine derselben mit weit grösserer Intensität auf die Bewegungen einwirkt, wie alle die übrigen; ein Umstand, welcher in unserm Sonnensystem allenthalben stattfindet, und von welchem wir auch ausserhalb desselben bis jetzt noch keine Ausnahme kennen. In diesem Falle kann man gegenwärtig das Problem, wenn auch nur durch mehrere auf einander folgende Näherungen, lösen, und die Bewegungen aller Körper des Systems ermitteln.

Wenn alle vorhandenen Kräfte gegen Eine derselben klein sind, so ist es klar, dass alle Körper sich um den Einen, welcher die grosse Kraft ausübt, nahe so bewegen müssen, als fände die gegenseitige Anziehung jener nicht statt, dass mithin die Bewegungen um den letzteren, den Centralkörper, nahe den eben angeführten Kepplerschen Ge-

setzen folgen müssen. Die von den wahren Bewegungen stattfindenden Abweichungen, welche man die Störungen der Bewegung nennt, kann man nun durch unendliche Reihen ausdrücken, die nach den ganzen und positiven Potenzen und Producten der Verhältnisse der kleinen Kräfte zur grossen Kraft fortschreiten. Man sucht zuerst die Glieder, die von den ersten Potenzen dieser Verhältnisse, die die störenden Kräfte genannt werden, abhängen, dann diejenigen, die von den Quadraten und Producten zweiter Dimensionen derselben abhängen u. s. w. Die hiefür erforderlichen Integrationen können auf Quadraturen hingeführt werden, und sind daher immer entweder mechanisch oder analytisch zu erlangen. In vielen in unserm Sonnensystem vorkommenden Fällen sind die störenden Kräfte so klein, dass man mit der Berücksichtigung der ersten Potenzen derselben vollständig ausreicht; ausserdem kommen aber auch Fälle vor, wo nothwendig auf die Quadrate und Producte der störenden Kräfte Rücksicht genommen werden muss, um ein dem Stande der heutigen Beobachtungskunst angemessen genaues Resultat zu erhalten. Der Fälle, wo man weiter gehen muss, giebt es nur wenige, und es gehört darunter vorzüglich die Mondbewegung. In meiner Berechnung der Mondstörungen kommen einige Glieder vor, die vom Biquadrat der störenden Kraft der Sonne abhängen.

Die Kleinheit einer störenden Kraft bedingt nicht nothwendig die Kleinheit der Masse, in welcher sie ihren Sitz hat, denn da die anziehende Kraft überhaupt die Masse dividirt durch das Quadrat ihrer Entfernung vom angezogenen Körper zum Ausdruck hat, so ist klar, dass man zu jeder gegebenen Masse sich so grosse Entfernungen von den andern Körpern des Systems denken kann, dass die Kraft, die diese Masse auf die übrigen ausübt, beliebig klein wird. Nehmen wir, um dieses klar zu machen, zuerst ein System von drei Körpern an, deren Massen Grössen von einer und derselben Ordnung sind. Betrachten wir zuerst zwei dieser Körper, so würden diese, wenn der dritte nicht vorhanden wäre, um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt in gleichen Zeiten ähnliche Kegelschnitte — oder einer in Bezug auf den andern einen Kegelschnitt — beschreiben, wofür ich hier der Übersichtlichkeit wegen Ellipsen annehmen will. Denken wir uns nun den dritten Körper in einer so grossen Entfernung, dass der Unterschied der Kräfte, mit welchen er auf die beiden andern Körper einwirkt, im Verhältniss zu der Kraft, mit welcher diese einander gegenseitig anziehen, als eine

kleine Grösse erster Ordnung angesehen werden kann, und nehmen zugleich die Geschwindigkeit dieses dritten Körpers so an, dass seine Entfernung von den beiden andern nie so klein werden kann, dass man das genannte Verhältniss der Kräfte nicht mehr für eine kleine Grösse erster Ordnung halten dürfte, so wird er die Bewegungen der beiden andern nur wenig ändern, oder stören, und er selbst wird sich um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der letzteren nahe in einem Kegelschnitt bewegen, wofür hier wieder eine Ellipse angenommen werden darf. Die Abweichungen der Bewegungen dieser drei Körper von den Bewegungen in Ellipsen können wieder durch convergirende, nach den Potenzen und Producten der störenden Kräfte fortschreitende Reihen ausgedrückt und vollständig berechnet werden. Denken wir uns einen vierten Körper von beliebiger Masse hinzu, so können wir immer seine Entfernung und Geschwindigkeit wieder so annehmen, dass die Unterschiede der Kräfte, die er auf die andern drei ausübt, im Verhältniss zu denen, mit welchen diese auf einander einwirken, kleine Grössen der ersten Ordnung sind und bleiben, und folglich muss er nahe einen Kegelschnitt um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der drei andern beschreiben, und die Abweichungen der Bewegungen dieser vier Körper von den Bewegungen in Kegelschnitten kann wieder so genau wie man will berechnet werden. Man kann diese Betrachtungen beliebig fortsetzen, und ein so geordnetes System kann aus einer beliebigen Anzahl von Körpern bestehen. Ich habe hiemit zeigen wollen, dass es einen ausgedehnten Fall giebt, in welchem man das Problem der drei Körper vollständig lösen kann, obgleich die Massen aller Körper des Systems Grössen einer und derselben Ordnung sind, und um kurz zu recapituliren, dieser Fall ist derjenige, in welchem die gegenseitigen Entfernungen der Körper so beschaffen sind, dass alle vorhandenen Anziehungskräfte im Verhältniss zu einer derselben als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet werden können. Unser Sonnensystem zeigt uns in den darin vorkommenden Satellitensystemen Fälle, in welchen vermöge der grossen Entfernung die mehr wie tausend Mal grössere Sonnenmasse in Bezug auf die Planetenmassen nur als störende Kraft auftritt, und die elliptische Bewegung der Satelliten um ihren Planeten nur wenig stören kann.

Denken wir uns nun ein System von Körpern, in welchem alle Massen im Verhältniss zu einer derselben sehr kleine Grössen sind, so

sind für die Lösbarkeit des Problems die Verhältnisse der Entfernungen der Körper von einander weit geringeren Beschränkungen unterworfen, wie im eben betrachteten Falle, allein man darf sie demungeachtet nicht beliebig annehmen. Denn es ist klar, dass, wie klein auch zwei Massen sind, immer eine Entfernung derselben von einander gedacht werden kann, in welcher die Kraft, die sie auf einander ausüben, von derselben Ordnung wird wie die Kraft, die die grosse Masse auf sie ausübt. Ja man kann sogar sich diese Entfernung so klein denken, dass die Kraft, welche die grosse Masse ausübt, im Verhältniss zur Kraft, mit welcher die beiden kleinen Massen auf einander wirken, eine beliebig kleine Grösse wird. Hieraus folgt, dass selbst in dem Falle, wo eine Masse des Systems die andere beliebig an Grösse überragt, die Anordnung des Systems keine beliebige sein darf, wenn das Problem in allen Theilen lösbar sein soll. Dieser zuletzt betrachtete Fall bedarf einer weiteren Auseinandersetzung. Wenn vermöge der Richtung der Geschwindigkeiten die Entfernung zweier der kleineren Massen des Systems von einander so klein geworden ist, dass die gegenseitige Anziehungskraft derselben so gross geworden ist, dass der Unterschied der Kräfte, mit welchen die grosse Masse des Systems auf diese beiden Massen wirkt, dagegen in eine kleine Grösse erster Ordnung übergegangen ist, so ist das Problem wieder lösbar. Man braucht nur die eine der beiden kleinen Massen als Hauptmasse und die Kraft, die die grosse Masse ausübt, als störende Kraft zu betrachten. Wenn also das System von Körpern, von welchem jetzt die Rede ist, von dem ersten Stadium, in welchem die grosse Masse allenthalben die Hauptkraft ausübte, in das zweite Stadium übergegangen ist, in welchem eine der kleineren Massen in Bezug auf eine andere derselben die Hauptkraft ausübt, so ist das Problem wieder lösbar. Es kommt hiebei darauf an, ob es in den Übergangspunkten von dem einen Stadium zum andern lösbar ist, denn in diesen Punkten tritt der Fall ein, dass zwei der in dem System wirkenden Kräfte Grössen einer und derselben Ordnung werden. In sofern diese Übergangszeit kurz ist, ist das Problem wieder lösbar. Ein Beispiel davon haben wir zufolge der Méc. cél. am ersten Kometen von 1770, welcher zwei Mal, nemlich in den Jahren 1767 und 1779 dem Jupiter so nahe kam, dass die Anziehung, die dieser Planet auf ihn ausübte, als Hauptkraft betrachtet werden konnte.

Die allgemeine Form, die die Auflösung des in Rede stehenden Problems in den Fällen haben muss, die im Vorhergehenden als lösbar

bezeichnet worden sind, ist leicht anzugeben; man muss die Coordinaten der einzelnen Körper des Systems in Bezug auf den Körper desselben, welcher die Hauptkraft ausübt, in Function der Zeit darstellen. Die Coefficienten der in diesen Ausdrücken der Coordinaten vorkommenden Functionen der Zeit sind nothwendiger Weise Functionen der störenden Massen und der $6(n-1)$ Elemente der Kegelschnitte und ihrer gegenseitigen Lage, die die $n-1$ Körper des Systems um den Hauptkörper beschreiben würden, wenn die gegenseitigen Anziehungen jener Körper nicht vorhanden wären. Die analytische Entwickelung dieser Ausdrücke ist indess mit so ungeheuren Schwierigkeiten verbunden, und die Zahl der zu entwickelnden Glieder wächst so ungemein stark an, dass man sich genöthigt gesehen hat, davon im Allgemeinen abzustehen, und sie höchstens in den einfachsten Fällen auszuführen, in welchen die Excentricitäten, Neigungen und störenden Kräfte so klein sind, dass man mit den Gliedern der niedrigeren Ordnungen ausreicht. Unser Sonnensystem bietet in manchen seiner Theile Gelegenheit dar solche genäherte Ausdrücke der Coordinaten anwenden zu können, ohne der Genauigkeit allzu grossen Abbruch zu thun, und namentlich fand dieses früher, wo die astronomischen Instrumente weniger vollkommen und die Beobachtungskunst weniger ausgebildet war, mehr statt wie jetzt, wo in allen Theilen der Astronomie zufolge der Fortschritte derselben mehr Genauigkeit verlangt wird. Die unschätzbaren Arbeiten, die das vorige Jahrhundert für die Lösung dieses Problems lieferte, und worunter die von Laplace, die auch in das gegenwärtige Jahrhundert hineinragen, vorzugsweise zu nennen sind, beruhen mit Einer Ausnahme auf der ausführlichen analytitischen Entwickelung der einzelnen Störungsglieder. Die Ausnahme, der ich erwähnte, betrifft die Kometen und unter diesen namentlich den Halley'schen und den oben angeführten von 1770. Wegen der grossen Excentricitäten und Neigungen der Bahnen dieser Himmelskörper konnten die Entwickelungen nicht nach den Potenzen derselben geordnet werden, und man findet sogar Andeutungen, dass man eine Entwickelung und analytische Integration der Differentialgleichungen der Bewegung in Bezug auf solche Bahnen für unmöglich hielt. Die Fortschritte, welche die Mathematik unterdessen gemacht hatte, hatten auch auf die Methode der mechanischen Quadraturen geführt, und durch Anwendung dieser Methode sah sich schon Clairant in den Stand gesetzt, die Wiederkehr des Halley'schen Kometen im

Jahre 1759 mit wünschenswerther Genauigkeit vorausberechnen zu können. Seit der Erfindung der Methode der Variation der willkührlichen Constanten, dessen erste Spuren sich bei Euler vorfinden, dessen vollständige Ausbildung wir aber Lagrange verdanken, und nach der Entdeckung der ersten der kleinen Planeten, so wie mehrerer periodischer Kometen, ist die Methode der mechanischen Quadraturen häufig angewandt worden und wird noch oft angewandt. Sie ist in der That die nächste Methode, die sich in schwierigen Fällen darbietet, um wenigstens für die nächste Zeit die Bewegung eines Planeten oder Kometen im Voraus berechnen zu können. Unser grosser Gauss, der sich unter vielem Andern auch bei der Bahnbestimmung der neuen Planeten so sehr verdient gemacht hat, theilte seinen Schülern zur Fortsetzung der Berechnung des Laufes derselben Methoden mit, in welchen die Integrationen durch mechanische Quadraturen ausgeführt wurden, und setzte durch Mittheilung solcher Methoden bekanntlich auch Encke in den Stand die Bahn und den Lauf des nach ihm benannten periodischen Kometen berechnen zu können.

Indem ich von der Methode der mechanischen Quadraturen rede, darf ich eine wesentliche Erweiterung, die sie in den letzten Jahren erfahren hat, nicht mit Stillschweigen übergehen. Man wandte sie früher blos nur auf eigentliche Quadraturen an, bis zuerst von Bond in Cambridge V. St. gezeigt wurde, dass sie unmittelbar auf die Differentialgleichungen für die Störungen angewandt werden kann. Der Vortheil, den diese Entdeckung gewährt, besteht darin, dass die ganze Rechnung, wenn sie auf zweckmässige Differentialgleichungen gegründet wird, weit kürzer ausfällt, wie die, in welcher man übrigens nach der Methode der Veränderung der Elemente (der willkührlichen Constanten) verfährt. Um diesen Vortheil zu erlangen, sind die Störungen der rechtwinkligen Coordinaten, die Bond selbst und Encke, welcher diese Methode drei Jahre später unabhängig von Bond angab, anwenden, keineswegs geeignet, sondern es muss die Anwendung der Störungen der rechtwinkligen Coordinaten überhaupt als eine unzweckmässige bezeichnet werden. Nicht nur, dass die Zerlegung der Störungen nach drei auf einander rechtwinkligen Richtungen dieselben weit grösser erscheinen lässt, wie sie in der That sind; es sind die Gleichungen für diese Störungen unbehülflich in der numerischen Rechnung. Die Durchrechnung eines Beispiels zeigt auffallend, dass die Differential-

gleichungen, die ich in Nr. 799 und Nr. 882 der Astr. Nachr. gegeben habe, auf weit kürzere Rechnungen führen, wie die Differentialgleichungen für die Störungen der rechtwinkligen Coordinaten. Auch ist vermöge der Coordinaten, die ich gewählt habe, der Betrag der Störungen selbst auf sein Minimum zurückgeführt, indem die grossen Störungsglieder, die aus einer nahe stattfindenden Commensurabilität der mittleren Bewegungen entstehen, nur in Einer dieser Coordinaten (der mittleren Länge) entstehen können. Die Zurückführung der Störungen auf ihren geringsten Betrag ist aber deshalb von grosser Wichtigkeit, weil dadurch die Nothwendigkeit der Berücksichtigung der höheren Potenzen der störenden Kräfte auf möglichst lange Zeit hinausgeschoben wird. Encke hat diese Vortheile schon in den Astr. Nachr. B. 34. *pag.* 356 anerkannt.

Gehen wir nach dieser Digression über die Ermittelung der Störungen durch mechanische Quadraturen zur Darstellung derselben in Function der Zeit über. Alle Versuche, die man gemacht hat, in dieser Darstellung für die Glieder der höheren Ordnungen allgemeine und vollständig entwickelte analytische Ausdrücke zu geben, haben nicht zu diesem Ziele geführt, sondern nur auf die speciellen Fälle, die man bei der Entwickelung vor Augen hatte, angewandt werden können. Die Umstände, die die verschiedenen Fälle mit sich führen, sind so mannigfaltig, dass viele Glieder, deren numerischer Werth in einigen Fällen sehr gross wird, in anderen Fällen unmerklich sind. Die Coefficienten, womit in den verschiedenen Gliedern die Potenzen der Excentricitäten und Neigungen multiplicirt werden müssen, sind so beschaffen, dass selbst bei kleinen numerischen Werthen dieser Potenzen oft die Glieder der höheren Ordnungen grösser werden, wie die der niedrigeren Ordnungen. Unter diesen Umständen habe ich schon vor langer Zeit an ein anderes, an die Stelle dieser analytischen Entwickelung zu setzendes zweckmässiges Verfahren gedacht, und dieses darin gefunden, dass ich auf einige wenige Grundformeln die numerische Berechnung sofort, und ohne weitere analytische Entwickelungen zu Hülfe zu nehmen, anwandte. Dieses Verfahren kommt in seinem wesentlichsten Theile darauf hinaus, dass man eine Anzahl von unendlichen convergirenden Reihen, die nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen gewisser Kreisbögen geordnet sind, und deren Coefficienten numerisch gegeben sind, je zwei numerisch mit einander multiplicirt. Dieses Verfahren, von welchem ich

keine frühere Spur in der astronomischen oder mathematischen Literatur aufgefunden habe, publicirte ich zuerst in meiner Berliner Preisschrift vom Jahre 1830,[1]) und habe es in dieser Abhandlung nicht nur ausführlich erklärt, sondern in grösster Ausdehnung auf die Berechnung der gegenseitigen Störungen erster Ordnung in Bezug auf die Massen des Jupiters und Saturns, so wie auf die von den Quadraten und Producten dieser beiden Massen in der Bewegung des Saturns erzeugten Störungen angewandt. In meinen späteren Störungsrechnungen, sowohl in den schon veröffentlichten, wie in denen, die noch nicht zur Öffentlichkeit gelangt sind, worunter ich vorzüglich die Mondstörungen meine, habe ich dasselbe Verfahren angewandt, da ich es für das einzige halten muss, durch welches man so beträchtliche Störungen, wie die sind, die die genannten Himmelskörper erleiden, mit der heutigen Tages erforderlichen Genauigkeit berechnen kann. In der vorliegenden Abhandlung werde ich dieses Verfahren auf die Störungen der Egeria, die auch nicht unbeträchtlich sind, anwenden.

Mit diesem Verfahren der „mechanischen Multiplicationen," wie ich es nennen will, ist die Sache aber noch keineswegs abgemacht, denn für den günstigen Erfolg kommt es sehr darauf an, auf welche Grundformeln man es anwendet. Zunächst stellen sich die Ausdrücke, die die Methode der Veränderung der willkührlichen Constanten, hier der elliptischen Elemente, gewährt, der Betrachtung dar. Durch diese Methode erhält man bekanntlich osculirende Elemente, die verbunden mit den Gleichungen für die Bewegung im Kegelschnitt in jedem Zeitpunkt den Ort und die Geschwindigkeit des gestörten Planeten darstellen. Diese Elemente hängen von Differentialgleichungen erster Ordnung ab, die so beschaffen sind, dass man bei kleinen störenden Kräften sie unmittelbar durch Näherungen, die sich auf die verschiedenen Potenzen dieser Kräfte beziehen, integriren kann. So schön diese Theorie an sich ist, und so sehr sie den ersten Entwickelungen Einfachheit und Eleganz zu verleihen im Stande ist, so wenig ist sie für die wirkliche Berechnung der Störungen die geeigneteste. Sie führt nemlich die Unbequemlichkeit

1) Der Titel dieser Abhandlung, die als besonderes Werk gedruckt worden ist, ist folgender: Untersuchung über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns. Von P. A. Hansen, Professor und Director der Ernestinischen Sternwarte Seeberg. Eine von der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 8. Juli 1830 gekrönte Preisschrift. Berlin, gedruckt in der Akademischen Druckerei. 1831.

mit sich, dass sie die Störungen im Allgemeinen weit grösser erscheinen lässt, wie sie in der That sind, indem beim Übergange von den Störungen der Elemente zu den Störungen zweckmässig gewählter Coordinaten fast alle Störungsglieder sich wesentlich verkleinern, sie führt mühsam zu berechnende Glieder der höheren Ordnungen ein, die sich nachher fast ganz aufheben, und deren Berechnung daher eine vergebliche Arbeit ist. Die unmittelbare Berechnung der Störungen von zweckmässig gewählten Coordinaten ist daher immer das Vortheilhafteste, und die Wahl der Coordinaten ist keinesweges gleichgültig; unter allen Gattungen von Coordinaten, die man wählen kann, gehören aber auch hier die rechtwinkligen zu den unzweckmässigsten, indem dadurch wieder die Störungen vergrössert erscheinen, und ausserdem in den Rechnungen kleine Differenzen von grossen Grössen und andere Verwickelungen vorkommen, die, abgesehen davon, dass sie die Arbeit vergrössern, stets die Genauigkeit des Resultats beeinträchtigen.

Auch die Störungen der wahren Länge und die entsprechenden des Radius Vectors sind nicht die geeignetesten, obgleich sie weniger Nachtheile darbieten, wie die der rechtwinkligen Coordinaten. Am geeignetesten sind jeden Falls die Störungen der mittleren Länge oder mittleren Anomalie und die entsprechenden des Logarithmus des Radius Vectors, letztere so genommen, dass das Hauptglied des Radius Vectors mit der durch die Störungen verbesserten Anomalie berechnet werden muss, und hiezu die Breite über der Bahnebene oder die senkrecht darauf stehende Coordinate. Es lässt sich leicht zeigen, dass unter sonstigen gleichen Umständen die Reihen, wodurch diese Störungen ausgedrückt werden, grössere Convergenz besitzen, wie die aller sonst bekannten Coordinaten; auch sind durch Anwendung dieser Coordinaten die Störungen auf ihren geringsten Betrag zurückgeführt, und es hängen blos die Störungen der mittleren Länge von einer doppelten Integration, die des Logarithmus des Radius Vectors und der Breite oder der senkrechten Coordinate aber nur von einfachen Integrationen ab. Es können daher die Glieder, die wegen des Quadrats eines kleinen Divisors, welches sie bekommen, sehr gross werden, nur in den Störungen der erstgenannten Coordinate, keinesweges aber in denen der beiden andern Coordinaten vorkommen.

Bei der Anwendung von Coordinaten überhaupt hat man immer die zwei derselben auf die Projection des Orts des Körpers auf eine feste

Ebene bezogen, und es scheint, dass dieses besonders in der in Rede stehenden Aufgabe nothwendig wird, da vermöge der Störungen die Bewegung nie in einer Ebene vor sich geht. Durch eine eigenthümliche Transformation der Coordinaten habe ich aber gezeigt, wie man immer die Längenstörungen in der Ebene benutzen kann, die durch zwei der Zeit nach auf einander folgende Radii Vectores gelegt wird. Die Integration, wodurch diese veränderliche Ebene bestimmt wird, habe ich auf eine Quadratur zurückgeführt.

Es ist endlich auch die Wahl der Functionen der Zeit, durch welche man die Störungen ausdrücken will, nicht gleichgültig; durch die mittlere Länge oder mittlere Anomalie kann man immerhin hinreichende Convergenz erlangen, wenn die Excentricitäten und die gegenseitige Neigung der Bahn des gestörten und des störenden Körpers sehr klein sind, zumal wenn die Entfernung dieser beiden Körper von einander nie klein werden kann. Ist aber nur die eine Excentricität oder die Neigung nicht ganz klein, so gewährt selbst bei einer mässigen Grösse des Minimums der Entfernung der beiden Körper von einander die Anwendung der mittleren Länge oder mittleren Anomalie in den Reihen, wodurch die Störungen ausgedrückt werden müssen, nur eine geringe Convergenz, und die Zahl der merklichen Glieder kann so anwachsen, dass deren Berechnung sich der Grenze der Unausführbarkeit nähert, oder diese sogar übersteigt.

Ich habe gezeigt, dass die Anwendung der excentrischen Anomalie in diesen Fällen eine beträchtlich grössere Convergenz zu Wege bringt, und selbst bei Excentricitäten und Neigungen, wie sie bei Kometen vorkommen, die Darstellung der Störungen durch stark convergirende Reihen möglich macht. Wie in diesem Falle die Integrationen ausgeführt werden müssen, habe ich zugleich gezeigt. Für die Fälle, wo die excentrische Anomalie nicht mehr ausreichen sollte, habe ich andere Bögen angegeben, die ich die partiellen Anomalien nenne, und durch deren Verbindung mit dem Prinzip der Partition, worunter ich die Theilung der Bahn des gestörten Körpers, und in gewissen Fällen auch die des störenden, in zwei oder mehr Theile verstehe, in der Reihe der Störungsglieder eine bedeutende Convergenz erlangt. Die Theorie der partiellen Anomalien und der Partition habe ich in meiner Pariser Preisschrift entwickelt. Es muss daher für ein veraltetes und unzweckmässiges Verfahren erklärt werden, wenn man sich noch bemüht, die Störungen von Planeten,

deren Bahnen eine beträchtliche Excentricität und Neigungen besitzen, durch Reihen, die nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen der mittleren Anomalien fortschreiten, auszudrücken, die Zeit, die heutigen Tages noch auf solche Arbeiten verwandt werden würde, ist, selbst wenn diese fehlerfrei ausgeführt werden sollten, zufolge des gegenwärtigen Standes der Auflösung des Problems der drei Körper eine verlorene.

Nachdem die Wahl der Coordinaten, deren Störungen am zweckmässigsten berechnet werden, getroffen, und die Functionen der Zeit gegeben sind, nach deren Sinussen und Cosinussen die Reihen geordnet werden müssen, um die grösstmöglichste Convergenz zu erlangen, nimmt die Entwickelung der Störungsfunction und derjenigen partiellen Differentialquotienten derselben, wodurch die erforderlichen Componenten der störenden Kräfte ausgedrückt werden, eine bedeutende Stelle ein, da sie nicht ohne Schwierigkeiten ist. In meiner Berliner Preisschrift vom Jahre 1830 habe ich die Berechnung der numerischen Werthe der Coefficienten der Reihenentwickelungen dieser Functionen durch mechanische Quadraturen ausgeführt. Die allgemeinen Formeln, auf welche diese Methode bei der Berechnung der Coefficienten periodischer Functionen überhaupt führt, sind älter, und man kann ihre Spuren bis Euler verfolgen. Die Anwendung derselben auf die Entwickelung der Störungsfunction und ihrer Differentialquotienten war aber vor der genannten Abhandlung nirgends erschienen, und meine Berechnung der Jupiter- und Saturnstörungen, die in dieser Abhandlung erschien, muss daher auch in Beziehung auf diese Entwickelungsmethode als die erste ihrer Art betrachtet werden. Es führt indess diese Methode in dieser Anwendung, wo es sich um die Berechnung der numerischen Werthe von doppelten bestimmten Integralen handelt, auf weitläuftige Rechnungen, indem mehrere Hunderte von speciellen Werthen der Elemente dieser Integrale berechnet werden müssen, und man hier nicht, wie im allgemeinen Falle der mechanischen Quadraturen, die Summen, die die Integrale darstellen, durch Zuziehung der endlichen Differenzen der einzelnen Glieder derselben verbessern kann; ich habe mich daher in der Vorrede zu der genannten Abhandlung (*pag.* IX) dahin aussprechen müssen, dass es wünschenswerth sei, eine andere Methode für diese Entwickelungen zu besitzen. Es stehen mir auch nun seit einer Reihe von Jahren zwei andere Methoden zu Gebote, die in Bezug auf Kürze und Genauigkeit nichts zu wünschen übrig lassen.

Die eine dieser ist die in den Schriften dieser Gesellschaft unter dem Titel »Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen etc.« veröffentlichte, und giebt zuerst die Entwickelung der Störungsfunction nach den Potenzen des Verhältnisses der Radien der beiden dabei in Betracht kommenden Planeten; man erhält durch dieselbe schliesslich die Coefficienten durch Reihen, die nach den Potenzen des Verhältnisses der grossen Achsen der beiden Ellipsen fortschreiten. Diese Methode ist nicht der allgemeinsten Anwendung fähig, da die Convergenz der Reihen, aus deren Summen die Entwickelungscoefficienten hervorgehen, schwach wird, wenn das Verhältniss der beiden grossen Achsen der Ellipsen wesentlich grösser wie $\frac{1}{2}$ ist. Aber sie ist eine vollständige und strenge Entwickelung der Störungsfunction, und einer vielfachen und bequemen Anwendung fähig, da es in unserm Sonnensystem viele Fälle giebt, in welchen das Verhältniss der beiden betreffenden grossen Achsen kleiner wie $\frac{1}{2}$ ist. Wenn aber dieses Verhältniss bedeutend kleiner ist wie $\frac{1}{2}$, so führt diese Methode auf eine ungemein kurze Rechnung. Die zweite Methode zur Entwickelung der Störungsfunction ist die, welche ich in meiner Pariser Preisschrift entwickelt habe, und die auf folgenden Grundzügen beruht. Betrachtet man im Ausdruck des Quadrats der Entfernung zweier Planeten nur den einen veränderlichen Winkel, so ist dieser Ausdruck ein Polynom, welches nach den ganzen und positiven Potenzen des Sinus und Cosinus dieses Winkels geordnet werden kann, und es ist längst bekannt, dass solche Polynomen in eine Anzahl von Factoren von der Form

$$1 - q\cos(\varepsilon - Q)$$

zerlegt werden können, in welchen $\varepsilon$ der veränderliche Winkel ist und $q$ und $Q$ unabhängig von $\varepsilon$ sind; diese Factorenzerlegung wende ich an. Lässt man $\varepsilon$ die excentrische Anomalie bedeuten, so ist die Zahl der Factoren, in welche der Ausdruck des genannten Quadrats verwandelt werden kann, nur zwei, und der eine der beiden Module $q$ ist von der Ordnung des Quadrats der Excentricität des betreffenden Planeten. Die Reihenentwickelung eines jeden dieser beiden Factoren kann mit Zuziehung der Anfangsgründe der Theorie der elliptischen Functionen, und auf die Art, die ich in der »Entwickelung des Products einer Potenz etc.« betitelten Abhandlung gegeben habe, und die auch schon in meiner Pariser Preisschrift vorkommt, leicht und strenge ausgeführt werden. Die Multiplication der beiden Factoren verursacht, wegen der oben ange-

führten Beschaffenheit des einen Moduls, und indem die Excentricitäten aller störenden Planeten klein sind, wenig Mühe, und in manchen Fällen darf dieser zweite Factor gradezu gleich Eins gesetzt werden. Eine Abänderung dieser Methode, die auch in der gegenwärtigen Abhandlung erklärt wird, besteht darin, dass man die Factorenzerlegung unterlässt, und gradezu den Ausdruck

$$D - f\cos(\varepsilon' - F) + \tfrac{1}{2}\gamma_2 \cos 2\varepsilon'$$

auf welchen man auch den Ausdruck des Quadrats der Entfernung der beiden Planeten hinführen kann, entwickelt; es kann in gewissen Fällen die Anwendung dieser Form den Vorzug verdienen. Auf diese Art erhält man die Entwickelung der Störungsfunction in Bezug auf den einen in Betracht kommenden Planeten analytisch, und braucht nur dieselbe nur in Bezug auf den andern Planeten durch mechanische Quadratur auszuführen. Mit andern Worten: von den zwei bestimmten Integralen, auf deren Berechnung die Ermittelung der Coefficienten der Störungsfunction hinführt, wird durch diese Methode das eine analytisch erlangt, und nur das andere braucht durch mechanische Quadraturen berechnet zu werden. Das Resultat wird genauer und in weit kürzerer Zeit erlangt, wie in dem Falle, wo man beide Integrationen durch mechanische Quadraturen ausführt.

Ich füge diesem noch hinzu, dass alle meine Berechnungsarten mit Bedingungsgleichungen versehen sind, die zur Controle der numerischen Rechnungen angewandt werden können, und dass dieses ein wesentlich nothwendiger Zusatz ist, indem man sich sonst genöthigt sehen würde, alle Rechnungen zweimal auszuführen, da auch der geübteste Rechner nicht behaupten kann, dass er nie einen Rechnungsfehler beginge.

Es ist schliesslich noch der Umstand zu erörtern, dass man bei der Anwendung meiner Methoden die Elemente der Bahn des gestörten Planeten vor dem Beginn der Berechnung der Störungen desselben kennen muss, während man nach den allgemeinen Begriffen von dieser Sache die anzuwendenden Elemente erst nach der vollendeten Berechnung der Störungen kennen lernen kann. Diese Ansicht setzt stillschweigend voraus, dass es für jeden Planeten ausschliesslich nur ein einziges System numerischer Werthe der Elemente desselben gebe, durch dessen Zugrundelegung man die richtigen Werthe der Störungen erhalten könne, enthält aber einen Irrthum in sich; denn man kann mit jedem System

von numerischen Werthen dieser Elemente, die von den mittleren Werthen derselben nur um Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte abweichen, die Störungen so genau berechnen wie man will. Dieses werde ich jetzt erklären. Zuvörderst bemerke ich, dass man sich immer im Voraus ein System von Elementen verschaffen kann, welches die verlangte Eigenschaft besitzt. Wenn man aus drei oder mehr Beobachtungen, die nicht zu weit von einander entfernt sind, aber auch einander nicht zu nahe liegen dürfen, damit die unvermeidlichen Beobachtungsfehler keinen allzu grossen Einfluss äussern, ohne Rücksicht auf Störungen zu nehmen, die elliptischen Elemente eines Planeten berechnet hat, so werden diese im Allgemeinen nur um Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte von den mittleren Elementen verschieden sein, und man könnte daher schon diese Elemente den Störungsrechnungen zu Grunde legen. Wegen des Umstandes aber, dass die zu dieser Bestimmung anzuwendenden Elemente weder einander zu nahe liegen, noch von einander zu weit entfernt sein dürfen, — eine Bedingung, die sich nicht genauer definiren lässt, da die passende Ausdehnung der Beobachtungen in verschiedenen Fällen sehr verschieden sein kann, — verfährt man sicherer, wenn man die so gefundenen Elemente zuerst anwendet, um sich osculirende zu verschaffen, denn diese sind gewiss nur um Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte von den mittleren Elementen verschieden.

Man wende also die zuerst gefundenen Elemente an, um durch einen Zeitraum hindurch, den man nach Belieben so weit ausdehnen kann, wie die vorhandenen Beobachtungen reichen, die Störungen des Planeten durch mechanische Quadraturen zu berechnen. Durch Hülfe der mit Zuziehung dieser Störungswerthe zu berechnenden Örter des Planeten und der Vergleichung derselben mit einer angemessenen Anzahl von Beobachtungen ermittele man die Verbesserungen, die den zu Grunde gelegten Elementen hinzugefügt werden müssen, damit sie in die numerischen Werthe der osculirenden Elemente übergehen, die dem Planeten in irgend einem gegebenen Zeitpunkt zukommen; diese Elemente sind gewiss nur um Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte von den mittleren Elementen verschieden.

Legt man diese osculirenden Elemente den in dieser Abhandlung entwickelten Ausdrücken zu Grunde, berechnet zuerst damit die durch Functionen der Zeit ausgedrückten Störungen, die von der ersten Potenz

der störenden Kräfte abhängen, bestimmt die in diesen Ausdrücken enthaltenen sechs willkührlichen Constanten so, dass die erhaltenen Störungen nicht weniger wie die der Berechnung derselben zu Grunde gelegten osculirenden Elemente in demselben Zeitpunkt den Ort und die Geschwindigkeit des Planeten darstellen, — eine Bestimmung, die für diese Constanten nur Werthe von der Ordnung der störenden Kräfte geben kann — und fügt diese Werthe der Constanten den Störungen hinzu, so sind diese gewiss bis auf Grössen von der Ordnung des Quadrats der störenden Kräfte genau. Rechnet man hierauf mit Anwendung dieser Störungen die Störungsglieder, die von den Quadraten und Producten der störenden Kräfte abhängen, und bestimmt die dieser Rechnung von Neuem hinzuzufügenden sechs Constanten, welche Incremente der eben erwähnten Constanten sind, wieder so, dass die gesammten berechneten Störungen wieder in dem Zeitpunkt, für welchen die der Rechnung zu Grunde gelegten osculirenden Elemente gelten, den Ort und die Geschwindigkeit des Planeten darstellen, so sind die erlangten Störungen bis auf Grössen von der Ordnung der Cuben der störenden Kräfte genau, und die in dieser zweiten Annäherung gefundenen Incremente der in der ersten Annäherung bestimmten Werthe der sechs willkührlichen Constanten können selbst nur Grössen von der Ordnung des Quadrats der störenden Kräfte sein. Dieses Verfahren kann man, wo nöthig, fortsetzen, und so die Störungen so genau bestimmen, wie man will. Gewöhnlich reicht die zweite Annäherung aus, und oft braucht man sogar diese auch nicht auszuführen, oder man reicht mit der Berechnung einiger wenigen Glieder derselben aus.

Ich behaupte nun, dass die so erlangten Störungen ohne Weiteres die richtigen sind, und dass man ein identisches Resultat finden muss, wenn man mit numerischen Werthen von osculirenden Elementen, die irgend einer andern Zeit angehören, und die daher von jenen verschieden sein werden, die Rechnung wiederholen wollte. Der Beweis dieser Behauptung ist leicht zu führen. Da ich voraussetze, dass man die successiven Annäherungen so weit fortgeführt habe, dass keine merklichen Glieder mehr entstehen, so hat man den Differentialgleichungen der Bewegung vollständig Gnüge geleistet, und da man die vollständige Anzahl der willkührlichen Constanten, die den Integralen dieser Differentialgleichungen zukommen, hinzugefügt hat, so hat man die vollständigen Integrale derselben erlangt. Da man ferner die willkührlichen Constan-

ten so bestimmt hat, dass diese Integrale in Einem Zeitpunkt den Ort und die Geschwindigkeit des Planeten darstellen, so hat man alles gethan, was die Auflösung der Aufgabe verlangt; man hat allen Bedingungen derselben Gnüge geleistet, und das Resultat muss daher das richtige sein. Denn in allen Fällen ist diejenige Auflösung einer Aufgabe, die allen Bedingungen derselben genügt, die richtige. Da nun irgend ein specieller Fall dieser Aufgabe nur Eine Auflösung haben kann, so muss man ein identisches Resultat bekommen, wenn man die Rechnung mit Zugrundelegung von osculirenden Elementen, die einem andern Zeitpunkt angehören, wiederholen wollte. Es würden in diesem Falle, da die numerischen Werthe der zu Grunde gelegten Elemente anders sind, die Werthe der in der ersten Annäherung gefundenen Störungen etwas anders werden wie vorher, und zwar von diesen um Grössen von der Ordnung des Quadrats der störenden Kräfte verschieden sein; aber die Werthe der willkührlichen Constanten würden auch etwas anders ausfallen, und ebenfalls von denen der ersten Rechnung um Grössen von der Ordnung des Quadrats der störenden Kräfte verschieden sein. In der zweiten Annäherung müssen sich diese Unterschiede mit der vorigen Rechnung schon mehr ausgleichen, und in der letzten überhaupt nöthigen Annäherung muss sich die Identität mit dem durch jene osculirenden Elemente erlangten Resultat herstellen. Ist daher die zweite Annäherung schon die letzte überhaupt nothwendig werdende, so muss sich schon in dieser die Identität kund geben, und sind die störenden Kräfte so klein, dass die erste Annäherung im Ganzen ausreicht, so können die Unterschiede zwischen den, beiden Rechnungen zu Grunde gelegten, Systemen von osculirenden Elementen überhaupt keine merklichen Änderungen in den erhaltenen Störungen hervorbringen.

Man kann die eben beschriebene Anwendung der osculirenden Elemente etwas modificiren, und im Laufe der Rechnung die bereits erhaltenen Störungen so abändern, dass sie denjenigen gleich kommen, die aus der unmittelbaren Anwendung der mittleren Elemente hervorgegangen wären, welches häufig Vortheile gewähren wird. Nachdem man die Störungen der ersten Annäherung berechnet hat, kann man nemlich die Unterschiede zwischen den angewandten osculirenden Elementen und den mittleren berechnen, und damit diese selbst finden. Durch Hülfe dieser Unterschiede der Elemente kann man wieder die

Grössen berechnen, die man den bereits erhaltenen Störungen hinzufügen muss, um sie in diejenigen zu verwandeln, die man durch unmittelbare Zugrundelegung der mittleren Elemente erhalten haben würde. Sollte man befürchten müssen, die Unterschiede der beiden genannten Systeme von Elementen sowohl wie die der bezüglichen Störungen in der ersten Annäherung nicht genau genug erhalten zu haben, so kann man sie nach der Berechnung der Störungen der zweiten Annäherung verbessern, und auf solche Art mit jeder erforderlichen Genauigkeit erhalten.

Im Vorhergehenden ist das Problem der drei Körper in dem Sinne aufgefasst worden, wie es gewöhnlich zur Anwendung kommt, nemlich dass durch die gegebenen Elemente der Bahnen der in Betracht kommenden Himmelskörper die Störungen Eines oder mehrerer derselben zu berechnen sind; ich kann aber diese Darlegung nicht schliessen, ohne von der umgekehrten Aufgabe, die darin besteht, dass vermittelst des gegebenen Betrages der Störungen die Elemente der Bahn des störenden Planeten zu bestimmen sind, einige Worte zu sagen. Diese Aufgabe, die bei der theoretischen Entdeckung des Neptuns angewandt werden musste, ist vor nicht langer Zeit von Leverrier und Adams gelöst worden, und die betreffenden Arbeiten dieser Astronomen sind mit dem schönsten Erfolge gekrönt worden. Zwar haben sich nachher Stimmen erhoben, die die Ansicht aussprachen, dass der von Galle am Himmel aufgefundene Planet ein anderer sei, wie der von jenen Astronomen im Voraus berechnete, aber ich muss diese Ansicht für irrthümlich halten, da ich meine, dass die Unterschiede zwischen den vorausberechneten Elementen, und den nach der Entdeckung aus directen Beobachtungen abgeleiteten, sich durch theoretische Betrachtungen genügend erklären lassen.

Die Reichhaltigkeit des Themas verhindert mich es in dieser Abhandlung zu Ende zu führen, die dadurch ein allzu grosses Volumen erhalten würde, und nöthigt mich es auf zwei Abhandlungen zu vertheilen, von welchen die zweite dieser baldmöglichst nachfolgen wird und kann, da die einzelnen Punkte derselben schon längst ausgearbeitet sind. Der Inhalt dieser ersten Abhandlung ist in den Ueberschriften der verschiedenen Abschnitte derselben wie folgt angegeben:

§ 1. Transformation der Coordinaten.

§ 2. Ableitung der Differentialgleichungen für die Störungen der

Zeit, des Logarithmus des Radius Vectors, und der auf der Fundamentalebene senkrecht stehenden Coordinate.

§ 3. Ableitung anderer Differentialgleichungen für dieselben im vor. § betrachteten Störungen.

§ 4. Von der Störungsfunction und den partiellen Differentialquotienten derselben.

§ 5. Aufstellung aller für die Berechnung der Störungen erster und zweiter Ordnung in Bezug auf die Massen erforderlichen Ausdrücke.

§ 6 Entwickelung der Störungsfunction und der Differentialquotienten derselben in unendliche Reihen.

§ 7. Anwendung der im Vorhergehenden erklärten Reihenentwikkelungen auf die vom Jupiter bewirkten Störungen der Egeria.

Man sieht hieraus, dass ich diese Abhandlung mit der Reihenentwickelung der Störungsfunction und ihrer Differentialquotienten geschlossen habe. Die weiteren Entwickelungen, worunter die Ausführung der in dieser Einleitung schon angeführten Verwandelung der osculirenden Elemente in die mittleren, und die damit in Verbindung stehende Verbesserung der Störungscoefficienten gehört, werde ich der zweiten Abhandlung einverleiben.

## § 1. Transformation der Coordinaten.

1.

Seien $x, y, z$, die auf feste rechtwinklige Achsen bezogenen Coordinaten des gestörten Planeten, $r$ dessen Radius Vector, $m$ dessen Masse in Theilen der Sonnenmasse, $t$ die Zeit, $k^2$ die Intensität der Anziehungskraft, für die Einheit der Geschwindigkeit, der Entfernung und der Masse, $x', y', z', r', m'$ für den störenden Planeten dasselbe was $x, y, z, r, m$ für den gestörten,

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{\Delta} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right\}$$

wo

$$\Delta^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

also $\Delta$ die Entfernung zwischen den beiden Planeten bedeutet, dann sind die Gleichungen der Bewegung des gestörten Planeten die folgenden

$$(1) \ldots\ldots \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x}{r^3} = k^2(1+m)\left(\frac{d\Omega}{dx}\right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{y}{r^3} = k^2(1+m)\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{z}{r^3} = k^2(1+m)\left(\frac{d\Omega}{dz}\right) \end{cases}$$

Da hier stets $m'$ in Bezug auf $1+m$ als eine kleine Grösse erster Ordnung betrachtet werden soll, so fügt die rechte Seite der Gleichungen (1) der Bewegung die aus der Integration der Gleichungen

$$(2) \ldots\ldots \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x}{r^3} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{y}{r^3} = 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{z}{r^3} = 0 \end{cases}$$

folgt, nur kleine Grössen der ersten Ordnung hinzu, die man die »Störungen« des Planeten $m$ nennt; die Function $\Omega$, von welcher diese Störungen abhängen, heisst aus diesem Grunde die Störungsfunction. Die Integration der Gleichungen (2) giebt die Bewegung in einer Ebene

und in einem Kegelschnitt, und die Integration der Gleichungen (1) hat daher die Wirkung, dass sie die Lage dieser Ebene, so wie die Bewegung in diesem Kegelschnitt um kleine Grössen erster Ordnung ändert. Bei der Integration der Gleichungen (2) trennen sich die Constanten, die die Lage der Bahnebene bestimmen, von selbst von den Constanten, die die Dimensionen des Kegelschnitts und die Bewegung in demselben bestimmen. Dieses ist nicht mehr bei der Integration der Gleichungen (1) der Fall, sondern es kommen dabei diese beiden Gattungen von Constanten und ihre Wirkung auf die Störungen der Bewegung unter einander gemischt vor, indem man genöthigt ist die Projection der Bewegung auf der Ebene der $xy$ zu bestimmen. Die orthographische Projection eines Kegelschnitts ist freilich wieder ein Kegelschnitt, aber der Brennpunkt der Projection fällt nicht mit dem Brennpunkt des gegebenen Kegelschnitts zusammen, und dieses bewirkt eine grössere Complication der Gleichungen, namentlich hier, wo die Dimensionen der Kegelschnitte veränderlich sind.

Man kann indess durch eine gewisse Transformation der obigen Coordinaten bewirken, dass auch in der gestörten Bewegung die Veränderung der Ebene, in welcher sich der Planet bewegt, von den Veränderungen, die die Bewegung im Kegelschnitt erleidet, und folglich auch die bezüglichen Constanten von einander getrennt werden, wodurch eine grössere Einfachheit in den zu integrirenden Gleichungen herbeigeführt wird.

2.

Die Grundlage dieser Transformation ist in der Theorie der veränderlichen Constanten zu suchen. Vermöge dieser können die Integrale der Gleichungen (2) auf die Gleichungen (1) dadurch ausgedehnt werden, dass man die darin enthaltenen sechs willkührlichen Constanten als veränderlich betrachtet, und ihre Veränderungen den Gleichungen (1) gemäss bestimmt. Hiedurch erhalten nicht nur die Ausdrücke von $x, y, z$, die aus beiden Systemen von Gleichungen hervorgehen, die nemliche Form, sondern dieses findet auch bei ihren ersten Differentialen in Bezug auf die Zeit statt; letzteres weil die gegebenen Differentialgleichungen von der zweiten Ordnung sind. Nicht jedes beliebige Coordinatensystem besitzt die zuletzt genannte Eigenschaft, da es aber demohngeachtet eine unendlich grosse Anzahl von Systemen giebt, die sie besitzt, so will ich diese mit dem Beiwort »ideal« bezeichnen. Also:

»Ideale Coordinaten eines Planeten, oder Kometen, oder Satelliten nenne ich alle Coordinaten desselben, die die Eigenschaft besitzen, dass nicht nur sie selbst, sondern auch ihre ersten Differentiale in Bezug auf die Zeit in der gestörten Bewegung dieselbe Form haben wie in der ungestörten.«

Nennen wir $X, Y, Z$ irgend ein anderes System rechtwinkliger Coordinaten des Planeten, so sind

$$(3) \quad \begin{cases} X = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z \\ Y = \beta x + \beta' y + \beta'' z \\ Z = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z \end{cases}$$

die allgemeinsten Gleichungen, die sich zwischen diesen und $x, y, z$ aufstellen lassen, und es bedeuten darin $\alpha$ der Cosinus des Winkels zwischen den Achsen der $x$ und $X$, $\alpha'$ der des Winkels zwischen den Achsen der $y$ und $X$, u. s. w. Wenn nun die neun Cosinusse Constanten sind, so sind $X, Y, Z$ ohne Weiteres auch ideale Coordinaten; sind aber diese Cosinusse Functionen der Zeit, so sind $X, Y, Z$ nur alsdann ideale Coordinaten, wenn

$$(4) \quad \begin{cases} 0 = x d\alpha + y d\alpha' + z d\alpha'' \\ 0 = x d\beta + y d\beta' + z d\beta'' \\ 0 = x d\gamma + y d\gamma' + z d\gamma'' \end{cases}$$

wo die Differentiale in Bezug auf die Zeit verstanden werden müssen. Da diese Gleichungen von selbst erfüllt sind, wenn $\alpha, \beta$, etc. die Zeit nicht enthalten, so kann man alle möglichen Systeme von idealen Coordinaten durch sie definiren. Die Gleichungen (4) bilden nur zwei wesentlich von einander verschiedene Gleichungen, und da jedes Coordinatensystem von drei Bedingungen abhängt, so sind unendlich viele ideale Coordinatensysteme möglich. Um dieses zu zeigen bemerke ich, dass aus (3) umgekehrt die folgenden Gleichungen hervorgehen

$$(5) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y + \gamma Z \\ y = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z \\ z = \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z \end{cases}$$

Substituirt man diese in (4), nimmt auf die Bedingungsgleichungen

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0\,, & \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1 \\ \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0\,, & \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1 \\ \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0\,, & \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \end{cases}$$

und deren Differentiale Rücksicht, und setzt zur Abkürzung

$$A = \beta d\alpha + \beta' d\alpha' + \beta'' d\alpha'' = -\alpha d\beta - \alpha' d\beta' - \alpha'' d\beta''$$
$$B = \alpha d\gamma + \alpha' d\gamma' + \alpha'' d\gamma'' = -\gamma d\alpha - \gamma' d\alpha' - \gamma'' d\alpha''$$
$$C = \gamma d\beta + \gamma' d\beta' + \gamma'' d\beta'' = -\beta d\gamma - \beta' d\gamma' - \beta'' d\gamma''$$

so gehen die (4) über in

$$0 = AY - BZ;\ 0 = AX - CZ;\ 0 = BX - CY \quad \ldots\ldots (7)$$

die augenscheinlich nur zwei wesentlich von einander verschiedene Gleichungen bilden. Diese Gleichungen sind die Gleichungen der instantanen Drehungsachse des Coordinatensystems $X$, $Y$, $Z$, und man leitet leicht daraus folgenden Satz ab:

»In jedem auf bewegliche Achsen bezogenen idealen Coordinatensystem fällt die instantane Drehungsachse stets mit dem Radius Vector des Planeten, oder Kometen, oder Satelliten zusammen.«

dessen Beweis ich jedoch der Kürze wegen hier übergehe.

3.

Da zufolge des Vorhergehenden die dritte Bedingung, die nöthig ist um ein System idealer Coordinaten festzustellen, willkührlich ist, so werde ich im Folgenden als solche die Gleichung $Z = 0$ anwenden, und es soll demnach die Ebene der $XY$ stets durch den Radius Vector gehen. Die Gleichungen (7) geben hiemit $A = 0$, das ist

$$0 = \beta d\alpha + \beta' d\alpha' + \beta'' d\alpha'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

oder

$$0 = \alpha d\beta + \alpha' d\beta' + \alpha'' d\beta''$$

von welchen die eine eine nothwendige Folge der andern ist.

Die nächste Folgerung, die ich aus diesen Gleichungen ziehe, ist die, dass nunmehr die Veränderungen der vier Cosinusse $\alpha$, $\beta$, $\alpha'$, $\beta'$, Functionen der Veränderungen der beiden Cosinusse $\alpha''$ und $\beta''$ geworden sind. Es ist nemlich jetzt

$$\left.\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\gamma}{\gamma''} d\alpha'';\quad d\beta = \frac{\gamma}{\gamma''} d\beta'' \\ d\alpha' &= \frac{\gamma'}{\gamma''} d\alpha'';\quad d\beta' = \frac{\gamma'}{\gamma''} d\beta'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Denn substituirt man diese Werthe von $d\alpha$, $d\alpha'$, $d\beta$ und $d\beta'$ in die beiden obigen Gleichungen, so ist ihnen zufolge der früheren Bedingungsgleichungen

$$0 = \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma''$$
$$0 = \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma''$$

Gnüge geleistet.

4.

Es wird nun

$$x = \alpha X + \beta Y$$
$$y = \alpha' X + \beta' Y$$
$$z = \alpha'' X + \beta'' Y$$

und da $x$, $y$, $z$ sowohl wie $X$ und $Y$ ideale Coordinaten sind, so finden die Gleichungen

$$(10) \quad \begin{cases} 0 = X d\alpha + Y d\beta \\ 0 = X d\alpha' + Y d\beta' \\ 0 = X d\alpha'' + Y d\beta'' \end{cases}$$

statt, und man erhält durch zweimalige Differentiation in Bezug auf die Zeit

$$d^2x = \alpha d^2X + \beta d^2Y + d\alpha dX + d\beta dY$$
$$d^2y = \alpha' d^2X + \beta' d^2Y + d\alpha' dX + d\beta' dY$$
$$d^2z = \alpha'' d^2X + \beta'' d^2Y + d\alpha'' dX + d\beta'' dY$$

multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach erst mit $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ und addirt sie, dann mit $\beta$, $\beta'$, $\beta''$ und addirt sie wieder, so ergiebt sich in Folge der Bedingungsgleichungen (6) und (8)

$$\alpha d^2x + \alpha' d^2y + \alpha'' d^2z = d^2X$$
$$\beta d^2x + \beta' d^2y + \beta'' d^2z = d^2Y$$

multiplicirt man ferner dieselben Gleichungen mit $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ und addirt sie, so kommt zuerst

$$\gamma d^2x + \gamma' d^2y + \gamma'' d^2z = (\gamma d\alpha + \gamma' d\alpha' + \gamma'' d\alpha'')\, dX + (\gamma d\beta + \gamma' d\beta' + \gamma'' d\beta'')\, dY$$

die sich zu Folge der Gleichungen (9) in

$$\gamma d^2x + \gamma' d^2y + \gamma'' d^2z = \frac{1}{\gamma''} \left\{ d\alpha'' dX + d\beta'' dY \right\}$$

verwandelt. Setzen wir für einen Augenblick wieder

$$Z = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z$$

so können wir die Störungsfunction $\Omega$, die oben als Function von $x$, $y$, $z$ dargestellt wurde, auch als Function von $X$, $Y$, $Z$ betrachten, und erhalten

$$\left(\frac{d\Omega}{dX}\right) = \alpha \left(\frac{d\Omega}{dx}\right) + \alpha' \left(\frac{d\Omega}{dy}\right) + \alpha'' \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$$
$$\left(\frac{d\Omega}{dY}\right) = \beta \left(\frac{d\Omega}{dx}\right) + \beta' \left(\frac{d\Omega}{dy}\right) + \beta'' \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$$
$$\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \gamma \left(\frac{d\Omega}{dx}\right) + \gamma' \left(\frac{d\Omega}{dy}\right) + \gamma'' \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$$

für deren Anwendung auf das hier eingeführte Coordinatensystem nichts weiter zu thun ist, wie nach den Differentiationen $Z = 0$ zu machen.

Multipliciren wir nun die Gleichungen (1) erst mit $\alpha, \alpha' \alpha''$ und addiren, dann mit $\beta \beta' \beta''$ und addiren, dann mit $\gamma \gamma' \gamma''$ und addiren, so ergiebt sich in Folge der eben abgeleiteten Gleichungen, und weil

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2$$

ist,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{X}{r^3} &= k^2(1+m)\left(\frac{d\Omega}{dX}\right) \\ \frac{d^2Y}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{Y}{r^3} &= k^2(1+m)\left(\frac{d\Omega}{dY}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$\frac{d\alpha''}{dt}\frac{dX}{dt} + \frac{d\beta''}{dt}\frac{dY}{dt} = \gamma'' k^2(1+m)\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

wovon die beiden ersten den beiden ersten (1) vollkommen ähnlich sind. Da $X$ und $Y$ von der Lage der Bahn im Raume unabhängig sind, so ist durch Einführung dieser Coordinaten die oben erwähnte Trennung der Bewegung in der Bahn von der Bewegung der Bahn selbst im Raume bewirkt. Um diese letztere zu erhalten, dient die vorstehende dritte Gleichung in Verbindung mit der dritten Gleichung (10), nemlich mit

$$0 = X d\alpha'' + Y d\beta''$$

Eliminirt man zwischen diesen beiden Gleichungen wechselsweise $d\alpha''$ und $d\beta''$, und setzt zur Abkürzung

$$h = \frac{k^2(1+m)}{X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11^*)$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha''}{dt} &= -h\gamma'' Y\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) \\ \frac{d\beta''}{dt} &= \phantom{-}h\gamma'' X\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Die Gleichungen (11) und (12) bestimmen nach der Integration den Ort des Planeten im Raume vollständig, denn dieser hängt von den Coordinaten $x, y, z$ ab, diese sind Functionen von $X, Y, \alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''$, die beiden ersten und die beiden letzten dieser Grössen werden durch die Integration der Gleichungen (11) und (12) bestimmt, und hierauf ergeben sich die vier mittleren durch die Integration der Ausdrücke (9). Es wird sich weiter unten ergeben, dass die schliessliche Bestimmung dieser Grössen sich auf die Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, zweier der ersten Ordnung und eine Quadratur reducirt,

welche letztere noch dazu in vielen in der Anwendung vorkommenden Fällen gänzlich übergangen werden kann, und jedenfalls leicht zu erhalten ist.

## 5.

Führen wir statt $X$ und $Y$ die beiden Polarcoordinaten $r$ und $v$ ein, wo wie vorher $r$ der Radius Vector und $v$ der Winkel in der Ebene der $XY$ zwischen der positiven $X$ Achse und dem Radius Vector ist, und von der genannten Achse an in der Richtung der Bewegung durch den ganzen Umkreis gezählt werden muss. Es wird dadurch

$$X = r \cos v\,; \quad Y = r \sin v$$
$$dX = dr \cos v - r dv \sin v$$
$$dY = dr \sin v + r dv \cos v$$
$$d^2X = d^2r \cos v - r d^2v \sin v - 2 dr dv \sin v - r dv^2 \cos v$$
$$d^2Y = d^2r \sin v + r d^2v \cos v + 2 dr dv \cos v - r dv^2 \sin v$$

$$(12^*) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \left(\frac{d\Omega}{dX}\right) = -\frac{1}{r}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) \sin v + \left(\frac{d\Omega}{dr}\right) \cos v \\ \left(\frac{d\Omega}{dY}\right) = \phantom{-}\frac{1}{r}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) \cos v + \left(\frac{d\Omega}{dr}\right) \sin v \end{cases}$$

und hiemit gehen die Gleichungen (11) über in

$$(13) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} r^2 \frac{d^2v}{dt^2} + 2r \frac{dr}{dt} \frac{dv}{dt} = k^2 (1+m) \left(\frac{d\Omega}{dv}\right) \\ \frac{d^2r}{dt^2} - r \frac{dv^2}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{r^2} = k^2 (1+m) \left(\frac{d\Omega}{dr}\right) \end{cases}$$

Integrirt man diese Gleichungen, indem man die rechte Seite derselben Null setzt, so bekommt man die Bewegung im Kegelschnitt, oder mit andern Worten die Auflösung des Problems der zwei Körper. Sieht man die vier Elemente dieses Kegelschnitts und der Bewegung in demselben als Functionen der Zeit an, und bestimmt sie der Theorie der Veränderung der willkührlichen Constanten gemäss, so sind nicht nur diese Gleichungen der Bewegung im Kegelschnitt die Integrale der vollständigen Gleichungen (13), sondern ihre ersten Differentiale in Bezug auf die Zeit, nemlich

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{p(1+m)}}{r^2}\,; \quad \frac{dr}{dt} = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}}\, e \sin f$$

worin $p$ der halbe Parameter des Kegelschnitts, $e$ dessen Excentricität und $f$ die wahre Anomalie ist, finden auch statt, da $v$ und $r$ ideale Coordinaten sind. Die Werthe der zweiten Differentiale von $v$ und $r$, die

ohne Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Elemente aus den Gleichungen der Bewegung im Kegelschnitt hervorgehen, gnügen den (13) nur dann, wenn man zum Werthe

$$\text{von } \frac{d^2 v}{dt} \text{ die Grösse } k^2 (1 + m) \frac{1}{r^2} \left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$$

und zum Werthe

$$\text{von } \frac{d^2 r}{dt^2} \text{ die Grösse } k^2 (1 + m) \left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

addirt. Wir können sogleich in Folge dieser Sätze der im vor. Art. eingeführten Grösse $h$ einen andern Ausdruck geben. Es wird in der gestörten, wie in der ungestörten Bewegung mittelst der obigen Gleichungen

$$\frac{k^2 (1+m)}{h} = X \frac{dY}{dt} - Y \frac{dX}{dt} = r^2 \frac{dv}{dt}$$

und hiemit

$$h = \frac{k \sqrt{1+m}}{\sqrt{p}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13^*)$$

wodurch sich zu erkennen giebt, dass $h$ der Quadratwurzel aus dem Parameter des Kegelschnitts umgekehrt proportional ist.

6.

Sei $\sigma$ der Winkel in der Ebene der $XY$, welcher sich von der positiven $X$ Achse bis zum aufsteigenden Knoten der $XY$ Ebene auf der $xy$ Ebene erstreckt, so ist $v - \sigma$ der Winkel zwischen diesem Knoten und dem Radius Vector. Sei ferner $b$ der Winkel, den der Radius Vector mit der $xy$ Ebene macht, $l$ der Winkel zwischen der positiven $x$ Achse und der Projection des Radius Vectors auf der $xy$ Ebene, und $\theta$ der Winkel zwischen der positiven $x$ Achse und dem eben genannten Knoten, dann ist $l - \theta$ der Winkel zwischen diesem Knoten und der Projection des Radius Vectors. Sei endlich $i$ die Neigung zwischen der $XY$ Ebene und der $xy$ Ebene, so bekommt man durch die sphärische Trigonometrie

$$\left.\begin{aligned} \cos b \sin (l - \theta) &= \cos i \sin (v - \sigma) \\ \cos b \cos (l - \theta) &= \cos (v - \sigma) \\ \sin b &= \sin i \sin (v - \sigma) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

Da nun

$$\begin{aligned} x &= r \cos b \cos l \\ y &= r \cos b \sin l \\ z &= r \sin b \end{aligned}$$

ist, so bringt man die vorstehenden Gleichungen, nachdem sie mit $r$ multiplicirt worden sind, leicht auf die Form

$$x = \alpha X + \beta Y;\quad y = \alpha' X + \beta' Y;\quad z = \alpha'' X + \beta'' Y$$

wodurch sich die Ausdrücke von $\alpha$, $\beta$, $\alpha'$, $\beta'$, $\alpha''$, $\beta''$ durch $i$, $\sigma$ und $\theta$ ergeben; die Ausdrücke für $\gamma$, $\gamma'$ und $\gamma''$ erhält man darauf durch die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1, \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1, \quad \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0 \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 &= 1, \quad \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0 \end{aligned}$$

die eine nothwendige Folge der (6) sind.*) Man findet auf diese Art dass

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos\sigma\cos\theta + \sin\sigma\sin\theta\cos i \\ \beta &= \sin\sigma\cos\theta - \cos\sigma\sin\theta\cos i \\ \gamma &= \sin\theta\sin i \\ \alpha' &= \cos\sigma\sin\theta - \sin\sigma\cos\theta\cos i \\ \beta' &= \sin\sigma\sin\theta + \cos\sigma\cos\theta\cos i \\ \gamma' &= -\cos\theta\sin i \\ \alpha'' &= -\sin\sigma\sin i \\ \beta'' &= \cos\sigma\sin i \\ \gamma'' &= \cos i \end{aligned}$$

In Folge dieser Gleichungen sind die Bögen $\sigma$, $\theta$ und $i$ von einander un-

*) Die einfachste Art unabhängig von den Werthen von $\alpha$, $\beta$, etc. die Identität dieser Gleichungen mit den (6) zu zeigen, scheint mir die folgende zu sein. Man multiplicire die erste der vorstehenden mit $\alpha$, die zweite mit $\alpha'$, die vierte mit $\alpha''$, und addire; ferner multiplicire man die zweite mit $\alpha$, die dritte mit $\alpha'$, die sechste mit $\alpha''$, und addire; hierauf multiplicire man die vierte mit $\alpha$, die sechste mit $\alpha'$, die fünfte mit $\alpha''$, und addire; dadurch erhält man die folgenden drei linearischen Gleichungen in $A$, $B$ und $C$

$$(A)\quad \begin{cases} \alpha A + \beta B + \gamma C = \alpha \\ \alpha' A + \beta' B + \gamma' C = \alpha' \\ \alpha'' A + \beta'' B + \gamma'' C = \alpha'' \end{cases}$$

wo

$$\begin{aligned} A &= \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 \\ B &= \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' \\ C &= \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' \end{aligned}$$

ist. Der erste Blick zeigt aber, dass den Gleichungen $(A)$ nur durch die Werthe

$$A = 1,\ B = 0,\ C = 0$$

Gnüge geleistet werden kann, und diese sind drei der Gleichungen (6); eben so findet man die andern drei.

abhängig, aber die Gleichungen (8), die Eine, wesentlich von den übrigen Bedingungsgleichungen verschiedene, Gleichung bilden, fügen eine Bedingung zwischen den Veränderungen derselben hinzu. Um diese zu erhalten, differentiire ich die obigen Ausdrücke für $\alpha$, $\alpha'$ und $\alpha''$, wodurch man

$$d\alpha = -\beta d\sigma - \alpha' d\theta - \gamma \sin\sigma\, di$$
$$d\alpha' = -\beta' d\sigma + \alpha' d\theta - \gamma' \sin\sigma\, di$$
$$d\alpha'' = -\beta'' d\sigma \qquad\qquad - \gamma'' \sin\sigma\, di$$

erhält. Substituirt man diese in die Gleichung

$$0 = \beta d\alpha + \beta' d\alpha' + \beta'' d\alpha''$$

so erhält man

$$d\sigma = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\, d\theta = \cos i . d\theta$$

welches die verlangte Bedingungsgleichung ist.

Die Integration der beiden Gleichungen (12) führt zwei willkührliche Constanten ein, die die Werthe der Grössen $-\sin\sigma \sin i$ und $\cos\sigma \sin i$ für den Zeitpunkt $t = 0$ sind, und die Integration der vorstehenden, nemlich der Gleichung

$$d\theta = \frac{d\sigma}{\cos i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

die jedenfalls eine Quadratur ist, führt noch eine Constante ein, die der Werth von $\theta$ für $t = 0$ ist. Zählt man hiezu die vier Constanten, welche durch die Integration der Gleichungen (13) eingeführt werden, so hat man im Ganzen sieben Constanten erhalten, während die Integration der Gleichungen (1), die durch die vorstehende Analyse in die Gleichungen (12), (13) und (15) zerlegt worden sind, nur sechs Constanten einführen kann. Das Vorkommen dieser siebenten Constante ist leicht zu erklären; sie rührt davon her, dass die Lage der $X$ Achse in der $XY$ Ebene in der That völlig willkührlich ist, und sie bestimmt eben diese Lage. Man kann sie daher nach Belieben annehmen, und die zweckmässigste Annahme, die man darüber machen kann, ist die, zu bewirken, dass für den Zeitpunkt $t = 0$ die positive $X$ Achse mit dem aufsteigenden Knoten der $XY$ Ebene auf der $xy$ Ebene denselben Winkel in derselben Richtung bilde, wie die positive $x$ Achse. Bezeichnen wir überhaupt die Werthe von $i$, $\theta$, $\sigma$, etc. für $t = 0$ mit $i_0$, $\theta_0$, $\sigma_0$, etc., so giebt diese Bedingung sogleich

$$\sigma_0 = \theta_0$$

wodurch die Anzahl der Constanten auf sechs zurückgeführt ist.

## 7.

Man kann das Differential des Unterschiedes zwischen $\sigma$ und $\theta$ leicht durch $\alpha''$ und $\beta''$ und ihre Differentiale ausdrücken. Die Gleichung (15) giebt

$$d(\theta - \sigma) = \frac{\sin^2 i}{\cos i\,(1 + \cos i)}\, d\sigma$$

und die Gleichungen

$$\alpha'' = -\sin i \sin\sigma;\quad \beta'' = \sin i \cos\sigma$$

geben

$$\begin{aligned} d\alpha'' &= -di\cos i\sin\sigma - d\sigma\sin i\cos\sigma \\ d\beta'' &= \phantom{-}di\cos i\cos\sigma - d\sigma\sin i\sin\sigma \\ \sin^2 i &= \alpha''^2 + \beta''^2 \end{aligned}$$

woraus

$$\sin^2 i\, d\sigma = \alpha'' d\beta'' - \beta'' d\alpha''$$

folgt. Es wird also

$$\theta - \sigma = \int \frac{\alpha'' d\beta'' - \beta'' d\alpha''}{\sqrt{1 - \alpha''^2 - \beta''^2}\,\{1 + \sqrt{1 - \alpha''^2 - \beta''^2}\}}$$

wo zufolge des Vorhergehenden das Integral so bestimmt werden muss, dass es für $t = 0$ Null wird. Insgleichen geben die oben angeführten Differentiale von $\alpha$, $\alpha'$ und $\alpha''$

$$\gamma d\alpha + \gamma' d\alpha' + \gamma'' d\alpha'' = (\gamma'\alpha - \gamma\alpha')\, d\theta - \sin\sigma.di = -\cos\sigma\sin i.d\theta - \sin\sigma.di$$

und aus den folgenden Ausdrücken der Differentiale von $\beta$, $\beta'$ und $\beta''$

$$\begin{aligned} d\beta &= \alpha d\sigma - \beta' d\theta + \gamma\cos\sigma.di \\ d\beta' &= \alpha' d\sigma + \beta d\theta + \gamma'\cos\sigma.di \\ d\beta'' &= \alpha'' d\sigma \qquad\quad\; + \gamma''\cos\sigma.di \end{aligned}$$

erhält man

$$\gamma d\beta + \gamma' d\beta' + \gamma'' d\beta'' = (\gamma'\beta - \gamma\beta')\, d\theta + \cos\sigma.di = -\sin\sigma\sin i.d\theta + \cos\sigma.di$$

Diese gehen vermöge der Gleichungen (9) in folgende über

$$\cos\sigma\sin i.d\theta + \sin\sigma.di = -\frac{d\alpha''}{\gamma''}$$

$$\sin\sigma\sin i.d\theta - \cos\sigma.di = -\frac{d\beta''}{\gamma''}$$

und hieraus zieht man

$$\theta = \theta_0 + \int \frac{\beta'' d\alpha'' - \alpha'' d\beta''}{\gamma''(\alpha''^2 + \beta''^2)}$$

$$i = i_0 + \int \frac{\beta'' d\beta'' + \alpha'' d\alpha''}{\gamma''\sqrt{\alpha''^2 + \beta''^2}}$$

Nachdem daher die (12) integrirt worden sind, könnte man durch Quadraturen aus den drei in diesem Artikel entwickelten Gleichungen $i$, $\theta$ und $\sigma$ bestimmen, worauf die Gleichungen (14) $l$ und $b$ geben würden. Allein dieses Verfahren ist nicht das einfachste, und überhaupt sind die Gleichungen (14) nicht die geeignetesten zur Ermittelung von $l$ und $b$, weil die vollen Werthe von $i$, $\theta$ und $\sigma$ darin verlangt werden, und daher die constanten Glieder dieser von den Störungen, oder den veränderlichen Gliedern nicht getrennt werden dürfen. Ich habe aber eine Transformation dieser Gleichungen gefunden, wodurch diese Trennung bewirkt, und die Berücksichtigung der Störungen der Lage der Bahn sehr einfach wird; diese Transformation ist im Folgenden enthalten.

## 8.

Die Gleichungen (14) sollen in folgende umgeformt werden

$$\left.\begin{aligned} \cos b \sin(l-h-\Gamma) &= \cos k \sin(v-h) - sA\cos w \\ \cos b \cos(l-h-\Gamma) &= \cos(v-h) + sA\sin w \\ \sin b &= \sin k \sin(v-h) + s \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

die bis auf die zweiten Glieder rechter Hand dieselbe Form haben wie die (14), und diese Umformung soll so bewirkt werden, dass die zu bestimmenden Grössen $\Gamma$, $A$, $k$ und $w$ von $v$ unabhängig seien. Es ist leicht *a priori* zu erkennen, dass $h$ willkührlich bleiben muss. Die Auflösung dieser Aufgabe wird am Einfachsten durch Anwendung der imaginären Exponentialfunctionen erhalten; sei daher $c$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, dann gehen die beiden ersten Gleichungen in folgende über

$$\begin{aligned} \cos b\left(c^{(l-h-\Gamma)\sqrt{-1}} - c^{-(l-h-\Gamma)\sqrt{-1}}\right) &= \cos k\left(c^{(v-h)\sqrt{-1}} - c^{-(v-h)\sqrt{-1}}\right) \\ &\quad - \sqrt{-1}\,.\,sA\left(c^{w\sqrt{-1}} + c^{-w\sqrt{-1}}\right) \\ \cos b\left(c^{(l-h-\Gamma)\sqrt{-1}} + c^{-(l-h-\Gamma)\sqrt{-1}}\right) &= c^{(v-h)\sqrt{-1}} + c^{-(v-h)\sqrt{-1}} \\ &\quad - \sqrt{-1}\,.\,sA\left(c^{w\sqrt{-1}} - c^{-w\sqrt{-1}}\right) \end{aligned}$$

aus welchen man durch Addition und Multiplication mit $\frac{1}{2}\,c^{-w\sqrt{-1}}$ die folgende erhält,

$$\begin{aligned} \cos b\, c^{(l-h-\Gamma-w)\sqrt{-1}} &= c^{-w\sqrt{-1}}\cos^2\tfrac{1}{2}k\, c^{(v-h)\sqrt{-1}} \\ &\quad + c^{-w\sqrt{-1}}\sin^2\tfrac{1}{2}k\, c^{-(v-h)\sqrt{-1}} - As\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Die Vergleichung der obigen dritten Gleichung mit der dritten (14) giebt sogleich

$$s = \sin i \sin (v - \sigma) - \sin k \sin (v - h)$$

oder nach Einführung der imaginären Exponentialfunctionen

$$s\sqrt{-1} = \sin \tfrac{1}{2}i \cos \tfrac{1}{2}i \,(c^{(v-h)\sqrt{-1}} - c^{-(v-\sigma)\sqrt{-1}})$$
$$- \sin \tfrac{1}{2}k \cos \tfrac{1}{2}k \,(c^{(v-h)\sqrt{-1}} - c^{-(v-h)\sqrt{-1}})$$

Substituirt man diesen Werth von $s\sqrt{-1}$ in die vorstehende Gleichung, und setzt zur Abkürzung

$$y = c^{-w\sqrt{-1}},\quad a = c^{(\sigma-h)\sqrt{-1}}$$

so wird

$$\cos b\, c^{(l-h-\Gamma-w)\sqrt{-1}} = y \cos^2 \tfrac{1}{2}k\, c^{(v-h)\sqrt{-1}} + y \sin^2 \tfrac{1}{2}k\, c^{-(v-h)\sqrt{-1}}$$
$$- A \left\{\tfrac{1}{a} \sin \tfrac{1}{2}i \cos \tfrac{1}{2}i - \sin \tfrac{1}{2}k \cos \tfrac{1}{2}k\right\} c^{(v-h)\sqrt{-1}}$$
$$+ A \left\{a \sin \tfrac{1}{2}i \cos \tfrac{1}{2}i - \sin \tfrac{1}{2}k \cos \tfrac{1}{2}k\right\} c^{-(v-h)\sqrt{-1}}$$

Eine zweite Gleichung bekommt man, wenn man in dieser allenthalben $-\sqrt{-1}$ statt $\sqrt{-1}$ schreibt.

Die beiden ersten (14) werden zuerst

$$\cos b\,(c^{(l-\theta)\sqrt{-1}} - c^{-(l-\theta)\sqrt{-1}}) = \cos i\,(c^{(v-\sigma)\sqrt{-1}} - c^{-(v-\sigma)\sqrt{-1}})$$
$$\cos b\,(c^{(l-\theta)\sqrt{-1}} + c^{-(l-\theta)\sqrt{-1}}) = \qquad c^{(v-\sigma)\sqrt{-1}} + c^{-(v-\sigma)\sqrt{-1}}$$

addirt man diese, multiplicirt das Product mit

$$\tfrac{1}{2} c^{(\theta-h-\Gamma-w)\sqrt{-1}}$$

und setzt zur Abkürzung

$$x = c^{(\theta-h-\Gamma-w)\sqrt{-1}}$$

so ergiebt sich

$$\cos b\, c^{(l-h-\Gamma-w)\sqrt{-1}} = \frac{x}{a} \cos^2 \tfrac{1}{2}i\, c^{(v-h)\sqrt{-1}} + xa \sin^2 \tfrac{1}{2}i\, c^{-(v-h)\sqrt{-1}}$$

woraus wieder durch Vertauschung von $\sqrt{-1}$ mit $-\sqrt{-1}$ eine reciproke Gleichung hervorgeht. Vergleicht man nun die beiden eben gefundenen Gleichungen, und setzt die Coefficienten von $c^{(v-h)\sqrt{-1}}$ und $c^{-(v-h)\sqrt{-1}}$ jeden für sich gleich Null, so bekommt man die folgenden linearischen Gleichungen in $x$ und $y$

$$0 = x \cos^2 \tfrac{1}{2}i - ya \cos^2 \tfrac{1}{2}k + A\,(\sin \tfrac{1}{2}i \cos \tfrac{1}{2}i - a \sin \tfrac{1}{2}k \cos \tfrac{1}{2}k)$$
$$0 = xa \sin^2 \tfrac{1}{2}i - y \sin^2 \tfrac{1}{2}k - A\,(a \sin \tfrac{1}{2}i \cos \tfrac{1}{2}i - \sin \tfrac{1}{2}k \cos \tfrac{1}{2}k)$$

und hieraus wieder durch die genannte Verwandelung zwei reciproke Gleichungen, die aber nicht hingeschrieben zu werden brauchen. Auf diesen Gleichungen beruht die Auflösung der Aufgabe. Aus den vorstehenden Gleichungen kann man aber nur die Quotienten $\frac{A}{x}$ und $\frac{A}{y}$ erhalten, und die reciproken Gleichungen können nur die Producte $Ax$ und $Ay$ geben, $k$ bleibt deshalb unbestimmbar, und ist nicht minder willkührlich wie $h$. Eliminirt man wechselsweise $x$ und $y$ aus den vorstehenden Gleichungen, so bekommt man zuerst

$$0 = y\left\{a^2\cos^2\tfrac{1}{2}k\sin^2\tfrac{1}{2}i - \sin^2\tfrac{1}{2}k\cos^2\tfrac{1}{2}i\right\}$$
$$+ A\left\{a^2\sin\tfrac{1}{2}k\cos\tfrac{1}{2}k\sin^2\tfrac{1}{2}i - a\sin\tfrac{1}{2}i\cos\tfrac{1}{2}i + \sin\tfrac{1}{2}k\cos\tfrac{1}{2}k\cos^2\tfrac{1}{2}i\right\}$$
$$0 = x\left\{a^2\cos^2\tfrac{1}{2}k\sin^2\tfrac{1}{2}i - \sin^2\tfrac{1}{2}k\cos^2\tfrac{1}{2}i\right\}$$
$$- A\left\{a^2\cos^2\tfrac{1}{2}k\sin\tfrac{1}{2}i\cos\tfrac{1}{2}i - a\sin\tfrac{1}{2}k\cos\tfrac{1}{2}k + \sin^2\tfrac{1}{2}k\sin\tfrac{1}{2}i\cos\tfrac{1}{2}i\right\}$$

Es ist aber leicht zu finden, dass in diesen beiden Gleichungen

$$a\cos\tfrac{1}{2}k\sin\tfrac{1}{2}i - \sin\tfrac{1}{2}k\cos\tfrac{1}{2}i$$

allgemeiner Factor ist, dividirt man daher damit, so wird

$$\left.\begin{aligned}\frac{A}{y} &= \frac{a\cos\frac{1}{2}k\sin\frac{1}{2}i + \sin\frac{1}{2}k\cos\frac{1}{2}i}{\cos\frac{1}{2}k\cos\frac{1}{2}i - a\sin\frac{1}{2}k\sin\frac{1}{2}i}\\ \frac{A}{x} &= \frac{a\cos\frac{1}{2}k\sin\frac{1}{2}i + \sin\frac{1}{2}k\cos\frac{1}{2}i}{a\cos\frac{1}{2}k\cos\frac{1}{2}i - \sin\frac{1}{2}k\sin\frac{1}{2}i}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

womit die Aufgabe vollständig gelöst, und nur der Uebergang zum Reellen auszuführen ist. Dieser kann auf mehrere Arten bewirkt werden. Die erste Gleichung $(A)$ nebst ihrer reciproken geben durch Addition und Subtraction, und nachdem man Zähler und Nenner mit $a$ dividirt hat,

$$A\left(\frac{1}{y} \pm y\right) = \frac{(1 \pm 1)\sin\frac{1}{2}k\cos\frac{1}{2}k(\cos^2\frac{1}{2}i \mp \sin^2\frac{1}{2}i) + \left(a \pm \frac{1}{a}\right)(\cos^2\frac{1}{2}k \mp \sin^2\frac{1}{2}k)\sin\frac{1}{2}i\cos\frac{1}{2}i}{\cos^2\frac{1}{2}k\cos^2\frac{1}{2}i + \sin^2\frac{1}{2}k\sin^2\frac{1}{2}i - \left(a + \frac{1}{a}\right)\sin\frac{1}{2}k\cos\frac{1}{2}k\sin\frac{1}{2}i\cos\frac{1}{2}i}$$

Substituirt man hierin die oben angegebenen Werthe von $y$ und $a$ und geht zum Reellen über, so wird

$$\left.\begin{aligned}A\sin w &= \frac{\sin i\sin(\sigma - h)}{\varkappa}\\ A\cos w &= \frac{\sin k\cos i + \cos k\sin i\cos(\sigma - h)}{\varkappa}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (17)$$

wo

$$\varkappa = 1 + \cos k\cos i - \sin k\sin i\cos(\sigma - h)$$

ist. Die Gleichungen $(A)$ geben zu erkennen, dass man die Gleichung für $Ax$ auch durch blose Vertauschung von $k$ und $i$ aus der für $\frac{A}{y}$ erhält, und

in Folge dieser Bemerkung erhält man aus den vorstehenden Gleichungen für $A \sin w$ und $A \cos w$ sogleich,

$$(18) \qquad \begin{cases} A \sin(\theta - h - \Gamma - w) = \dfrac{\sin k \sin(\sigma - h)}{\varkappa} \\ A \cos(\theta - h - \Gamma - w) = \dfrac{\cos k \sin i + \sin k \cos i \cos(\sigma - h)}{\varkappa} \end{cases}$$

Der Quotient aus den Gleichungen ($A$) ist

$$\frac{x}{y} = \frac{a \cos\frac{1}{2}k \cos\frac{1}{2}i - \sin\frac{1}{2}k \sin\frac{1}{2}i}{\cos\frac{1}{2}k \cos\frac{1}{2}i - a \sin\frac{1}{2}k \sin\frac{1}{2}i}$$

Hieraus und aus der reciproken Gleichung folgt

$$\frac{x}{y} \pm \frac{y}{x} = \frac{\left(a \pm \frac{1}{a}\right)(\cos^2\frac{1}{2}k \cos^2\frac{1}{2}i \pm \sin^2\frac{1}{2}k \sin^2\frac{1}{2}i) - (2 \pm 2) \sin\frac{1}{2}k \cos\frac{1}{2}k \sin\frac{1}{2}i \cos\frac{1}{2}i}{\cos^2\frac{1}{2}k \cos^2\frac{1}{2}i + \sin^2\frac{1}{2}k \sin^2\frac{1}{2}i - \left(a + \frac{1}{a}\right) \sin\frac{1}{2}k \cos\frac{1}{2}k \sin\frac{1}{2}i \cos\frac{1}{2}i}$$

und wenn man hievon zum Rellen übergeht,

$$(19) \ldots \begin{cases} \sin(\theta - h - \Gamma) = \dfrac{(\cos k + \cos i) \sin(\sigma - h)}{\varkappa} \\ \cos(\theta - h - \Gamma) = \dfrac{(1 + \cos k \cos i) \cos(\sigma - h) - \sin k \sin i}{\varkappa} \end{cases}$$

Multiplicirt man die erste ($A$) mit ihrer reciproken, und setzt $A = \operatorname{tg} \eta$, so zeigt sich dass man

$$\sin^2\eta = z(a \cos\tfrac{1}{2}k \sin\tfrac{1}{2}i + \sin\tfrac{1}{2}k \cos\tfrac{1}{2}i)(\cos\tfrac{1}{2}k \sin\tfrac{1}{2}i + a \sin\tfrac{1}{2}k \cos\tfrac{1}{2}i)$$
$$\cos^2\eta = z(\cos\tfrac{1}{2}k \cos\tfrac{1}{2}i - a \sin\tfrac{1}{2}k \sin\tfrac{1}{2}i)(a \cos\tfrac{1}{2}k \cos\tfrac{1}{2}i - \sin\tfrac{1}{2}k \sin\tfrac{1}{2}i)$$

setzen darf, wenn man $z$ so bestimmt, dass die Summe dieser beiden Gleichungen Eins wird. Man findet durch diese Bedingung

$$z = \frac{1}{a}$$

Das Product und der Quotient aus den Gleichungen ($A$) geben nun mit Zuziehung der vorstehenden Gleichungen

$$\frac{1}{xy} \sin^2\eta = \frac{1}{a}(a \cos\tfrac{1}{2}k \sin\tfrac{1}{2}i + \sin\tfrac{1}{2}k \cos\tfrac{1}{2}i)^2$$
$$\frac{x}{y} \cos^2\eta = \frac{1}{a}(a \cos\tfrac{1}{2}k \cos\tfrac{1}{2}i - \sin\tfrac{1}{2}k \sin\tfrac{1}{2}i)^2$$

Zieht man aus jeder dieser beiden die Quadratwurzel, und addirt und subtrahirt die reciproken Gleichungen, so ergiebt sich sogleich

$$\sin\eta\left(\sqrt{xy} \pm \frac{1}{\sqrt{xy}}\right) = \left(\sqrt{a} \pm \frac{1}{\sqrt{a}}\right)(\sin\tfrac{1}{2}k \cos\tfrac{1}{2}i \pm \cos\tfrac{1}{2}k \sin\tfrac{1}{2}i)$$
$$\cos\eta\left(\sqrt{\frac{x}{y}} \pm \sqrt{\frac{y}{x}}\right) = \left(\sqrt{a} \pm \frac{1}{\sqrt{a}}\right)(\cos\tfrac{1}{2}k \cos\tfrac{1}{2}i \mp \sin\tfrac{1}{2}k \sin\tfrac{1}{2}i)$$

woraus

$$\left.\begin{aligned}
\sin\eta\,\sin\tfrac{1}{2}\,(\theta-h-\Gamma-2w) &= \sin\tfrac{1}{2}\,(k-i)\,\sin\tfrac{1}{2}\,(\sigma-h)\\
\sin\eta\,\cos\tfrac{1}{2}\,(\theta-h-\Gamma-2w) &= \sin\tfrac{1}{2}\,(k+i)\,\cos\tfrac{1}{2}\,(\sigma-h)\\
\cos\eta\,\sin\tfrac{1}{2}\,(\theta-h-\Gamma\quad\;\;) &= \cos\tfrac{1}{2}\,(k-i)\,\sin\tfrac{1}{2}\,(\sigma-h)\\
\cos\eta\,\cos\tfrac{1}{2}\,(\theta-h-\Gamma\quad\;\;) &= \cos\tfrac{1}{2}\,(k+i)\,\cos\tfrac{1}{2}\,(\sigma-h)
\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

folgt. *) Diese Gleichungen geben die drei unbekannten Grossen $\Gamma$, $w$ und $\eta$ insgesammt, und zeigen ohne Weiteres deren geometrische Bedeutung, wonach man sie leicht construiren kann. Es sind nemlich zufolge dieser Gleichungen $180°-2\eta$, $k$ und $i$ die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks, in welchem die gegenüber liegenden Seiten bez. $\sigma-h$, $\theta-h-\Gamma-w$ und $w$ sind.

## 9.

Da die Bögen $k$ und $h$ willkührlich sind, so kann man setzen

$$k=i_0\,;\quad h=\theta_0$$

wo wie oben $i_0$ der Werth von $i$, und $\theta_0$ der Werth von $\sigma$ und $\theta$ für den Zeitpunkt $t=0$ ist. Durch diese Annahme werden aber $s$ und $w$ kleine Grössen von der Ordnung der störenden Kraft, und $\Gamma$ wird eine kleine Grösse von der Ordnung des Quadrats dieser Kraft; die die Lage der Bahn betreffenden Störungen sind somit in den Gleichungen (16) von den endlichen Gliedern abgesondert. Setzt man

$$\begin{aligned}
p &= \sin i\,\sin(\sigma-\theta_0)\\
q &= \sin i\,\cos(\sigma-\theta_0)-\sin i_0
\end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned}
s &= q\,\sin(v-\theta_0)-p\,\cos(v-\theta_0)\\
\varkappa &= \cos i_0\,(\cos i_0+\cos i)-q\,\sin i_0
\end{aligned}$$

und zufolge der (17) gehen die (16) über in

$$\left.\begin{aligned}
\cos b\,\sin(l-\theta_0-\Gamma) &= \cos i_0\,\sin(v-\theta_0)-s\left(\operatorname{tg} i_0+\frac{q}{\varkappa\cos i_0}\right)\\
\cos b\,\cos(l-\theta_0-\Gamma) &= \qquad\;\;\cos(v-\theta_0)+s\,\frac{p}{\varkappa}\\
\sin b\qquad\qquad\quad &= \sin i_0\,\sin(v-\theta_0)+s
\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

die eine sehr bequeme Anwendung zulassen, da in den meisten Fällen die Grössen zweiter Ordnung, die darin vorkommen, nemlich $\Gamma$, $s\frac{p}{\varkappa}$ und $s\frac{q}{\varkappa\cos i_0}$, ganz unmerklich sind. In den seltenen Fällen, wo sie nicht ganz

*) Wie man sieht, vermitteln die Gleichungen (A) eine kurze Ableitung der Gaussischen trigonometrischen Formeln aus den gewöhnlichen.

unmerklich wären, können sie entweder durch Reihenentwickelungen oder durch Quadraturen leicht ermittelt, und in Tafeln gebracht werden.*)

10.

Die Grösse $\Gamma$ kann auf folgende Weise durch eine Quadratur gefunden werden. Differentiirt man die Gleichungen (19), indem man $i$, $\sigma$ und $\theta$ veränderlich setzt, dabei auf die Gleichung (15) Rücksicht nimmt, und $i_0$ statt $k$, so wie $\theta_0$ statt $h$ schreibt, so erhält man leicht

$$d\Gamma = -\frac{\sin i_0 \sin(\sigma-\theta_0)}{\varkappa} di + \frac{\sin i - \sin i_0 \cos(\sigma-\theta_0)}{\varkappa \cos i} \sin i d\sigma$$

Die Ausdrücke des vor. Art. für $p$ und $q$ geben aber

$$\cos i di = \sin(\sigma - \theta_0) dp + \cos(\sigma - \theta_0) dq$$
$$\sin i d\sigma = \cos(\sigma - \theta_0) dp - \sin(\sigma - \theta_0) dq$$

und hiemit wird

$$\Gamma = \int \frac{q dp - p dq}{\varkappa \cos i}$$

wo die Differentiale in Bezug auf die Zeit verstanden werden müssen, und die hinzuzufügende Constante so bestimmt werden muss, dass das Integral für $t = 0$ Null wird. Da $p$ und $q$ von der ersten Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte sind, so zeigt diese Gleichung, dass $\Gamma$ von der Ordnung des Quadrats derselben ist, wie schon oben angeführt wurde. Um die Differentiale von $p$ und $q$ auf die störenden Kräfte selbst hinzuführen, bemerke ich, dass

$$p = -\alpha'' \cos\theta_0 - \beta'' \sin\theta_0$$
$$q = -\alpha'' \sin\theta_0 + \beta'' \cos\theta_0 - \sin i_0$$

ist, differentiirt man diese und substituirt die Gleichungen (12), so wird

$$(22) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} = hr \sin(v - \theta_0) \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) \cos i \\ \frac{dq}{dt} = hr \cos(v - \theta_0) \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) \cos i \end{cases}$$

wo die den Integrationen hinzuzufügenden Constanten so bestimmt werden müssen, dass $p$ und $q$ Null werden, wenn $t = 0$ ist.

Diese Gleichungen geben Veranlassung zu einem andern einfachen und bequemen Ausdruck für $\Gamma$. Substituirt man sie in den obigen Aus-

*) In der Bewegung des Mondes geben diese Glieder ein paar Secunden, die meinen neuen Mondtafeln einverleibt sind.

druck für diese Grösse, und nimmt auf den Ausdruck für $s$ Rücksicht, so bekommt man

$$\Gamma = \int \frac{hrs}{\varkappa} \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) dt$$

wo gleichwie in (22) $h$ der Gleichung (13*) entsprechen muss. Da der Cubus der störenden Kräfte hier wohl nie merklichen Einfluss äussern kann, so darf man $h$ constant, und $\varkappa = 2\cos^2 i_0$ setzen, es wird daher mit hinreichender Genauigkeit

$$\Gamma = \frac{h}{2\cos^2 i_0} \int rs \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

11.

Die Grössen $p$ und $q$ kann man auch auf $s$ und dessen Differential hinführen. Da $s$ eine ideale Coordinate ist, so giebt

$$s = q \sin(v - \theta_0) - p \cos(v - \theta_0)$$

durch die Differentiation

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\, q \cos(v - \theta_0) + \frac{dv}{dt}\, p \sin(v - \theta_0)$$

und aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$p = -\, s \cos(v - \theta_0) + \frac{ds}{dv} \sin(v - \theta_0)$$

$$q = \quad s \sin(v - \theta_0) + \frac{ds}{dv} \cos(v - \theta_0)$$

die man benutzen kann, wenn die Producte $sp$ und $sq$ in den Gleichungen (21) merkliches geben sollten. In diesen Fällen darf man auch in den Gliedern $\frac{sq}{\varkappa \cos i_0}$ und $\frac{sp}{\varkappa}$ für $\varkappa$ den obigen Werth $\varkappa = 2\cos^2 i_0$ setzen. Übrigens kann man auch $\frac{1}{\varkappa}$ leicht in eine unendliche Reihe auflösen, und findet deren erste Glieder wie folgt

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{2\cos^2 i_0} + \frac{\sin i_0}{2\cos^4 i_0}\, q + \ldots$$

man wird aber nie Veranlassung haben, sich dieser zu bedienen.

Ich führe noch an, dass in allen vorhergehenden und nachfolgenden Ausdrücken die Grösse der Neigungen $i$ oder $i_0$ nicht beschränkt ist, sondern jeden möglichen Werth haben kann. Jedoch wird $\Gamma$ unendlich gross, wenn $i_0 = 90^0$ ist, und es ist leicht einzusehen, dass in diesem Falle eine Reduction der Längen auf die Fundamentalebene an sich unmöglich ist; dieser Fall kann auch immer vermieden werden.

## § 2. Ableitung der Differentialgleichungen für die Störungen der Zeit, des Logarithmus des Radius Vectors, und der auf der Fundamentalebene senkrecht stehenden Coordinate.

### 12.

Nehmen wir irgend eine feste, durch die Sonne gelegte Ebene als Fundamentalebene an, und bezeichnen in derselben die feste Achse der $x$. Denken wir uns für irgend einen Planeten (oder Kometen) die $XY$ Ebene in der Lage hinzu, die sie für die Zeit $t = 0$ hat, und bezeichnen in dieser nach Vorschrift des Art. 6 die Achse der $X$. Die Neigung dieser beiden Ebenen gegen einander werde mit $i_0$, und der Winkel, den die positive Achse der $x$ (und also auch die der $X$) mit dem aufsteigenden Knoten der $XY$ Ebene auf der Fundamentalebene macht, mit $\theta_0$ bezeichnet. In dieser $XY$ Ebene wird sich der Planet (oder Komet) fortwährend, und in einem unveränderten Kegelschnitt bewegen, wenn keine störenden Kräfte vorhanden sind; wenn aber solche auf ihn einwirken, so wird er sich in dieser Ebene und in diesem Kegelschnitt, wenigstens in dem sich an den Zeitpunkt $t = 0$ anschliessenden, unendlich kleinen Zeittheilchen $dt$ bewegen. Seien die Elemente dieses Kegelschnitts:

$T_0$ die Durchgangszeit durch das Perihel,

$p_0$ der halbe Parameter,

$e_0$ die Excentricität,

$\pi_0$ der Winkel zwischen der positiven Achse der $X$ und dem Perihel.

Nennen wir ausserdem $r$ den Radius Vector des Planeten, $v$ den Winkel den die positive Achse der $X$ mit dem Radius Vector macht, $f$ die wahre Anomalie, $m$ die Masse, und $k^2$ die Intensität der anziehenden Kraft für die Einheit der Geschwindigkeit, Entfernung und Masse, so gelten die folgenden Gleichungen für jeden Kegelschnitt und der Bewegung in demselben,

$$\frac{df}{dt} = \frac{k\sqrt{p_0(1+m)}}{r^2}$$

$$r = \frac{p_0}{1 + e_0 \cos f}$$

$$v = f + \pi_0$$

und geben also nach der Integration der ersten derselben in jedem Falle die oben beschriebene Bewegung.

## 13.

Die Integration der vorstehenden Differentialgleichung muss bekanntlich für jede Gattung von Kegelschnitt besonders ausgeführt werden. Für die Ellipse setzt man

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varepsilon = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} f \sqrt{\frac{1-e_0}{1+e_0}}$$

worauf sich

$$\varepsilon - e_0 \sin \varepsilon = \frac{k\,(t-T_0)\sqrt{1+m}}{a_0^{\frac{3}{2}}}$$

ergiebt, wenn mit $a_0$ die halbe grosse Achse der Ellipse bezeichnet, das ist

$$a_0 = \frac{p_0}{1-e_0^2}$$

gesetzt wird. Für die Parabel erhält man sogleich

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} f + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \tfrac{1}{2} f = \frac{2k\,(t-T_0)\sqrt{1+m}}{p_0^{\frac{3}{2}}}$$

Für die Hyperbel endlich setzt man

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} f \sqrt{\frac{e_0-1}{e_0+1}}$$

worauf man

$$e_0 \operatorname{tg} F - \text{log. nat. } \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2} F) = \frac{k\,(t-T_0)\sqrt{1+m}}{a_0^{\frac{3}{2}}}$$

erhält, wo

$$a_0 = \frac{p_0}{e_0^2-1}$$

ist. Fügt man diesen die Gleichungen

$$r = \frac{p_0}{1+e_0\cos f},\quad v = f + \pi_0$$

$$\cos b \sin(l-\theta_0) = \cos i_0 \sin(v-\theta_0)$$

$$\cos b \cos(l-\theta_0) = \cos(v-\theta_0)$$

$$\sin b = \sin i_0 \sin(v-\theta_0)$$

hinzu, wo $b$ und $l$ dieselbe Bedeutung haben wie im Art. 9, so kann man jedenfalls durch dieselben die Elemente $T_0$, $p_0$, $e_0$, $\pi_0$, $i_0$, $\theta_0$ so bestimmen, dass sie den Ort und die Geschwindigkeit des Planeten (oder Kometen) im Zeitpunkt $t = 0$ darstellen, und eine einfache Abänderung dieser Gleichungen reicht hin, um durch dieselben mit Beibehaltung der eben genannten Elemente den Ort und die Geschwindigkeit des Planeten (oder Kometen) in jedem Zeitpunkt darzustellen. Schreibt man nemlich in den vorstehenden Gleichungen $z$ statt $t$, multiplicirt den Ausdruck des Radius Vectors mit einem Factor, den ich $1+\nu$ nennen werde, und

wendet statt der vorstehenden Gleichungen für $l$ und $b$ die Gleichungen (21) an, so kann man die drei Grössen $z$, $\nu$ und $s$ so bestimmen, dass diese Gleichungen denen der gestörten Bewegung Gnüge leisten, und daher den Ort und die Geschwindigkeit des Planeten (oder Kometen) in jedem Zeitpunkt darstellen. Die Aufgabe besteht also darin, die Differentiale von $z$, $\nu$ und $s$ in Function der störenden Kräfte auszudrücken.

Ich werde zuerst die Gleichungen für $z$ und $\nu$, und dann die Gleichung für $u = rs$ statt der für $s$ selbst ableiten. Es wird hiemit zufolge der Gleichungen (21)

$$r \sin b = r \sin i_0 \sin(v - \theta_0) + u$$

und $u$ ist also die Änderung, die die störenden Kräfte in der auf der Fundamentalebene senkrecht stehenden Coordinate des Planeten (oder Kometen) bewirken.

14.

Da durch die Einführung von $z$ statt $t$ die Grössen $f$, $\varepsilon$, $F$ und $r$ ihre Werthe ändern, so will ich zur Unterscheidung diese mit $\bar{f}$, $\bar{\varepsilon}$, $\bar{F}$ und $\bar{r}$ bezeichnen. Es wird also in der gestörten Bewegung, in der Ellipse

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\bar{\varepsilon} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\bar{f} \sqrt{\frac{1 - e_0}{1 + e_0}}$$

$$\bar{\varepsilon} - e_0 \sin \bar{\varepsilon} = \frac{k(z - T_0)\sqrt{1 + m}}{a_0^{\frac{3}{2}}}$$

$$a_0 = \frac{p_0}{1 - e_0^2}$$

in der Parabel

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\bar{f} + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \tfrac{1}{2}\bar{f} = \frac{2k(z - T_0)\sqrt{1 + m}}{p_0^{\frac{3}{2}}}$$

in der Hyperbel

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\bar{F} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\bar{f} \sqrt{\frac{e_0 - 1}{e_0 + 1}}$$

$$e_0 \operatorname{tg} \bar{F} - \text{log. nat. tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\bar{F}) = \frac{k(z - T_0)\sqrt{1 + m}}{a_0^{\frac{3}{2}}}$$

$$a_0 = \frac{p_0}{e_0^2 - 1}$$

und es versteht sich von selbst, dass ausser diesen Gleichungen selbst auch die bekannten Reihenentwickelungen derselben in den betreffenden Fällen Geltung haben. Ferner wird in jeder Gattung der Kegelschnitte

$$v = \bar{f} + \pi_0$$

$$\bar{r} = \frac{p_0}{1 + e_0 \cos \bar{f}}$$

$$r = \bar{r}\,(1 + \nu)$$ (*

15.

Differentiirt man die Gleichung

$$1 + \nu = \frac{r}{\bar{r}}$$

zwei Mal, so bekommt man

$$d^2\nu = \frac{\bar{r}d^2r - rd^2\bar{r}}{\bar{r}^2} - 2\,\frac{\bar{r}dr - rd\bar{r}}{\bar{r}^3}\,d\bar{r}$$

Führt man statt des halben Parameters $p_0$ die Grösse $h_0$ durch folgende Gleichung ein

$$h_0 = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p_0}}$$

und erlaubt sich der Kürze wegen allenthalben den Factor $1+m$ zu übergehen, indem stets nur das Product $k^2(1+m)$, oder dessen Potenzen vorkommen, so wird

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{h_0^2}{k^2} + \frac{h_0^2 e_0 \cos \bar{f}}{k^2}$$

und da $dv = d\bar{f}$ ist, so wird das Differential dieser Gleichung

$$\frac{d\bar{r}}{\bar{r}^2} = \frac{h_0^2 e_0 \sin \bar{f}}{k^2}\,dv$$

und das Differential hievon

$$\frac{d^2\bar{r}}{\bar{r}^2} - 2\,\frac{d\bar{r}^2}{\bar{r}^3} = \frac{h_0^2 e_0 \sin \bar{f}}{k^2}\,d^2v + \left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{h_0^2}{k^2}\right)dv^2$$

Multiplicirt man die erste dieser mit $2dr$, die zweite mit $r$, und addirt, so erhält man

$$\frac{rd^2\bar{r}}{\bar{r}^2} + 2\,\frac{\bar{r}dr - rd\bar{r}}{\bar{r}^3}\,d\bar{r} = \frac{h_0^2 e_0 \sin \bar{f}}{k^2 r}\,d.r^2dv + \left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{h_0^2}{k^2}\right)rdv^2$$

und die Substitution dieser in den obigen Ausdruck für $d^2\nu$ giebt

---

(* Ich habe hier den Factor $1+\nu$ statt des früher angewandten Factors $e^w$ eingeführt, weil die Differentialgleichung für $\nu$ einfacher wird, wie die für $w$, und die Anwendung der einen dieser Grössen eben so einfach ist, wie die der anderen. Da hienach

$$w = \text{log. nat.}\,(1 + \nu)$$

wird, so finden zwischen diesen beiden Grössen auch folgende Relationen statt

$$w = \nu - \tfrac{1}{2}\nu^2 + \tfrac{1}{3}\nu^3 \mp \text{etc.}$$
$$\nu = w + \tfrac{1}{2}w^2 + \tfrac{1}{6}w^3 + \text{etc.}$$

und mit bloser Rücksichtnahme auf die erste Potenz der störenden Kräfte ist also $\nu = w$.

(24) $$d^2\nu = \frac{1}{r}\left\{d^2r - rdv^2\right\} - \frac{h_0{}^2 e_0 \sin f}{k^2 r} d.r^2dv + \frac{h_0{}^2}{k^2} rdv^2$$

Die Gleichungen (13) lassen sich wie folgt stellen

(a) . . . . . . . . . . . . . $$\frac{d.r^2dv}{dt^2} = k^2\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$$

(b) . . . . . . . . . . $$\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{dv^2}{dt^2} = k^2\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) - \frac{k^2}{r^2}$$

deren erste sogleich

$$\frac{r^2dv}{dt} = \text{const} + k^2\int\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)dt$$

giebt. Führen wir $h_0$ in die Differentialgleichung des Art. 12 ein, und schreiben $dv$ statt $df$, so wird für $t = 0$

$$\frac{r^2dv}{dt} = \frac{k^2}{h_0}$$

und das vorstehende Integral wird daher unter der Bedingung, dass das Glied unter dem Integralzeichen so genommen werde, dass es für $t = 0$ Null wird,

(c) . . . . . . . . . . . $$\frac{r^2dv}{dt} = \frac{k^2}{h_0} + k^2\int\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)dt$$

Bezieht man nun in der Gleichung (24) alle Differentiale auf die Zeit, so kann man die Functionen $d.r^2dv$, $d^2r - rdv^2$ und $dv^2$ durch die Gleichungen (a), (b) und (c) eliminiren, nimmt man ausserdem auf die Gleichung

$$\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{r} = \frac{\nu}{r}$$

Rücksicht, so giebt diese Elimination sogleich

(25) . . . . . . . $$\frac{d^2\nu}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3}\nu + V + 2\frac{k^2}{r^3}S + \frac{k^2}{r^3}S^2$$

wo zur Abkürzung

$$V = \frac{k^2}{\bar{r}}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) - \frac{h_0{}^2 e_0 \sin f}{r}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$$

$$S = h_0\int\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)dt$$

gesetzt ist. Dieses ist die Differentialgleichung für $\nu$, und die beiden den Integrationen hinzuzufügenden Constanten müssen so bestimmt werden, dass für $t = 0$ beides $\frac{d\nu}{dt}$ und $\nu$ Null werden.

16.

Um die Differentialgleichung für $z$ zu erhalten, erinnere ich daran, dass in allen Gleichungen des Art. 14 $z$ statt $t$ gesetzt worden ist, und dass daher durch deren Differentiation die einzige Gleichung

$$\frac{dv}{dz} = \frac{k^2}{h_0 r^2}$$

hervorgeht. Es wird daher

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k^2}{h_0 r^2} \frac{dz}{dt}$$

woraus sich nach der Elimination von $dv$ durch $(c)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1 + S}{(1 + \nu)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

ergiebt, welches die Differentialgleichung für $z$ ist. Setzt man

$$z = t + \delta z$$

so kann man statt der vorhergehenden die folgende anwenden, die daraus hervorgeht,

$$\frac{d\delta z}{\delta t} = \frac{S - 2\nu - \nu^2}{(1 + \nu)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

bei deren Integration die Constante so bestimmt werden muss, dass $\delta z$ Null für $t = 0$ wird.

Wenn der Planet (oder Komet) sich in einer Ellipse von solcher Excentricität bewegt, dass man die mittlere Anomalie ohne Ungenauigkeit zu befürchten anwenden kann, so kann man, wenn $n_0$ die mittlere Bewegung bezeichnet, die dem Zeitpunkt $t = 0$, das ist der Gleichung

$$a_0^3 n_0^2 = k^2 (1 + m)$$

entspricht, durch die vorstehende Gleichung sogleich das Product $n_0 \delta z$ statt $\delta z$ berechnen, und dann wird

$$\bar{\varepsilon} - e_0 \sin \bar{\varepsilon} = n_0 t + c_0 + n_0 \delta z,$$

wenn $c_0 = - n_0 T_0$ gesetzt wird, und also die mittlere Anomalie für $t = 0$ bedeutet; $n_0 \delta z$ bedeutet hierauf die Störungen der mittleren Anomalie, oder, welches hier einerlei ist, die Störungen der mittleren Länge. In diesem Falle nimmt die Constante $h_0$ den folgenden Ausdruck an

$$h_0 = \frac{a_0 n_0}{\sqrt{1 - e_0^2}}$$

ich bemerke noch, dass $h_0$ für $t = 0$ dieselbe Grösse ist, die in den Art. 4 und 5 allgemein mit $h$ bezeichnet wurde.

17.

Wenden wir uns zur Differentialgleichung für $u$ oder $rs$. Setzt man zur Abkürzung

$$r \cos (v - \theta_0) = \xi \,, \quad r \sin (v - \theta_0) = \eta$$

so geht die Gleichung für $s$ im Art. 9 in folgende über

$$u = q\eta - p\xi$$

und da $u$ eine ideale Coordinate ist, so giebt die Differentiation

$$\frac{du}{dt} = q\frac{d\eta}{dt} - p\frac{d\xi}{dt}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = q\frac{d^2\eta}{dt^2} - p\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{dq}{dt}\frac{d\eta}{dt} - \frac{dp}{dt}\frac{d\xi}{dt}$$

Die Gleichungen (22) werden nun

$$\frac{dp}{dt} = h\eta\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i\,;\quad \frac{dq}{dt} = h\xi\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i$$

und da $\theta_0$ constant ist, so wird den Gleichungen (11) analog

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k^2\frac{\xi}{r^3} + k^2\left(\frac{d\Omega}{d\xi}\right)$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -k^2\frac{\eta}{r^3} + k^2\left(\frac{d\Omega}{d\eta}\right)$$

und der Gleichung (11*) analog

$$\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt} = \frac{k^2}{h}$$

die obige Gleichung für $d^2u$ wird hiemit sogleich

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3}u + k^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i + k^2\left\{q\left(\frac{d\Omega}{d\eta}\right) - p\left(\frac{d\Omega}{d\xi}\right)\right\}$$

aus welcher noch $p$ und $q$ eliminirt werden müssen. Zu dem Ende geben die obigen Gleichungen für $u$ und $du$ durch eine leichte Elimination

$$k^2p = h\left\{\eta\frac{du}{dt} - \frac{d\eta}{dt}u\right\}$$

$$k^2q = h\left\{\xi\frac{du}{dt} - \frac{d\xi}{dt}u\right\}$$

womit

$$k^2\left\{q\left(\frac{d\Omega}{d\eta}\right) - p\left(\frac{d\Omega}{d\xi}\right)\right\} = h\left\{\left(\frac{d\Omega}{d\xi}\right)\frac{d\eta}{dt} - \left(\frac{d\Omega}{d\eta}\right)\frac{d\xi}{dt}\right\}u + h\left\{\left(\frac{d\Omega}{d\eta}\right)\xi - \left(\frac{d\Omega}{d\xi}\right)\eta\right\}\frac{du}{dt}$$

wird. Aber die Gleichungen (12*) gehen über in

$$\left(\frac{d\Omega}{d\xi}\right) = -\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)\frac{\eta}{r^2} + \left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\frac{\xi}{r}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{d\eta}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dv}\right)\frac{\xi}{r^2} + \left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\frac{\eta}{r}$$

und es ist ausserdem

$$\xi d\xi + \eta d\eta = \tfrac{1}{2}d.r^2$$

hiemit folgt

$$k\left\{q\left(\frac{d\Omega}{d\eta}\right) - p\left(\frac{d\Omega}{d\xi}\right)\right\} = \left\{\frac{k^2}{r}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) - h\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)\frac{d.r^2}{2r^2dt}\right\}u + h\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)\frac{du}{dt}$$

Dem Vorhergehenden zufolge ist ferner

$$\frac{d.r^2}{dt} = \frac{d.\bar{r}^2}{dt}(1+\nu)^2 + 2\bar{r}^2(1+\nu)\frac{d\nu}{dt}$$

$$\frac{d.\bar{r}^2}{dt} = 2\frac{\bar{r}^3}{k^2} h_0^2 e_0 \sin \bar{f} \frac{d\bar{v}}{dt}$$

und aus Art. 5 folgt $\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{k^2}{h\bar{r}^2}$, also

$$\frac{d.r^2}{dt} = 2\frac{h_0^2}{h}\bar{r} e_0 \sin \bar{f} + 2\bar{r}^2(1+\nu)\frac{d\nu}{dt}$$

Substituirt man diesen Werth, so wird sogleich

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3}u + k^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i + V\frac{u}{1+\nu} + h\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)\left\{\frac{du}{dt} - \frac{u\frac{d\nu}{dt}}{1+\nu}\right\} \qquad (28)$$

wo $V$ dieselbe Grösse ist, die im Art. 15 so benannt wurde. Dieses ist die Differentialgleichung für $u$, bei deren Anwendung die Constanten wieder so bestimmt werden müssen, dass $\frac{du}{dt}$ und $u$ für $t=0$ Null werden.

Die Gleichungen (25), (27) und (28) sind die, welche ich schon in den Astr. Nachr. Nr. 882 und bez. Nr. 799 entwickelt, und auf die Berechnung der Störungen durch mechanische Quadraturen angewandt habe. Sie sind für diesen Zweck besonders dienlich, da sie auf eine kurze und einfache Rechnung hinführen, dagegen sind sie, wie alle anderen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von ähnlicher Form, zur Berechnung der Störungen für die unbestimmt gelassene Zeit, das ist der »absoluten Störungen«, nicht geeignet, sobald die Excentricität des gestörten Planeten nicht g a n z k l e i n ist. Denn wenn dieses nicht der Fall ist, so führen sie auf ein Aggregat von schwach convergirenden Reihen.

## § 3. Ableitung anderer Differentialgleichungen für dieselben im vor. § betrachteten Störungen.

### 18.

Zu Berechnung der »absoluten Störungen«, unter welchen ich diejenigen Ausdrücke der Störungen überhaupt verstehe, die durch analytische Quadraturen erlangt werden, und die daher die Zeit selbst, oder gewisse leicht zu berechnende Functionen der Zeit, explicite enthalten, so dass man durch Substitution der numerischen Werthe dieser Functionen den vollen Betrag der Störungen für eine beliebige Zeit ohne Wei-

teres erhält; zur Berechnung dieser Störungen sind, wie eben angeführt, die im vor. § entwickelten Gleichungen nicht die geeignetsten, und ich werde daher hier andere entwickeln, die diesen Zweck mit so vieler Leichtigkeit, wie die Weitläuftigkeit der Aufgabe überhaupt zulässt, erfüllen. Die zu entwickelnden Grundgleichungen sind mit geringer Änderung dieselben, die ich schon früher gegeben habe, und dass ich diese hier nochmals ableite, geschieht deshalb, weil ich vor mehreren Jahren eine sehr kurze Ableitung derselben gefunden habe, die von den bis jetzt bekannten wesentlich verschieden ist. Die Vornahme dieser Ableitung wird mir überdiess Gelegenheit geben, den Umfang dieser Gleichungen in ein neues Licht zu stellen.

Nennt man überhaupt $a$ die grosse Halbachse, $n$ die mittlere Bewegung, $c$ die mittlere Anomalie für den Zeitpunkt $t = 0$, $e$ die Excentricität, $\chi$ den Winkel in der $XY$ Ebene, welcher sich von der positiven $X$ Achse bis zum Perihel erstreckt, $v$ den Winkel in derselben Ebene zwischen der positiven $X$ Achse und dem Radius Vector, $f$ die wahre Anomalie, $\varepsilon$ die excentrische Anomalie, $r$ den Radius Vector, und behält $k$ und $m$ in der ihnen im Vorhergehenden gegebenen Bedeutung bei, so können diese Elemente immer so bestimmt werden, dass sie nach der Substitution in die Gleichungen der Kegelschnitte und der Bewegung in denselben stets den Ort und die Geschwindigkeit des gestörten Planeten in seiner Bahn, das ist hier in der $XY$ Ebene, geben, und um diese Eigenschaft zu besitzen, müssen sie durch die Methode der Veränderung der willkührlichen Constanten so bestimmt werden, dass sie die osculirenden Elemente des betreffenden Planeten werden. Diese Elemente sind daher veränderliche Grössen, und Functionen der Zeit. Da ich hier vorzugsweise nur die Bewegung in der Ellipse betrachten werde, so sind

$$nt + c = \varepsilon - e \sin\varepsilon$$
$$r\cos f = a\cos\varepsilon - ae$$
$$r\sin f = a\cos\varphi\sin\varepsilon$$
$$v = f + \chi$$
$$a^3 n^2 = k^2(1 + m)$$

wo die Substitution $e = \sin\varphi$ angewandt worden ist und im Laufe dieser Abhandlung beibehalten werden soll, die Gleichungen, die vermittelst Anwendung der osculirenden Elemente $a$, $n$, $c$, $e$ und $\chi$, von welchen $a$ und $n$ vermöge der letzten Gleichung von einander abhängen, stets den Ort und die Geschwindigkeit des Planeten in seiner Bahn geben.

19.

Den eben aufgestellten Gleichungen gegenüber stelle ich die folgenden auf, die schon im vor. §, wenn auch in einer etwas veränderten äusseren Form, vorkommen,

$$n_0 z = \bar{\varepsilon} - e_0 \sin \bar{\varepsilon}$$
$$\bar{r} \cos \bar{f} = a_0 \cos \bar{\varepsilon} - a_0 e_0$$
$$\bar{r} \sin \bar{f} = a_0 \cos \varphi_0 \sin \bar{\varepsilon}$$
$$v = \bar{f} + \pi_0$$
$$r = \bar{r}\,(1 + \nu)$$
$$a_0^3 n_0^2 = k^2 (1 + m)$$

in welchen $a_0$, $n_0$, $e_0$ und $\pi_0$ constante Elemente sind, und das gleichfalls constante Element $c_0$ in $n_0 z$ enthalten gedacht wird. In diesen Gleichungen enthalten wieder $z$ und $\nu$ bez. die Störungen der Zeit und des Logarithmus des Radius Vectors, und daher $n_0 z$ die der mittleren Länge oder der mittleren Anomalie, die so bestimmt werden können, dass auch durch diese Gleichungen in jedem Zeitpunkt der Ort und die Geschwindigkeit des Planeten in seiner Bahn dargestellt wird.

Damit diese Bestimmung ausführbar werde, wird nichts weiter verlangt, als dass die Elemente $a_0$, $c_0$, $e_0$ und $\pi_0$ um nicht mehr wie um Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte von den osculirenden Elementen $a$, $c$, $e$ und $\chi$ verschieden seien, und es giebt daher unendlich viele, innerhalb gewisser Grenzen liegende numerische Werthe von $a_0$, $c_0$, $e_0$ und $\pi_0$, welche dieser Bedingung genügen. Die Grenzen, innerhalb welcher sich die osculirenden Elemente — abgesehen von den Säcularänderungen derselben —, vermöge der Grösse der störenden Kräfte und der Beschaffenheit und der gegenseitigen Lage der Bahnen des gestörten und der störenden Planeten sich bewegen können, sind die Grenzen, innerhalb welcher $a_0$, $c_0$, $e_0$ und $\pi_0$ sicher angenommen werden können, indem die osculirenden Elemente, die verschiedenen Zeitpunkten angehören, überhaupt nur um Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte von einander verschieden sein können. Es folgt hieraus, dass man den Elementen $a_0$, $c_0$, $e_0$ und $\pi_0$ die Werthe selbst beilegen darf, die $a$, $c$, $e$ und $\chi$ in irgend einem Zeitpunkt zukommen, und es sollen daher hier, gleichwie im vor. §, $a_0$, $c_0$, $e_0$ und $\pi_0$ die Werthe beigelegt werden, die $a$, $c$, $e$ und $\chi$ in dem Zeitpunkt $t = 0$ haben.

Am vortheilhaftesten verfährt man freilich, wenn man der Berechnung der Störungen die mittleren Werthe der Elemente — das heisst die Mittelwerthe zwischen den Grenzen, die die osculirenden Elemente vermöge ihrer periodischen Änderungen überhaupt nicht überschreiten können — zu Grunde legt, allein diese kennt man nie, wenn man die absoluten Störungen eines Planeten zum ersten Male berechnet; es wird übrigens im weiteren Verlauf dieser Abhandlung gezeigt werden, wie man während der Berechnung der Störungen die mittleren Elemente aus den zur Zeit $t = 0$ gehörigen osculirenden Elementen berechnen kann. Die Berechnungsmethode bleibt sich aber gleich, man mag diese oder jene Elemente derselben zu Grunde gelegt haben, und nur die Bestimmung der den Integrationen hinzuzufügenden Constanten, so wie die numerischen Werthe dieser, werden verschieden.

## 20.

Die Relationen zwischen $z$ und $v$ einestheils und den veränderlichen osculirenden Elementen anderntheils können durch die Analyse gefunden werden, die ich in den »*Fundamenta nova* etc.« Sect. II art. 14 gegeben habe. Da aus den Gleichungen des vor. und vorvor. Art. stets derselbe Werth von $v$ hervorgehen muss, so muss erstlich immer

$$f = \bar{f} - \chi + \pi_0$$

sein, und hiemit kann die Gleichung

$$\frac{a}{r} = \frac{1 + e\cos f}{\cos^2\varphi}$$

die aus den Gleichungen des vorvor. Art. folgt, leicht auf folgende Form gebracht werden,

$$\frac{\bar{r}a}{ra_0} = \frac{\bar{r} + \bar{r}\cos\bar{f}\,e\cos(\chi - \pi_0) + \bar{r}\sin\bar{f}\,e\sin(\chi - \pi_0)}{a_0\cos^2\varphi}$$

Aus den Gleichungen des vor. Art. bekommt man einen ähnlichen Werth von $\bar{r}$, oder welches dasselbe ist

$$\bar{r} = a_0\cos^2\varphi_0 - e_0\bar{r}\cos\bar{f}$$

Substituirt man diesen Werth von $\bar{r}$ in das erste Glied rechter Hand der vorstehenden Gleichung, setzt

$$(28^*) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} e\sin(\chi - \pi_0) = \eta\cos^2\varphi_0 \\ e\cos(\chi - \pi_0) = \xi\cos^2\varphi_0 + e_0 \end{cases}$$

und erwägt, dass hieraus

$$\cos^2\varphi = \cos^2\varphi_0 \left\{1 - 2e_0\xi - \cos^2\varphi_0\xi^2 - \cos^2\varphi_0\eta^2\right\} \quad (28^{**})$$

folgt, so wird

$$\frac{\bar{r}a}{ra_0} = \frac{1 + \xi\frac{\bar{r}}{a_0}\cos\bar{f} + \eta\frac{\bar{r}}{a_0}\sin\bar{f}}{1 - 2e_0\xi - \cos^2\varphi_0\xi^2 - \cos^2\varphi_0\eta^2}$$

Die Gleichungen des vor. und vorvor. Art. geben ferner, da $v$ und $r$ ideale Coordinaten sind,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{d\bar{f}}{dz}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{df}{dt} = n\frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\,; \quad \frac{d\bar{f}}{dz} = n_0\frac{a_0^2}{\bar{r}^2}\cos\varphi_0$$

also

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\bar{r}^2 a^2 n\cos\varphi}{r^2 a_0^2 n_0\cos\varphi_0}$$

setzt man nun noch

$$n = n_0(1 + b) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

so wird in Folge der vorstehenden Gleichungen

$$\frac{dz}{dt} = (1 + b)\frac{\left(1 + \xi\frac{\bar{r}}{a_0}\cos\bar{f} + \eta\frac{\bar{r}}{a_0}\sin\bar{f}\right)^2}{\left(1 - 2e_0\xi - \cos^2\varphi_0\xi^2 - \cos^2\varphi_0\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

welche die Relation zwischen dem Differential von $z$ und den osculirenden Elementen giebt, die in $b$, $\xi$ und $\eta$ enthalten sind. Es ist ferner

$$1 + \nu = \frac{r}{\bar{r}}$$

substituirt man hierin den oben für $\frac{\bar{r}}{r}$ entwickelten Ausdruck und nimmt auf die Gleichung

$$a^3n^2 = a_0^3n_0^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30^*)$$

Rücksicht, so bekommt man

$$1 + \nu = \frac{1 - 2e_0\xi - \cos^2\varphi_0\xi^2 - \cos^2\varphi_0\eta^2}{(1 + b)^{\frac{2}{3}}\left(1 + \xi\frac{\bar{r}}{a_0}\cos\bar{f} + \eta\frac{\bar{r}}{a_0}\sin\bar{f}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

Diese ist die Relation zwischen $\nu$ und den osculirenden Elementen. Man sieht dass in diesen beiden Relationen nur die drei Elemente $a$, $e$ und $\chi$ vorkommen, das vierte Element $c$ ist durch die Differentiation von $z$ nach $t$ verschwunden, und wird auch fernerhin nicht wieder erscheinen.

## 21.

Aus den im vor. Art. entwickelten Relationen habe ich schon vor einer Reihe von Jahren die Grundformeln, die ich in den »*Fundamenta* etc.« gegeben habe, auf eine einfache Art entwickelt, die eine merk-

würdige Umformung derselben darbietet. Diese Umformung, die ich bis jetzt noch nicht publicirt habe, besteht in Folgendem. Sei zur Abkürzung

$$A = 1 + \xi \frac{\bar{r}}{a_0} \cos \bar{f} + \eta \frac{\bar{r}}{a_0} \sin f$$

$$B = 1 - 2 e_0 \xi - \xi^2 \cos^2 \varphi_0 - \eta^2 \cos^2 \varphi_0$$

$$\frac{h}{h_0} = \frac{(1+b)^{\frac{1}{2}}}{B^{\frac{1}{2}}}$$

dann werden die Gleichungen (30) und (31)

$$\frac{dz}{dt} = (1+b) \frac{A^2}{B^{\frac{3}{2}}}$$

$$1 + \nu = \frac{B}{A(1+b)^{\frac{1}{2}}}$$

und aus der letzteren dieser zieht man

$$\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 = 1 - 2(1+b)^{\frac{1}{2}} \frac{A}{B} + (1+b) \frac{A^2}{B^2}$$

Es wird daher

$$\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 \frac{h_0}{h} = \frac{h_0}{h} - 2(1+b)^{\frac{1}{2}} \frac{A}{B^{\frac{1}{2}}} + (1+b) \frac{A^2}{B^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{h_0}{h} - 2 \frac{h}{h_0} A + \frac{dz}{dt}$$

woraus

$$(32) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{dz}{dt} = 1 + \bar{W} + \frac{h_0}{h} \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2$$

folgt, wenn man

$$\bar{W} = 2 \frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 + 2 \frac{h}{h_0} \xi \frac{\bar{r}}{a_0} \cos \bar{f} + 2 \frac{h}{h_0} \eta \frac{\bar{r}}{a_0} \sin \bar{f}$$

setzt. Dieser Ausdruck für $dz$ ist die Umformung von (30), in welcher noch der Quotient $\frac{h}{h_0}$ durch die osculirenden Elemente auszudrücken ist. Substituirt man den Werth von $B$ in den obigen Ausdruck für diesen Quotienten und nimmt auf die Relationen (28**), (29) und (30*) Rücksicht, so bekommt man

$$\frac{h}{h_0} = \frac{an}{\cos \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi_0}{a_0 n_0}$$

Setzt man daher

$$h_0 = \frac{a_0 n_0}{\cos \varphi_0}$$

so wird

$$h = \frac{an}{\cos \varphi}$$

und diese Buchstaben bekommen also wieder dieselbe Bedeutung, die ihnen schon in den vorhergehenden §§ beigelegt worden ist. Aus den vorstehenden Gleichungen lässt sich eine Relation zwischen $\frac{dz}{dt}$ und $\nu$

herleiten. Die Gleichung

$$1 + \nu = \frac{B}{A(1+b)^{\frac{2}{3}}}$$

giebt

$$(1+\nu)^2 = \frac{B^2}{A^2(1+b)^{\frac{4}{3}}} = \frac{h_0}{h\frac{dz}{dt}}$$

also

$$\frac{dz}{dt} = \frac{h_0}{h(1+\nu)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

die man entweder zur Controle der numerischen Rechnungen anwenden, oder durch welche man die Störungen von $z$ direct berechnen kann, nachdem die von $h$ und $\nu$ berechnet worden sind. Diese Gleichung ist übrigens mit (26) identisch, wie leicht zu finden ist.

### 22.

Um weiter gehen zu können, ohne die Gleichungen aus einander reissen zu müssen, wodurch ihrer Einfachheit wesentlich geschadet, und ihre Entwickelung bedeutend weitläuftig gemacht wird, muss ich einen Kunstgriff anwenden, den ich schon vor fast 30 Jahren eingeführt habe, und der bis jetzt noch nicht von allen Astronomen verstanden worden ist, so einfach er auch an sich ist. Ich werde theils Differentiationen vornehmen müssen, bei welchen die in den osculirenden Elementen enthaltene Zeit unberührt, theils solche, in welchen die ausserhalb dieser Elemente vorkommende Zeit unverändert bleiben muss, und das einfachste Mittel, um diese beiden Arten von Differentiationen neben einander ausführen zu können, besteht darin, dass man einstweilen die Zeit, die ausserhalb der genannten Elemente vorkommt, so wie alle Grössen, die Functionen davon sind, mit anderen Buchstaben bezeichnet. Die Zeit, die ausserhalb der osculirenden Elemente vorkommt, soll daher mit $\tau$ bezeichnet werden, $\varrho$ werde ich für $r$, $\eta$ für $\varepsilon$, $\omega$ für $f$, $\zeta$ für $z$ und $\beta$ für $\nu$ schreiben. Es wird somit statt (32)

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = 1 + W + \frac{h_0}{h}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

wo

$$W = 2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 + 2\frac{h}{h_0}\xi\frac{\bar{\varrho}}{a_0}\cos\bar{\omega} + 2\frac{h}{h_0}\eta\frac{\bar{\varrho}}{a_0}\sin\bar{\omega}$$

ist, in welchem Ausdruck $\bar{\varrho}$ und $\bar{\omega}$ Functionen der einzigen Veränderlichen $\zeta$, gleich wie $\bar{r}$ und $\bar{f}$ Functionen der einzigen Veränderlichen $z$ sind. Es geht hiemit (33) über in

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{h_0}{h\,(1+\beta)^2} \qquad (35)$$

Ehe ich weiter gehe, werde ich einen Satz beweisen, welcher aus der Einführung von $\tau$ statt $t$ und neben $t$ folgt, und von welchem ich mehrmals Gebrauch machen werde. Sei $L$ irgend eine Function von idealen Coordinaten, dann kann $L$ auch jedenfalls als Function der Zeit $t$ und der osculirenden Elemente dargestellt werden. Zufolge der Grundeigenschaft der idealen Coordinaten bekommt man aber in der gestörten Bewegung wie in der ungestörten den wahren Werth des ersten Differentials von $L$ in Bezug auf die Zeit, wenn man blos diese in so weit sie in dieser Function ausserhalb der osculirenden Elemente enthalten ist, veränderlich setzt. Schreibt man daher ausserhalb der osculirenden Elemente $\tau$ für $t$, substituirt hierauf in $L$ die Ausdrücke der osculirenden Elemente in Function der Zeit, und bezeichnet die Function von $t$ und $\tau$, die auf diese Weise entsteht, mit $\Lambda$, so ist offenbar

$$dL = \overline{\left(\frac{d\Lambda}{d\tau}\right)}\, dt$$

wo der Strich über der Function anzeigt, dass nach der Differentiation $\tau$ in $t$ verwandelt werden soll. Es folgt hieraus ferner, dass

$$L = \text{const.} + \int \overline{\left(\frac{d\Lambda}{d\tau}\right)}\, dt$$

auch in der gestörten Bewegung ein strenger Ausdruck für $L$ ist.

23.

Stellen wir die Gleichung (35) so

$$\frac{d\zeta}{d\tau}(1+\beta)^2 = \frac{h_0}{h}$$

und differentiiren nach $\tau$, so erhalten wir

$$\frac{d\beta}{d\tau} = -\frac{\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}}{2\frac{d\zeta}{d\tau}}(1+\beta)$$

Die Differentiation von (34) nach $\tau$ giebt aber

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \frac{dW}{d\zeta}\frac{d\zeta}{d\tau} + \frac{h_0}{h}\frac{2\beta}{(1+\beta)^2}\frac{d\beta}{d\tau}$$

und wenn wir $\frac{h_0}{h}$ vermittelst (35) eliminiren

$$\frac{\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}}{\frac{d\zeta}{d\tau}} = \frac{dW}{d\zeta} + \frac{2\beta}{1+\beta}\frac{d\beta}{d\tau}$$

Substituirt man diesen Werth des Verhältnisses von $\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}$ zu $\frac{d\zeta}{d\tau}$ in den vorstehenden Ausdruck für $\frac{d\beta}{d\tau}$, so entsteht der folgende einfache Ausdruck

$$\frac{d\beta}{d\tau} = -\tfrac{1}{2}\frac{dW}{d\zeta}$$

Da aber $\nu$ eine ideale Coordinate ist, so kann man den im vor. Art. bewiesenen Satz auf die vorstehende Gleichung anwenden, und man bekommt dadurch sogleich strenge

$$\nu = C - \tfrac{1}{2}\int\overline{\left(\frac{dW}{d\zeta}\right)}\,dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

wo der Strich über der Function wieder anzeigt, dass man nach der Differentiation $\tau$ in $t$ verwandeln muss, und $C$ eine Constante ist, die weiter unten bestimmt werden wird. Dieser Ausdruck ist die Umformung des Ausdrucks (31). Da auch $z$ eine ideale Coordinate ist, so folgt aus dem eben genannten Satze, dass auch nach der Substitution der betreffenden Functionen der Zeit für die osculirenden Elemente der Ausdruck (34) derselben Behandlung unterworfen werden kann, und es wird demnach

$$n_0 z = n_0 t + c_0 + n_0\int\left\{\overline{W} + \frac{h_0}{h}\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2\right\}dt \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

wo $c_0$ die diesem Integral hinzuzufügende Constante ist, und wie oben die mittlere Anomalie zur Zeit $t = 0$ bedeutet.

## 24.

Man hat eben gesehen, dass $W$ unter andern Function von $\zeta$ ist, und wenn es sich nur um die Berechnung der Störungen handelte, die von der ersten Potenz der störenden Kräfte abhängen, so versteht es sich von selbst, dass man $\tau$ statt $\zeta$ setzen muss. Es werden daher die im vor. Art. entwickelten Ausdrücke in diesem Falle

$$\left.\begin{aligned} n_0 z &= n_0 t + c_0 + n_0\int \overline{W}_0 dt \\ \nu &= C - \tfrac{1}{2}\int\overline{\left(\frac{dW_0}{d\tau}\right)}\,dt \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

wo

$$W_0 = 2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 + 2\frac{h}{h_0}\xi\frac{\varrho}{a_0}\cos\omega + 2\frac{h}{h_0}\eta\frac{\varrho}{a_0}\sin\omega \quad \ldots \quad (39)$$

ist, und unter $\varrho$ und $\omega$ blose Functionen von $\tau$ zu verstehen sind. Es müssen, um mich möglichst deutlich auszudrücken, $\varrho$ und $\omega$ aus den folgenden Gleichungen bestimmt werden

$$(39^*) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} n_0\tau + c_0 = \eta - e_0 \sin\eta \\ \varrho \cos\omega = a_0 \cos\eta - a_0 e_0 \\ \varrho \sin\omega = a_0 \cos\varphi_0 \sin\eta \end{cases}$$

Auch wird in diesem Falle der Factor $\frac{h}{h_0}$ in den beiden letzten Gliedern von $W_0$ gleich Eins gesetzt, ich habe denselben aber hier stehen lassen, weil der so gestellte Ausdruck von $W$ für alle weiteren Annäherungen dienen wird.

Wenn auf das Quadrat und die höheren Potenzen der störenden Kräfte Rücksicht genommen werden muss, so darf die eben eingeführte Vertauschung von $\zeta$ mit $\tau$ nicht mehr statt finden, allein man kann den Unterschied zwischen diesen beiden Grössen leicht auf folgende Art berücksichtigen. Sei

$$n_0 z = n_0 t + c_0 + n\delta z$$

dann ist $n\delta z$ eine Function von $t$ und eine Grösse von der Ordnung der störenden Kräfte. Sei dem analog

$$n_0\zeta = n_0\tau + c_0 + n\delta\zeta$$

dann ist $n\delta\zeta$ eine Function von $\tau$ und $t$, die in $n\delta z$ übergeht, wenn man $\tau$ in $t$ verwandelt; wir brauchen übrigens $\delta\zeta$ nicht zu kennen, wie die folgenden Entwickelungen zeigen werden. Betrachten wir nun $W$ als eine Function von $\zeta$, so giebt das Taylorsche Theorem

$$W = W_0 + \frac{dW_0}{d\tau}\delta\zeta + \tfrac{1}{2}\frac{d^2W_0}{d\tau^2}\delta\zeta^2 + \ldots$$

wo unter $W_0$ der Ausdruck (39) verstanden werden muss, und ebenso erhalten wir

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{dW_0}{d\tau} + \frac{d^2W_0}{d\tau^2}\delta\zeta + \tfrac{1}{2}\frac{d^3W_0}{d\tau^3}\delta\zeta^2 + \ldots$$

Nehmen wir nun nur auf das Quadrat der störenden Kraft Rücksicht, da man selten weiter zu gehen braucht, und wenn dieses der Fall ist, das Verfahren ohne Weiteres ausgedehnt werden kann, so geben die Ausdrücke (36) und (37)

$$(40) \quad \ldots \quad \begin{cases} n_0 z = n_0 t + c_0 + n_0\int\left\{\overline{W}_0 + \left(\overline{\frac{dW_0}{d\tau}}\right)\delta z + \nu^2\right\}dt \\ \nu = C - \tfrac{1}{2}\int\left\{\left(\overline{\frac{dW_0}{d\tau}}\right) + \left(\overline{\frac{d^2W_0}{d\tau^2}}\right)\delta z\right\}dt \end{cases}$$

wo $\delta\zeta$ durch $\delta z$ ersetzt ist. Es ist, um die Entwickelung der Grundformeln zu vollenden, nun nur noch übrig, $W_0$ und $h$, oder vielmehr deren Differentiale in Bezug auf die Zeit, durch die störende Kraft auszudrücken.

25.

Aus den Gleichungen (28*) ergiebt sich

$$\xi = \frac{e}{\cos^2\varphi_0}\cos(\chi-\pi_0) - \frac{e_0}{\cos^2\varphi_0}$$
$$\eta = \frac{e}{\cos^2\varphi_0}\sin(\chi-\pi_0)$$

Substituirt man diese nebst

$$e_0\varrho\cos\omega = a_0\cos^2\varphi_0 - \varrho$$

in (39), so wird

$$W_0 = \frac{2\varrho}{h_0 a_0 \cos^2\varphi_0} he\cos(\chi-\pi_0-\omega) + \frac{2\varrho}{h_0 a_0\cos^2\varphi_0} h - \frac{h_0}{h} - 1$$

und wir können daher $h$, $he\cos\chi$ und $he\sin\chi$ als die drei Functionen der osculirenden Elemente ansehen, von welchen $W_0$ Function ist. Diese Functionen müssen wir ihrerseits durch die idealen Coordinaten $r$ und $v$, und deren ersten Differentiale in Bezug auf die Zeit ausdrücken. Zu dem Ende haben wir schon aus dem Art. 5

$$h = \frac{k^2(1+m)}{r^2\frac{dv}{dt}}$$

und die Ausdrücke der beiden andern Functionen der osculirenden Elemente, wofür wir nur die Function $he\cos(\chi-\pi_0-\omega)$ zu entwickeln brauchen, finden sich auf die einfachste Art wie folgt. Vermittelst der Hülfsgleichungen

$$f = \bar{f} - \omega - (\chi-\pi_0-\omega)$$
$$1 = \frac{r}{a\cos^2\varphi} + \frac{re\cos f}{a\cos^2\varphi}$$
$$h = \frac{an}{\cos\varphi}$$

und des vorstehenden Ausdrucks von $h$ kann man leicht die Gleichungen

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a^2}{r^2}n\cos\varphi\,;\quad \frac{dr}{dt} = \frac{an}{\cos\varphi}e\sin f$$

in folgende umformen,

$$r\frac{dv}{dt} - h = \cos(\bar{f}-\omega).he\cos(\chi-\pi_0-\omega) + \sin(\bar{f}-\omega).he\sin(\chi-\pi_0-\omega)$$
$$\frac{dr}{dt} = \sin(\bar{f}-\omega).he\cos(\chi-\pi_0-\omega) - \cos(\bar{f}-\omega).he\sin(\chi-\pi_0-\omega)$$

und hieraus folgt sogleich

$$he\cos(\chi-\pi_0-\omega) = \left\{r\frac{dv}{dt} - h\right\}\cos(\bar{f}-\omega) + \frac{dr}{dt}\sin(\bar{f}-\omega)$$

Substituirt man diesen Werth, und erwägt, dass

$$\frac{1}{h_0 a_0 \cos^2\varphi_0} = \frac{h_0}{k^2(1+m)}$$

ist, so geht der obige Ausdruck von $W_0$ über in

$$W_0 = \frac{2h_0\varrho}{k^2(1+m)}\cos(\bar{f}-\omega)\,r\frac{dv}{dt} + \frac{2h_0\varrho}{k^2(1+m)}\sin(\bar{f}-\omega)\frac{dr}{dt}$$
$$-\frac{2\varrho}{h_0 a_0 \cos^2\varphi_0}[\cos(\bar{f}-\omega)-1]\,h - \frac{h_0}{h} - 1$$

Für die Einführung der störenden Kräfte muss dieser Ausdruck in Bezug auf $t$ differentiirt werden, während $\tau$ constant bleiben muss. Aber auch in Bezug auf $t$ brauchen nicht alle Functionen dieser Grösse veränderlich gesetzt zu werden, sondern nur die Differentialquotienten erster Ordnung $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{dr}{dt}$, indem nur die Differentiale dieser durch das Hinzukommen der störenden Kräfte verändert werden. Dasselbe gilt für den obigen Ausdruck für $h$, und es wird somit, da $h$ Function von $\frac{dv}{dt}$ ist,

$$\frac{dW_0}{dt} = \frac{2h_0\varrho}{k^2(1+m)}\cos(\bar{f}-\omega)\,r\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{2h_0\varrho}{k^2(1+m)}\sin(\bar{f}-\omega)\frac{d^2r}{dt^2}$$
$$-\frac{2\varrho}{h_0 a_0 \cos^2\varphi_0}[\cos(\bar{f}-\omega)-1]\frac{dh}{dt} + \frac{h_0}{h^2}\frac{dh}{dt}$$

und

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{k^2(1+m)}{r^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{h^2r^2}{k^2(1+m)}\frac{d^2v}{dt^2}$$

Substituirt man nun

$$k^2(1+m)\frac{1}{r^2}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) \text{ für } \frac{d^2v}{dt^2}$$
$$k^2(1+m)\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) \text{ für } \frac{d^2r}{dt^2}$$

da zufolge des Art. 5 diese Grössen die Incremente sind, die diese zweiten Differentialquotienten der idealen Coordinaten $v$ und $r$ wegen des Vorhandenseins der störenden Kräfte bekommen, so erhält man sogleich

$$\frac{dh}{dt} = -h^2\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$$

$$(41)\quad \frac{dW_0}{dt} = h_0\left\{2\frac{\varrho}{r}\cos(\bar{f}-\omega) - 1 + 2\frac{h^2\varrho}{h_0{}^2 a_0\cos^2\varphi_0}[\cos(\bar{f}-\omega)-1]\right\}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$$
$$+ 2h_0\frac{\varrho}{r}\sin(\bar{f}-\omega)\,r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

welches die Gleichungen sind, die ich in den »*Fundamenta* etc.« auf andere Art gefunden habe. Man kann bemerken, dass $\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ die Componente der störenden Kraft ist, die in der Richtung des Radius Vectors, und $\frac{1}{r}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$ die Componente derselben Kraft ist, die in der Ebene der

Bahn senkrecht darauf wirkt. Aus der obigen Gleichung für $dh$ zieht man durch Anwendung der Elemente der Differentialrechnung

$$\frac{d\,.\,\frac{h_0}{h}}{dt} = h_0\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Es wird weiter unten sich als angemessen herausstellen aus (41) $\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$ zu eliminiren, und durch $\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)$ zu ersetzen, indem dadurch wichtige Vortheile entspringen, und auch dieser Differentialquotient durch eine einfachere Rechnung zu erhalten ist wie jener. Es scheint als müsste man dem ohngeachtet $\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$ für die Anwendung von (42) besonders entwikkeln, dieses ist aber nicht der Fall, denn man erkennt sogleich, dass durch die Verwandelung von $\tau$ in $t$ in (41)

$$\overline{\left(\frac{dW_0}{dt}\right)} = h_0\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$$

wird. Da diese Eigenschaft bleibt, welcher Grössen man sich auch zur Entwickelung von (41) bedient hat, so ist immer

$$\frac{d\,.\,\frac{h_0}{h}}{dt} = \overline{\left(\frac{dW_0}{dt}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

26.

Die beiden Coordinaten $z$ und $v$ bestimmen zufolge des Vorhergehenden den Ort des Planeten in seiner Bahn, und zur Bestimmung der durch die störenden Kräfte bewirkten Abweichung desselben von der durch $i_0$ und $\theta_0$ bestimmten Bahnebene könnte man die im Art. 9 eingeführte Coordinate $s$ benutzen. Zweckmässiger indess wendet man dazu das Product $\frac{\bar{r}s}{a_0}$ an, welches ich mit $u$ bezeichnen werde.*) Vermöge der Gleichung $v = \bar{f} + \pi_0$ wird

$$u = \frac{\bar{r}}{a_0}\, q \sin(\bar{f} + \pi_0 - \theta_0) - \frac{\bar{r}}{a_0}\, p \cos(\bar{f} + \pi_0 - \theta_0)$$

Führen wir auch hier $\tau$ statt $t$ ein, nennen die so entstehende Function $R$, und differentiiren diese nach $t$, so ergiebt sich zuerst

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dq}{dt}\frac{\bar{\varrho}}{a_0}\sin(\bar{\omega} + \pi_0 - \theta_0) - \frac{dp}{dt}\frac{\bar{\varrho}}{a_0}\cos(\bar{\omega} + \pi_0 - \theta_0)$$

*) Im vor. § wurde $rs$ mit $u$ bezeichnet, die hier eingeführte Bedeutung von $u$, die in der Folge beibehalten werden wird, weicht also von jener etwas ab.

woraus durch die Substitution der Ausdrücke (22) folgt

$$(44) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dR}{dt} = hr\frac{\bar{\varrho}}{a_0}\sin(\bar{\omega}-\bar{f})\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i$$

und es ist $\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ die auf der Bahnebene senkrecht stehende Componente der störenden Kraft. Nach der Integration dieser Gleichung wird

$$u = \bar{R}$$

wo der Strich über der Function wieder anzeigt, dass nach der Integration $\tau$ in $t$ verwandelt werden muss. Die Anwendung des im Art. 22 bewiesenen Satzes giebt hier wieder einen zweiten Ausdruck für $u$, da $u$ eine ideale Coordinate ist. Man erhält durch diesen Satz auch

$$u = \int \overline{\left(\frac{dR}{d\tau}\right)}\, dt$$

Beide diese Ausdrücke für $u$ können ohne Unterschied angewandt werden, man kann aber auch mit wenig Mühe den zweiten anwenden, um die nach dem ersten geführte numerische Rechnung zu controliren, wie weiter unten gezeigt werden wird.

## 27.

Wenn es sich nur um die Störungen erster Ordnung von $u$ in Bezug auf die störenden Kräfte handelt, so werden in (44) nur die elliptischen Ausdrücke der darin vorkommenden Functionen, so wie $h_0$ für $h$ gesetzt. Setzt man daher

$$(45) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dR_0}{dt} = hr\frac{\varrho}{a_0}\sin(\omega-\bar{f})\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i$$

wo $\varrho$ und $\omega$ den Gleichungen (39*) genügen müssen, so wird unter den eben gemachten Voraussetzungen für die Störungen erster Ordnung

$$u = \bar{R}_0$$

oder

$$u = \int \overline{\left(\frac{dR_0}{d\tau}\right)}\, dt$$

für die Störungen zweiter und höherer Ordnungen müssen die genaueren Werthe der in $dR$ enthaltenen Grössen substituirt werden, und da $\varrho$ und $\omega$ bei der Integration constant sind, so ist es nach derselben

$$R = R_0 + \left(\frac{dR_0}{d\tau}\right)\delta\zeta + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2R_0}{d\tau^2}\right)\delta\zeta^2 + \ldots$$

also wenn man $\tau$ in $t$ verwandelt und die Störungen der Ordnung des Cubus der störenden Kraft so wie die von höheren Ordnungen übergeht,

$$\overline{R} = \overline{R}_0 + \overline{\left(\frac{dR_0}{nd\tau}\right)} n\delta z$$

und hiemit

$$u = \overline{R}_0 + \overline{\left(\frac{dR_0}{nd\tau}\right)} n\delta z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

wo $R_0$ aus der unveränderten (45) hervorgeht. Der obige Ausdruck für $R$ giebt ausserdem

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{dR_0}{d\tau} + \frac{d^2R_0}{d\tau^2}\delta\zeta + \frac{dR_0}{d\tau}\frac{d\delta\zeta}{d\tau}$$

und hiemit wird der zweite Ausdruck für $u$, wenn man auch darin auf das Quadrat der störenden Kraft Rücksicht nimmt,

$$u = \int\left\{\overline{\left(\frac{dR_0}{d\tau}\right)}\left(1 + \frac{d\delta z}{dt}\right) + \overline{\left(\frac{d^2R_0}{nd\tau^2}\right)} n\delta z\right\} dt \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

Die Störungen von der Ordnung des Quadrats der störenden Kraft sind übrigens gemeiniglich so klein, dass sie auf $u$ keine oder fast keine Wirkung äussern, und daher gänzlich übergangen werden können. Nur wenn die gegenseitige Neigung zwischen den Bahnen des gestörten und des störenden Planeten beträchtlich ist, kann ihre Berücksichtigung nothwendig werden.

## § 4. Von der Störungsfunction und den partiellen Differentialquotienten derselben.

### 28.

Die im vor. § entwickelten Ausdrücke für die Störungen, so wie überhaupt alle Ausdrücke, die man für diesen Zweck erhalten kann, können nur durch Näherungen integrirt werden. In der ersten Näherung substituirt man die elliptischen Ausdrücke der darin vorkommenden Veränderlichen, wodurch sie zu blosen Functionen der Zeit werden, die man nach deren Auflösung in unendliche Reihen integriren kann; damit ergeben sich die Störungsglieder, die von der ersten Potenz der störenden Kräfte, oder der Massen abhängen. Durch Anwendung des auf mehrere Veränderliche ausgedehnten Taylorschen Theorems substituirt man die, wie eben beschrieben, erhaltenen Ausdrücke der Störungen und integrirt wieder, wodurch man die von den Quadraten und Producten von zwei Dimensionen der Massen abhängigen Störungsglieder erhält, und so muss man weiter fortfahren, wenn es nöthig werden sollte,

welches jedoch nur selten der Fall ist,*) weshalb ich die Entwickelungen hier mit den Quadraten und Producten von zwei Dimensionen der Massen schliessen werde. Einzelne Glieder von der Ordnung der Cubi der Massen kann man gemeiniglich noch durch dieselben Ausdrücke in ihren grössten Theilen berücksichtigen.

Da in den im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücken für die Differentiale der Störungen die ersten partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction vorkommen, so ist klar, dass die Anwendung des eben genannten Theorems auf die Ermittelung der von den Quadraten und Producten abhängigen Störungen die zweiten partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction einführen wird. Die Ausdrücke jener sowohl wie dieser sollen jetzt ermittelt werden.

## 29.

Nennen wir wieder $x$, $y$, $z$ die auf irgend welche rechtwinklige Achsen bezogenen Coordinaten des gestörten Planeten, und $x'$, $y'$, $z'$ die auf dieselben Achsen bezogenen Coordinaten des störenden, so ist

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{\Delta} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right\}$$

wo

$$\Delta^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

ist. Da das Vorhandensein von mehreren störenden Planeten der Störungsfunction nur ähnliche Glieder hinzufügt, so brauchen wir in den Entwickelungen nur Einen derselben zu betrachten, und der eben aufgestellte Ausdruck von $\Omega$ genügt für die Entwickelungen.

Zufolge der im Art. 4 entwickelten Gleichungen bekommen wir die partiellen Differentialquotienten von $\Omega$ nach $X$, $Y$ und $Z$, wenn wir den obigen Ausdruck bez. nach $x$, $y$ und $z$ differentiiren, und nach den Differentiationen $z = 0$ machen. Es wird daher vor allem

$$\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)z'$$

wo

$$\Delta^2 = (X_1-x')^2 + (Y_1-y')^2 + z'^2$$

ist, alle Coordinaten auf die $XY$ Ebene bezogen werden müssen, und

*) In der Mondbewegung habe ich Glieder mit hinzuziehen müssen, die vom Biquadrat der störenden Kraft der Sonne abhängen.

$X_1$ und $Y_1$ geschrieben worden ist, um anzudeuten, dass $X_1$ und $Y_1$ nicht denselben Anfangspunkt zu haben brauchen wie $X$ und $Y$. In Bezug auf die beiden andern partiellen Differentiationen dürfen wir vor der Vornahme derselben $z = 0$ machen, weil diese Coordinate dabei unberührt bleibt, und dürfen daher setzen

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{\Delta} - \frac{X_1 x' + Y_1 y'}{r'^2}\right\}$$

wo der zuletzt angeführte Ausdruck für $\Delta^2$ gilt, und alle Coordinaten wieder auf die $XY$ Ebene bezogen werden müssen. Wir brauchen auch nicht hier die Differentiationen nach $X_1$ und $Y_1$ auszuführen, sondern können sogleich die nach $r$ und $v$ vornehmen, nachdem für $X_1$ und $Y_1$ ihre Ausdrücke durch $r$ und $v$ in $\Omega$ substituirt worden sind.

30.

Da die Störungsfunction unabhängig vom Anfangspunkt der Coordinaten ist, so dürfen wir diesen beliebig annehmen, und ich werde ihn daher in den aufsteigenden Knoten der Bahn des gestörten Planeten auf der Bahn des störenden verlegen, weil dadurch sogleich die einfachsten Ausdrücke erlangt werden. Die $XY$ Ebene ist die Bahn des gestörten Planeten, und eine analoge Ebene, die die $X'Y'$ Ebene heissen muss, ist die Bahn des störenden Planeten. Sei überhaupt die gegenseitige Neigung dieser beiden Ebenen $J$, der Bogen, welcher sich in der Richtung der Bewegung von der positiven $X$ Achse bis zum genannten Knoten erstreckt $\varphi$, und der Bogen, welcher sich in derselben Richtung von der positiven $X'$ Achse bis zu demselben Knoten erstreckt $\psi$, dann ist leicht zu finden, dass

$$\begin{aligned} X_1 &= r\cos(v-\varphi)\,; & x' &= r'\cos(v'-\psi) \\ Y_1 &= r\sin(v-\varphi)\,; & y' &= r'\cos J\sin(v'-\psi) \\ & & z' &= -r\sin J\sin(v'-\psi) \end{aligned}$$

ist. Es ist zweckmässig diese Ausdrücke auf die wahren Anomalien $\bar{f}$ und $\bar{f}'$ hinzuführen. Sei

$$\Pi = \pi_0 - \varphi\,,\quad \Pi' = \pi'_0 - \psi$$

dann wird wegen der Gleichungen $v = \bar{f} + \pi_0$, $v' = \bar{f}' + \pi_0'$

$$\begin{aligned} X_1 &= r\cos(\bar{f}+\Pi)\,; & x' &= r'\cos(\bar{f}'+\Pi') \\ Y_1 &= r\sin(\bar{f}+\Pi)\,; & y' &= r'\cos J\sin(\bar{f}'+\Pi') \\ & & z' &= -r'\sin J\sin(\bar{f}'+\Pi') \end{aligned}$$

Substituirt man diese Ausdrücke und setzt zur Abkürzung

$$H = \cos(\bar{f}+\Pi)\cos(\bar{f}'+\Pi') + \cos J \sin(\bar{f}+\Pi)\sin(\bar{f}'+\Pi')$$

so wird

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'H$$

$$(48) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Omega = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}H\right\}$$

Da nun leicht zu erkennen ist, dass $\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) = \left(\frac{d\Omega}{d\bar{f}}\right)$ ist, so bekommt man

$$\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) = -\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)rr'H'$$

$$r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)rr'H - \frac{m'}{1+m}\frac{r^2}{\Delta^3}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = -\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\sin J\, r' \sin(\bar{f}'+\Pi')$$

wo

$$H' = \sin(\bar{f}+\Pi)\cos(\bar{f}'+\Pi') - \cos J\cos(\bar{f}+\Pi)\sin(\bar{f}'+\Pi')$$

Hiemit sind die drei partiellen Differentialquotienten von $\Omega$, die in den im vor. Paragraphen entwickelten Störungsformeln vorkommen, als Functionen der sieben Veränderlichen $r$, $\bar{f}$, $r'$, $\bar{f}'$, $J$, $\Pi$ und $\Pi'$ dargestellt. Es wird sich weiter unten zeigen, dass die Veränderungen der drei Veränderlichen $J$, $\Pi$ und $\Pi'$, in so weit sie in der Störungsfunction selbst enthalten sind, durch Hülfe von zwei Veränderlichen ausgedrückt werden können, wodurch die Störungsfunction auf sechs Veränderliche zurückgeführt wird, das ist auf die Anzahl, die sie ursprünglich enthält. Diese Zurückführung ist aber nicht für alle Differentialquotienten derselben möglich.

31.

Die drei im vor. Art. eingeführten Veränderlichen $J$, $\Pi$ und $\Pi'$ bedürfen einer weiteren Entwickelung, da sie nicht unmittelbar gegebene Grössen sind. Nennt man $\Phi$ den Bogen der $XY$ Ebene, welcher sich vom aufsteigenden Knoten dieser Ebene auf der Fundamentalebene, oder der Ebene der $xy$, (wofür man nach Belieben die Ecliptik oder den Äquator für eine gegebene Zeit wählen kann,) bis zum aufsteigenden Knoten der $XY$ Ebene auf der $X'Y'$ Ebene erstreckt, und $\Psi$ den Bogen, welcher sich von dem aufsteigenden Knoten der $X'Y'$ Ebene auf der $xy$ Ebene bis zu demselben gegenseitigen Knoten erstreckt, so ist

$$\varphi = \Phi + \sigma\,; \quad \psi = \Psi + \sigma'$$

und es wird daher

$$\Pi = \pi_0 - \sigma - \Phi;\ \Pi' = \pi_0' - \sigma' - \Psi' \quad \ldots\ldots (49)$$

Die Bögen $\Phi$, $\Psi$ und $\theta - \theta'$ sind die Seiten eines sphärischen Dreiecks, denen bez. die Winkel $i'$, $180^0 - i$ und $J$ gegenüber liegen. Man bekommt daher $J$, $\Phi$ und $\Psi$ aus folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}J\sin\tfrac{1}{2}(\Psi+\Phi) &= \sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\sin\tfrac{1}{2}(i+i')\\ \sin\tfrac{1}{2}J\cos\tfrac{1}{2}(\Psi+\Phi) &= \cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\sin\tfrac{1}{2}(i-i')\\ \cos\tfrac{1}{2}J\sin\tfrac{1}{2}(\Psi-\Phi) &= \sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\cos\tfrac{1}{2}(i+i')\\ \cos\tfrac{1}{2}J\cos\tfrac{1}{2}(\Psi-\Phi) &= \cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\cos\tfrac{1}{2}(i-i')\end{aligned}\right\} \quad \ldots (50)$$

Die Elemente $i'$, $\theta'$, $\sigma'$ sind nicht weniger wie $i$, $\theta$, $\sigma$ veränderliche Grössen, und folglich sind auch $\Psi$, $\Phi$, $J$, $\Pi$ und $\Pi'$ veränderlich, die Veränderungen derselben kommen aber erst bei der Berechnung der von den Quadraten und Producten der Massen abhängigen Störungen in Betracht, und man darf sie in der ersten Annäherung unveränderlich betrachten. Bezeichnet man daher wie oben mit $i_0$, $\theta_0$ die dem Zeitpunkt $t = 0$ angehörigen numerischen Werthe von $i$, $\theta$ und $\sigma$, und eben so mit $i'_0$, $\theta'_0$ die demselben Zeitpunkt zukommenden Werthe von $i'$, $\theta'$ und $\sigma'$, so müssen $i_0$, $\theta_0$, $i'_0$, $\theta'_0$ in die Gleichungen (50) statt $i$, $\theta$, $i'$, $\theta'$ substituirt werden, wodurch man für $J$, $\Phi$ und $\Psi$ Werthe erhält, die ich, wo es nöthig wird eine Unterscheidung zu machen, mit $J_0$, $\Phi_0$ und $\Psi_0$ bezeichnen will. Hiemit wird ferner

$$\Pi_0 = \pi_0 - \theta_0 - \Phi_0;\ \Pi'_0 = \pi'_0 - \theta'_0 - \Psi_0 \quad \ldots (50^*)$$

und diese Werthe müssen in die obigen Differentialquotienten von $\Omega$, statt $J$, $\Pi$ und $\Pi'$ substituirt werden. Für $r$ und $\bar{f}$ müssen ausserdem nicht nur in diesen Differentialquotienten, sondern überhaupt in den obigen Ausdrücken diejenigen Werthe von $r$ und $f$ substituirt werden, die den folgenden Gleichungen entsprechen

$$\begin{aligned} n_0 t + c_0 &= \varepsilon - e_0 \sin\varepsilon \\ r\cos f &= a_0\cos\varepsilon - a_0 e_0 \\ r\sin f &= a_0\cos\varphi_0\sin\varepsilon \end{aligned}$$

so wie $h_0$ statt $h$ und $\cos i_0$ statt $\cos i$ darin substituirt werden muss. Es ist indessen angemessen, $\cos i$ in dem Ausdruck für $u$ vorläufig als algebraisches Zeichen stehen zu lassen.

## 32.

Bei der Berechnung der von den Quadraten und Producten der Massen abhängigen Störungen müssen die in der ersten Annäherung er-

haltenen Störungen, die die durch die störenden Kräfte bewirkten Incremente der dieser Rechnung zu Grunde gelegten Grössen sind, wie oben erwähnt, durch das auf mehrere Veränderliche ausgedehnte Taylorsche Theorem berücksichtigt werden. Zufolge des vor. § ist aber $r$ Function von $\bar{r}$ und $\nu$, und $\bar{r}$ und $\bar{f}$ sind Functionen der einzigen Veränderlichen $n_0 z$, nennt man aber $g$ die mittlere Anomalie $n_0 t + c_0$, so wird

$$n_0 z = g + n_0 \delta z$$

und es wird $n_0 \delta z$, oder schlechtweg $n\delta z$ das Increment der mittleren Anomalie. Wir können daher die Ausdrücke für die Differentiale von $W_0$ und $R_0$ als Functionen von $n\delta z$ und $\nu$ statt von $r$ und $\bar{f}$, und als Functionen von den analogen, zum störenden Planeten gehörigen, Grössen $n'\delta z'$ und $\nu'$ statt von $r'$ und $\bar{f}'$ ansehen. Bezeichnet man daher überhaupt die in der ersten Annäherung erhaltenen Incremente durch ein den Grössen vorgesetztes $\delta$, und setzt zur Abkürzung $\frac{dW_0}{dt} = T$, so wird für die Berechnung der Störungen von der Ordnung der Quadrate und Producte der störenden Kräfte

$$\begin{aligned}\frac{d\delta W_0}{dt} = \left(\frac{dT}{dg}\right) n\delta z + \left(\frac{dT}{d\nu}\right) \nu + \left(\frac{dT}{dg'}\right) n'\delta z' + \left(\frac{dT}{d\nu'}\right) \nu' \\ + \left(\frac{dT}{dh}\right) \delta h + \left(\frac{dT}{dJ}\right) \delta J + \left(\frac{dT}{dII}\right) \delta II + \left(\frac{dT}{dII'}\right) \delta II'\end{aligned}$$

und ein ähnlicher Ausdruck ergiebt sich für das Increment von $\frac{dR_0}{dt}$. Man sieht hieraus, dass die hier entwickelten Ausdrücke für die Berechnung der Störungen von acht veränderlichen Grössen abhängig gemacht worden sind, während das Problem ursprünglich von neun Veränderlichen abhängt; nemlich vom Ort des störenden Planeten und vom Ort und der Geschwindigkeit des gestörten. Durch die Analyse des vor. § ist also Eine Veränderliche eliminirt worden, und es ist unmöglich mehrere Veränderliche zu eliminiren.

## 33.

Die in der eben entwickelten Formel für $\delta W_0$ und der analogen für $\delta R_0$ vorkommenden Incremente $\delta J$, $\delta II$ und $\delta II'$ lassen sich auf $u$, $\frac{du}{dt}$ und der analogen zum störenden Planeten gehörigen Coordinate $u'$ hinführen, die durch die erste Annäherung als unmittelbar gegeben betrachtet werden können. Um dieses zu zeigen, braucht man nur die Störungsfunction und die drei eben entwickelten partiellen Differentialquotienten derselben

vorzunehmen, da $J$, $\Pi$ und $\Pi'$ ausserdem nicht vorkommen. Das von den Incrementen dieser drei Grössen abhängige Increment von $\Omega$ und dessen obigen Differentialquotienten will ich mit einem vorgesetzten $\delta'$ bezeichnen, so dass also

$$\delta'\Omega = \left(\frac{d\Omega}{dJ}\right)\delta J + \left(\frac{d\Omega}{d\Pi}\right)\delta\Pi + \left(\frac{d\Omega}{d\Pi'}\right)\delta\Pi' \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

wird, und die nächste Aufgabe besteht darin, diese Function auf die Form

$$\delta'\Omega = Au + B\frac{du}{d\varepsilon} + Cu'$$

hinzuführen, wo ich $\frac{du}{d\varepsilon}$ statt $\frac{du}{dt}$ angenommen habe, weil dieses überhaupt erlaubt ist, und in der Anwendung Vortheile mit sich bringt.

Zuerst müssen wir nun die Relationen suchen, die zwischen $dJ$, $d\Phi$ und $d\Psi$ einerseits, und $di$, $d\theta$, $di'$ und $d\theta'$ andernseits statt finden, und diese müssen sich durch die Differentiation der Gleichungen (50) ergeben. Einfacher jedoch ist es, die folgenden zu differentiiren,

$$\sin J \sin\Phi = \sin i' \sin(\theta-\theta')$$
$$\sin J\cos\Phi = \cos i' \sin i - \sin i' \cos i \cos(\theta-\theta')$$

und sich zur Reduction der Gleichungen zwischen den Differentialen der folgenden zu bedienen,

$$\cos i'\cos(\theta-\theta') = \cos\Phi\sin\Psi - \sin\Phi\cos\Psi\cos J$$
$$\cos(\theta-\theta') = \cos\Phi\cos\Psi + \sin\Phi\sin\Psi\cos J$$
$$\cos i'\cos i + \sin i'\sin i\cos(\theta-\theta') = \cos J$$
$$\sin i'\sin i + \cos i'\cos i\cos(\theta-\theta') = \sin\Phi\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Psi\cos J$$
$$\cos i\sin(\theta-\theta') = -\sin\Phi\cos\Psi + \cos\Phi\sin\Psi\cos J$$

die alle demselben Dreieck angehören. Differentiirt man die beiden ersten, so bekommt man durch Hülfe der letzteren sogleich

$$\cos J\sin\Phi dJ + \sin J\cos\Phi d\Phi = (\cos\Phi\sin\Psi - \sin\Phi\cos\Psi\cos J)\,di'$$
$$+ (\cos\Phi\cos\Psi + \sin\Phi\sin\Psi\cos J)\sin i'(d\theta - d\theta')$$

$$\cos J\cos\Phi dJ - \sin J\sin\Phi d\Phi = \cos J di$$
$$-(\sin\Phi\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Psi\cos J)\,di'$$
$$-(\sin\Phi\cos\Psi - \cos\Phi\sin\Psi\cos J)\sin i'(d\theta - d\theta')$$

und hieraus durch eine leichte Elimination

$$dJ = \cos\Phi di - \cos\Psi di' + \sin\Psi\sin i'(d\theta - d\theta')$$
$$d\Phi = -\operatorname{cotg} J\sin\Phi di + \operatorname{cosec} J\sin\Psi di' + \operatorname{cosec} J\cos\Psi\sin i'(d\theta - d\theta')$$

Durch Vertauschung von $\Psi$ und $\Phi$, $i'$ und $180^0 - i$, $di$ und $-di'$ bekommt

man hieraus

$$d\Psi = -\operatorname{cosec} J \sin \Phi di + \operatorname{cotg} J \sin \Psi di' + \operatorname{cosec} J \cos \Phi \sin i (d\theta - d\theta')$$

Die Gleichungen (49) geben

$$d\Pi = -d\sigma - d\Phi; \quad d\Pi' = -d\sigma' - d\Psi$$

substituirt man hierin die vorstehenden Werthe von $d\Phi$ und $d\Psi$, eliminirt $d\theta$ und $d\theta'$ durch

$$d\theta = \frac{d\sigma}{\cos i}; \quad d\theta' = \frac{d\sigma'}{\cos i'}$$

und wendet zur ferneren Reduction die Gleichungen

$$\sin i \sin \Phi = \sin i' \sin \Psi$$

$$\cos i = \cos J \cos i' - \sin J \sin i' \cos \Psi$$

$$\cos i' = \cos J \cos i + \sin J \sin i \cos \Phi$$

an, die ebenfalls demselben Dreieck angehören, und woraus

$$\operatorname{cosec} J \cos \Psi \sin i' = \operatorname{cotg} J \cos \Phi \sin i + \cos i$$

$$\operatorname{cosec} J \cos \Phi \sin i = \operatorname{cotg} J \cos \Psi \sin i' - \cos i'$$

folgt, so bekommt man die folgenden symmetrischen Gleichungen,

$$dJ = \cos \Phi di + \frac{\sin i \sin \Phi}{\cos i} d\sigma - \cos \Psi di' - \frac{\sin i' \sin \Psi}{\cos i'} d\sigma'$$

$$d\Pi = \operatorname{cotg} J \left\{ \sin \Phi di - \frac{\sin i \cos \Phi}{\cos i} d\sigma \right\} - \operatorname{cosec} J \left\{ \sin \Psi di' - \frac{\sin i' \cos \Psi}{\cos i'} d\sigma' \right\}$$

$$d\Pi' = \operatorname{cosec} J \left\{ \sin \Phi di - \frac{\sin i \cos \Phi}{\cos i} d\sigma \right\} - \operatorname{cotg} J \left\{ \sin \Psi di' - \frac{\sin i' \cos \Psi}{\cos i'} d\sigma' \right\}$$

Aus den Gleichungen

$$p = \sin i \sin (\sigma - \theta_0)$$

$$q = \sin i \cos (\sigma - \theta_0) - \sin i_0$$

bekommt man aber

$$di = \frac{\sin (\sigma - \theta_0)}{\cos i} dp + \frac{\cos (\sigma - \theta_0)}{\cos i} dq$$

$$d\sigma = \frac{\cos (\sigma - \theta_0)}{\sin i} dp - \frac{\sin (\sigma - \theta_0)}{\sin i} dq$$

und ähnliche ergeben sich für $di'$ und $d\sigma'$, hiemit wird

$$dJ = -\sin(\Pi - \pi_0 + \theta_0) \frac{dp}{\cos i} + \cos(\Pi - \pi_0 + \theta_0) \frac{dq}{\cos i}$$
$$+ \sin(\Pi' - \pi'_0 + \theta'_0) \frac{dp'}{\cos i'} - \cos(\Pi' - \pi'_0 + \theta'_0) \frac{dq'}{\cos i'}$$

$$d\Pi = -\operatorname{cotg} J \left\{ \cos(\Pi - \pi_0 + \theta_0) \frac{dp}{\cos i} + \sin(\Pi - \pi_0 + \theta_0) \frac{dq}{\cos i} \right\}$$
$$+ \operatorname{cosec} J \left\{ \cos(\Pi' - \pi'_0 + \theta'_0) \frac{dp'}{\cos i'} + \sin(\Pi' - \pi'_0 + \theta'_0) \frac{dq'}{\cos i'} \right\}$$

$$d\Pi' = -\operatorname{cosec} J \left\{ \cos(\Pi - \pi_0 + \theta_0) \frac{dp}{\cos i} + \sin(\Pi - \pi_0 + \theta_0) \frac{dq}{\cos i} \right\}$$
$$+ \operatorname{cotg} J \left\{ \cos(\Pi' - \pi'_0 + \theta'_0) \frac{dp'}{\cos i'} + \sin(\Pi' - \pi'_0 + \theta'_0) \frac{dq'}{\cos i'} \right\}$$

Wenn man die oben entwickelten, durch die störende Kraft ausgedrückten Werthe von $dp$ und $dq$, so wie die analogen für $dp'$ und $dq'$ hierin substituirt, so kann man durch Integrationen die Werthe von $\delta J$, $\delta\Pi$ und $\delta\Pi'$ bis auf jeden beliebigen Grad von Genauigkeit erhalten. Allein dieses wird nie nöthig werden, denn man darf in den Coefficienten dieser Gleichungen $J$, $\Pi$ und $\Pi'$ constant setzen, weil dadurch die Genauigkeit auf keine merkliche Weise verletzt wird, und man bekommt daher $\delta J$, $\delta\Pi$ und $\delta\Pi'$ aus diesen Gleichungen dadurch, dass man $p$, $q$, $p'$, $q'$ für ihre Differentiale schreibt. Da in der Voraussetzung $\Pi$ und $\Pi'$ constant

$$\Pi-\pi_0+\theta_0=-\Phi_0,\quad \Pi'-\pi'_0+\theta'_0=-\Psi_0$$

wird, so setze ich

$$\left.\begin{aligned} p_1&=-p\cos\Phi_0+q\sin\Phi_0\\ q_1&=\quad p\sin\Phi_0+q\cos\Phi_0\\ p_1'&=-p'\cos\Psi_0+q'\sin\Psi_0\\ q_1'&=\quad p'\sin\Psi_0+q'\cos\Psi_0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(52)$$

wodurch

$$\left.\begin{aligned} \delta J&=\frac{q_1}{\cos i}-\frac{q'_1}{\cos i'}\\ \delta\Pi&=\operatorname{cotg} J\,\frac{p_1}{\cos i}-\operatorname{cosec} J\,\frac{p'_1}{\cos i'}\\ \delta\Pi'&=\operatorname{cosec} J\,\frac{p_1}{\cos i}-\operatorname{cotg} J\,\frac{p'_1}{\cos i'}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(53)$$

wird. Man kann $p_1$ und $q_1$ durch $u$ und $\frac{du}{d\varepsilon}$, für welche letztere ich der Kürze wegen $u_1$ schreiben werde, auf folgende Art ausdrücken. Da hier $r$ und $\bar{r}$ mit einander verwechselt werden dürfen, so wird zuerst

$$u=q\,\frac{r}{a}\sin(f+\pi_0-\theta_0)-p\,\frac{r}{a}\cos(f+\pi_0-\theta_0)$$

welcher Ausdruck leicht durch die vorstehenden Relationen in

$$u=q_1\,\frac{r}{a}\sin(f+\Pi_0)+p_1\,\frac{r}{a}\cos(f+\Pi_0)$$

umgewandelt wird. Da nun

$$\frac{d.r\sin f}{d\varepsilon}=a\cos\varphi\cos\varepsilon=\frac{r\cos f}{\cos\varphi}+\frac{re}{\cos\varphi}$$

$$\frac{d.r\cos f}{d\varepsilon}=-a\sin\varepsilon=-\frac{r\sin f}{\cos\varphi}$$

ist, so wird wenn man schlechtweg $\Pi$ für $\Pi_0$ schreibt, gleichwie schon $f$ und $r$ für $\bar{f}$ und $\bar{r}$ geschrieben worden ist, da hier keine Unterscheidung nöthig wird,

$$\frac{du}{dt} = u_1 = q_1 \frac{r}{a\cos\varphi}[\cos(f+\Pi) + e\cos\Pi] - p_1 \frac{r}{a\cos\varphi}[\sin(f+\Pi) + e\sin\Pi]$$

*) und die Elimination giebt

$$(54) \ldots \begin{cases} p_1 = \frac{u}{\cos^2\varphi}[\cos(f+\Pi) + e\cos\Pi] - \frac{u_1}{\cos\varphi}\sin(f+\Pi) \\ q_1 = \frac{u}{\cos^2\varphi}[\sin(f+\Pi) + e\sin\Pi] + \frac{u_1}{\cos\varphi}\cos(f+\Pi) \end{cases}$$

34.

Durch partielle Differentiationen ergiebt sich aus dem Ausdruck (48) für $\Omega$ leicht

$$\left(\frac{d\Omega}{dJ}\right) = -\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr' \sin J \sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')$$

$$\left(\frac{d\Omega}{d\Pi}\right) = -\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr' \left\{\sin(f+\Pi)\cos(f'+\Pi') - \cos J\cos(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\right\}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{d\Pi'}\right) = -\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr' \left\{\cos(f+\Pi)\sin(f'+\Pi') - \cos J\sin(f+\Pi)\cos(f'+\Pi')\right\}$$

Substituirt man diese sowie (53) in (51), so wird

$$\begin{aligned} \delta'\Omega = & -\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr' \sin J \cos(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\frac{p_1}{\cos i} \\ & -\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr' \sin J \sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\frac{q_1}{\cos i} \\ & +\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr' \sin J \sin(f+\Pi)\cos(f'+\Pi')\frac{p'_1}{\cos i'} \\ & +\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr' \sin J \sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\frac{q'_1}{\cos i'} \end{aligned}$$

Aber es wurde gefunden

$$\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = -\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r' \sin J \sin(f'+\Pi')$$

setzen wir diesem analog

$$\left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right) = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r \sin J \sin(f+\Pi)$$

so wird

$$\begin{aligned} \delta'\Omega = & \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) r\cos(f+\Pi)\frac{p_1}{\cos i} + \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) r\sin(f+\Pi)\frac{q_1}{\cos i} \\ & + \left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right) r'\cos(f'+\Pi')\frac{p'_1}{\cos i'} + \left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right) r'\sin(f'+\Pi')\frac{q'_1}{\cos i'} \end{aligned}$$

Da nun ferner

$$au = q_1 r\sin(f+\Pi) + p_1 r\cos(f+\Pi)$$

---

*) Bei der wirklichen Differentiation der rechten Seite dieses Ausdrucks im Ganzen müssen die in $p_1$ und $q_1$ enthaltenen Coordinaten des störenden Planeten auch als Functionen von $\varepsilon$ betrachtet, und veränderlich angenommen werden.

ist und eben so

$$a' u' = q'_1 r' \sin(f' + \Pi') + p'_1 r' \cos(f' + \Pi')$$

so wird

$$\delta \Omega = a \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) \frac{u}{\cos i} + a' \left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right) \frac{u'}{\cos i'}$$

und hängt also nicht von $\frac{du}{dt}$ oder $\frac{du}{dt}$, sondern blos von zwei Veränderlichen, nemlich von $u$ und $u'$ ab, wie am Ende des Art. 30 schon angemerkt wurde.

Differentiirt man diese Gleichung nach $f$ und $r$, so wird

$$\left(\frac{d\delta\Omega}{df}\right) = a \left(\frac{d^2\Omega}{df dZ}\right) \frac{u}{\cos i} + a \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) \left(\frac{du}{df}\right) \frac{1}{\cos i} + a' \left(\frac{d^2\Omega}{df dZ'}\right) \frac{u'}{\cos i'}$$

$$r \left(\frac{d\delta\Omega}{dr}\right) = ar \left(\frac{d^2\Omega}{dr dZ}\right) \frac{u}{\cos i} + a \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) r \left(\frac{du}{dr}\right) \frac{1}{\cos i} + a' r \left(\frac{d^2\Omega}{dr dZ'}\right) \frac{u'}{\cos i'}$$

Aber der Ausdruck für $u$ giebt

$$r \left(\frac{du}{dr}\right) = u$$

$$a \left(\frac{du}{df}\right) = q_1 r \cos(f + \Pi) - p_1 r \sin(f + \Pi)$$

oder nach der Elimination von $p_1$ und $q_1$ durch die Gleichungen (54)

$$a \left(\frac{du}{df}\right) = -\frac{re \sin f}{\cos^2\varphi} u + \frac{r}{\cos\varphi} u_1$$

Es wird also

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d\delta\Omega}{df}\right) &= \left\{a \left(\frac{d^2\Omega}{df dZ}\right) - \frac{re \sin f}{\cos^2\varphi} \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\right\} \frac{u}{\cos i} + \frac{r}{\cos\varphi} \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) \frac{u_1}{\cos i} + a' \left(\frac{d^2\Omega}{df dZ'}\right) \frac{u'}{\cos i'} \\ r \left(\frac{d\delta\Omega}{dr}\right) &= \left\{ar \left(\frac{d^2\Omega}{dr dZ}\right) + a \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\right\} \frac{u}{\cos i} + a' r \left(\frac{d^2\Omega}{dr dZ'}\right) \frac{u'}{\cos i'} \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

Der zweite dieser Differentialquotienten der Störungsfunction ist also wiederum nur von $u$ und $u'$ abhängig, der erste hingegen enthält alle drei Veränderlichen $u$, $u_1$ und $u'$.

Um $\left(\frac{d\delta\Omega}{dZ}\right)$ zu erhalten, müssen wir die Function vornehmen, welche durch $\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ repräsentirt wird, nemlich

$$\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = -\frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) \sin J \, r' \sin(f' + \Pi')$$

Diese giebt sogleich

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\delta\Omega}{dZ}\right) = &\frac{m'}{1+m} \frac{3}{\Delta^5} \sin J \, r' \sin(f' + \Pi') \, \Delta \delta \Delta \\ &- \frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) \cos J \, r' \sin(f' + \Pi') \, \delta J \\ &- \frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) \sin J \, r' \cos(f' + \Pi') \, \delta \Pi' \end{aligned}$$

Die Ausdrücke

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2} H\right)$$

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' H$$

geben aber

$$\Delta\delta'\Delta = - rr'\delta H$$

und hiemit

$$\delta'\Omega = - \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right\} \Delta\delta'\Delta$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem obigen Ausdruck für $\delta'\Omega$, so wird

$$\Delta\delta'\Delta = \sin J\, ar' \sin(f' + \Pi')\frac{u}{\cos i} - \sin J\, a'r \sin(f+\Pi)\frac{u'}{\cos i'}$$

Die Substitution dieses Ausdrucks, so wie die der Ausdrücke für $\delta J$ und $\delta\Pi'$ aus (53), giebt

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\delta'\Omega}{dZ}\right) = & \frac{m'}{1+m}\frac{3}{\Delta^5}\sin^2 J\, ar'^2 \sin^2(f'+\Pi')\frac{u}{\cos i} \\ & - \frac{m'}{1+m}\frac{3}{\Delta^5}\sin^2 J\, a'rr' \sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\frac{u'}{\cos i'} \\ & - \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\cos J\, r' \sin(f'+\Pi')\left\{\frac{q_1}{\cos i} - \frac{q'_1}{\cos i'}\right\} \\ & - \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right\}\sin J\, r' \cos(f'+\Pi')\left\{\operatorname{cosec} J\frac{p_1}{\cos i} - \operatorname{cotg} J\frac{p'_1}{\cos i'}\right\}\end{aligned}$$

Substituirt man hierin die Ausdrücke (54) für $p_1$ und $q_1$, so wie die analogen für $p'_1$ und $q'_1$, und setzt

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dZ^2}\right) = \frac{m'}{1+m}\frac{3}{\Delta^5}\sin^2 J\, r'^2 \sin^2(f'+\Pi') - \frac{m'}{1+m}\frac{1}{\Delta^3}$$

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dZdZ'}\right) = -\frac{m'}{1+m}\frac{3}{\Delta^5}\sin^2 J\, rr' \sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi') + \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\cos J$$

obgleich man in Bezug auf die zweite dieser die Bezeichnung nicht im eigentlichen Verstande nehmen darf, so wird in Folge der oben gegebenen Ausdrücke für $\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$ und $r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$

$$(56) \quad \ldots \quad \left(\frac{d\delta'\Omega}{dZ}\right) = \left\{a\left(\frac{d^2\Omega}{dZ^2}\right) - \frac{a}{r}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) + \frac{e\sin f}{r\cos^2\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\right\}\frac{u}{\cos i}$$
$$- \frac{1}{r\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\frac{u_1}{\cos i} + a'\left(\frac{d^2\Omega}{dZdZ'}\right)\frac{u'}{\cos i'}$$

wodurch sich zeigt, dass auch dieser Differentialquotient von allen drei Veränderlichen $u$, $u_1$ und $u'$ abhängt. Es mag hier bemerkt werden, dass die mit $u$ und $u_1$ multiplicirten Glieder dieses Ausdrucks zu den in der Gleichung (28) mit $u$ und $\frac{du}{dt}$ multiplicirten in sehr einfacher Beziehung stehen, und sie grössten Theils aufheben. Hiemit sind diese Entwicke-

lungen abgeschlossen, und es bleibt nur noch der Factor $\cos i$ zu betrachten übrig, womit das Differential der Störungen von $u$ multiplicirt ist.

35.

Die Ausdrücke (52) geben

$$\sin i \sin(\sigma-\theta_0) = p \qquad = -p_1 \cos\Phi + q_1 \sin\Phi$$
$$\sin i \cos(\sigma-\theta_0) = q + \sin i_0 = \sin i_0 + p_1 \sin\Phi + q_1 \cos\Phi$$

und hiemit wird

$$\cos^2 i = \cos^2 i_0 - 2p_1 \sin\Phi \sin i_0 - 2q_1 \cos\Phi \sin i_0 - p_1^2 - q_1^2$$

und wenn man nur die erste Potenz von $p_1$ und $q_1$ berücksichtigt,

$$\cos i = \cos i_0 - p_1 \sin\Phi \frac{\sin i_0}{\cos i_0} - q_1 \cos\Phi \frac{\sin i_0}{\cos i_0}$$

vermittelst der Ausdrücke (54) ergiebt sich hieraus

$$\cos i = \cos i_0 - \frac{\sin i_0}{\cos^2\varphi}[\sin(f+\pi_0-\theta_0) + e\sin(\pi_0-\theta_0)]\frac{u}{\cos i} - \frac{\sin i_0}{\cos\varphi}\cos(f+\pi_0-\theta_0)\frac{u_1}{\cos i} \quad (57)$$

Wenn die Neigungen klein sind, so werden alle im Vorhergehenden entwickelten, von $u$, $u_1$ und $u'$ abhängigen Glieder wenig oder gar nicht merklich sein, aber auch wenn die Neigung so gross wie möglich ist, können sie nie übermässig grosse Werthe bekommen, da allenthalben darin nur die Quotienten $\frac{u}{\cos i}$, $\frac{u_1}{\cos i}$ und $\frac{u'}{\cos i}$ vorkommen, deren Ausdrücke mit $\sin J$, und deren Factoren auch theils mit $\sin J$, theils mit $\sin^2 J$ multiplicirt sind Wenn man will, so kann man immer bewirken, dass die durch den Ausdruck (57) entstehenden Störungsglieder strenge Null werden; man braucht nur die Fundamentalebene, die in meiner Methode völlig willkührlich ist, so anzunehmen, dass $i_0 = 0$ wird. Von dieser Ebene kann man durch die Trigonometrie, und ohne Integrationen anwenden zu müssen, auf die Ecliptik oder den Äquator übergehen. Man kann aber auch weiter gehen, und folgenden Satz beweisen:

»Es lässt sich stets eine Ebene angeben, in Bezug auf welche »alle Breitenstörungen von der Ordnung der Quadrate und Producte »der störenden Kräfte sind.«

Um diesen Satz zu beweisen, braucht man nur (57) in (44) zu substituiren. Setzt man um abzukürzen

$$R_1 = \int hr \frac{\varrho}{a_0} \sin(\omega - f) \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) dt$$

so giebt diese Substitution allgemein

$$R = R_1 \cos i_0$$
$$- \frac{\sin i_0}{\cos^2\varphi}\int\frac{dR_1}{dt}\,\overline{R}_1\,[\sin(f+\pi_0-\theta_0)+e\sin(\pi_0-\theta_0)]\,dt$$
$$- \frac{\sin i_0}{\cos\varphi}\int\frac{dR_1}{dt}\left(\frac{dR_1}{nd\tau}\right)\frac{r}{a}\cos(f+\pi_0-\theta_0)\,dt$$

wo wie oben der Strich über der Function anzeigt, dass nach der Integration und bez. Differentiation $\tau$ in $t$ verwandelt werden muss. Hienach wird wie oben

$$u = \overline{R}$$

Da aber $i_0$ völlig willkührlich ist, so kann man $i_0 = 90^0$ setzen, wodurch der vorstehende Ausdruck für $R$ übergeht in

$$R = -\frac{1}{\cos^2\varphi}\int\frac{dR_1}{dt}\,\overline{R}_1\,[\sin(f+\pi_0-\theta_0)+e\sin(\pi_0-\theta_0)]\,dt$$
$$-\frac{1}{\cos\varphi}\int\frac{dR_1}{dt}\,\overline{\left(\frac{dR_1}{nd\tau}\right)}\,\frac{r}{a}\cos(f+\pi_0-\theta_0)\,dt$$

welche augenscheinlich eine Grösse von der Ordnung des Quadrats der störenden Kraft ist, und die Ordnung nicht ändert, wie viele störende Planeten auch vorhanden sein mögen.

Von dieser Ebene kann man jedenfalls durch blose trigonometrische Relationen zur Breite auf der Ecliptik oder auf den Äquator übergehen, indessen eignet sie sich nicht zur Reduction der Länge in der Bahn auf die Ecliptik oder den Äquator, weil zufolge des Ausdrucks (23) die Grösse $\Gamma$ unendlich gross werden würde. In seiner vollen Strenge ist daher dieser Satz nicht anwendbar, allein er zeigt, dass auch bei grossen Werthen von $i_0^2$ der Ausdruck von $u$ nicht unbegrenzt wachsen kann.

36.

Es wird, wie schon erwähnt, $\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$, oder welches dasselbe ist, $\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$ aus den Störungsformeln eliminirt, und durch $\left(\frac{d\Omega}{d\epsilon}\right)$ ersetzt werden. Den letztgenannten Differentialquotienten bekommt man aber durch directe Differentiation aus $\Omega$ selbst, da diese Function bei ihrer Reihenentwickelung explicite durch $\epsilon$ ausgedrückt werden soll. In der ersten Annäherung werden daher ausser $\Omega$ selbst, die folgenden beiden partiellen Differentialquotienten davon gebraucht:

$$r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) \text{ und } \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

Da in den Ausdrücken für die zweite Annäherung ebenfalls alle auf $f$

sich beziehenden Differentialquotienten von $\Omega$ eliminirt werden, so ist aus dem Vorhergehenden leicht zu erkennen, dass in dieser Annäherung ausser den beiden eben angeführten Differentialquotienten noch die folgenden gebraucht werden:

$$r^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right);\; r'\left(\frac{d\Omega}{dr'}\right);\; rr'\left(\frac{d^2\Omega}{drdr'}\right);\; r\left(\frac{d^2\Omega}{drdZ}\right);\; r'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'dZ}\right);$$
$$\left(\frac{d^2\Omega}{dZ^2}\right);\; \left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right);\; r\left(\frac{d^2\Omega}{drdZ'}\right);\; \left(\frac{d^2\Omega}{dZdZ'}\right)$$

Aber $\Omega$ und dessen Differentialquotienten sind homogene Functionen von $r$ und $r'$, und es werden in den hier entwickelten Formeln nicht die Differentialquotienten nach $r$ und $r'$ selbst, sondern allenthalben das Product derselben mit der bezüglichen Potenz von $r$ und $r'$ gebraucht, deshalb bekommt man durch Hülfe des bekannten Satzes für die Differentialquotienten homogener Functionen die Differentialquotienten von $\Omega$ nach $r'$ aus denen nach $r$ auf höchst einfache Weise, und es bleiben daher nur die folgenden sechs übrig, die direct berechnet werden müssen:

$$r^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right);\; r\left(\frac{d^2\Omega}{drdZ}\right);\; \left(\frac{d^2\Omega}{dZ^2}\right)$$
$$\left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right);\; r\left(\frac{d^2\Omega}{drdZ'}\right);\; \left(\frac{d^2\Omega}{dZdZ'}\right)$$

Ich mache hier darauf aufmerksam, dass man für die Berechnung der Störungen der zweiten Annäherung eine weit grössere Anzahl von Differentialquotienten der Störungsfunction brauchen würde, wenn man die Störungen der rechtwinkligen Coordinaten berechnen wollte, nemlich die folgenden:

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dx^2}\right);\; \left(\frac{d^2\Omega}{dxdy}\right);\; \left(\frac{d^2\Omega}{dxdz}\right);\; \left(\frac{d^2\Omega}{dxdx'}\right);\; \left(\frac{d^2\Omega}{dxdy'}\right);\; \left(\frac{d^2\Omega}{dxdz'}\right);$$
$$\left(\frac{d^2\Omega}{dy^2}\right);\; \left(\frac{d^2\Omega}{dydz}\right);\; \left(\frac{d^2\Omega}{dydx'}\right);\; \left(\frac{d^2\Omega}{dydy'}\right);\; \left(\frac{d^2\Omega}{dydz'}\right);$$
$$\left(\frac{d^2\Omega}{dz^2}\right);\; \left(\frac{d^2\Omega}{dzdx'}\right);\; \left(\frac{d^2\Omega}{dzdy'}\right);\; \left(\frac{d^2\Omega}{dzdz'}\right);$$

deren Anzahl funfzehn ist, und die alle bis auf einen derselben direct berechnet werden müssen, während man nach der hier entwickelten Methode nur höchstens sechs Differentialquotienten direct zu berechnen braucht.

37.

Wenn man die Reihenentwickelung von $\Omega$ nach der Methode ausführt, die ich im IV. Bande der Schriften dieser Gesellschaft gegeben habe, und durch welche man die Coefficienten der verschiedenen Glieder

durch Reihen ausdrückt, die nach den ganzen und positiven Potenzen von $r$ fortschreiten, so bekommt man $r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ und $r^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right)$ durch die einfache und directe Differentiation der genannten Coefficienten, und es lassen sich ausserdem einfache Relationen ableiten, durch welche man die übrigen, oben angeführten Differentialquotienten aus jenen erhalten kann. Wenn man sich hingegen zur Reihenentwickelung von $\Omega$ der Methode bedient, die ich weiter unten erklären werde, so müssen alle oben bezeichneten Differentialquotienten auf andere Art berechnet werden, und man braucht, um sie zu erhalten, die analytischen Ausdrücke derselben. Für die ersten Differentialquotienten nach $r$ und $Z$ sind diese schon oben angegeben, und es sind die folgenden:

$$r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr' H - \frac{m'}{1+m}\frac{r^2}{\Delta^3}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = -\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right] \sin J\, r' \sin(f'+\Pi')$$

Hieraus bekommt man durch die Differentiation leicht die übrigen, die oben nicht angegeben sind, und denen ich hier diese, um alles beisammen zu haben, hinzufüge.

$$r^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right) + r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \frac{m'}{1+m}\frac{3}{\Delta^5}(r^2 - rr' H)^2$$
$$+ \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr' H - 2\frac{m'}{1+m}\frac{r^2}{\Delta^3}$$

$$r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dZ}\right) = \frac{m'}{1+m}\frac{3}{\Delta^5}(r^2 - rr' H) \sin J\, r' \sin(f'+\Pi')$$

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dZ^2}\right) = \frac{m'}{1+m}\frac{3}{\Delta^5}\sin^2 J\, r'^2 \sin^2(f'+\Pi') - \frac{m'}{1+m}\frac{1}{\Delta^3}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right) = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r^3}\right) \sin J\, r \sin(f+\Pi)$$

$$r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dZ'}\right) = -\frac{m'}{1+m}\frac{3}{\Delta^5}(r'^2 - rr' H) \sin J\, r \sin(f+\Pi) + \left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right)$$

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dZ\,dZ'}\right) = -\frac{m'}{1+m}\frac{3}{\Delta^5}\sin^2 J\, rr' \sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi') + \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\cos J$$

Einige dieser Ausdrücke lassen sich, wenn die Entwickelungen von $\Delta^{-3}$ und $\Delta^{-5}$ gegeben sind, leicht berechnen, bei den andern, und namentlich bei denen, in welchen $H$ vorkommt, ist dieses in geringerem Maasse der Fall. Es lässt sich aber allenthalben $H$ eliminiren, wie ich jetzt zeigen werde.

## 38.

Aus dem Ausdruck

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' H$$

folgt leicht, dass

$$\frac{rr'H}{\Delta^3} = \frac{r^2+r'^2}{2\Delta^3} - \frac{1}{2\Delta}$$

Eliminirt man hiemit $\frac{H}{\Delta^3}$ aus dem obigen Ausdruck für $r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$, so wird

$$r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{r'^2-r^2}{2\Delta^3} - \frac{1}{2\Delta} - \frac{r}{r'^2}H\right\}$$

Derselbe Ausdruck für $\Delta^2$ giebt ferner

$$\frac{r^2-rr'H}{\Delta^3} = -\frac{r'^2-r^2}{2\Delta^3} + \frac{1}{2\Delta}$$

und hiemit gehen die bez. Ausdrücke des vor. Art. über in

$$r\left(\frac{d^2\Omega}{drdZ}\right) = -\tfrac{3}{2}\frac{m'}{1+m}\left\{\frac{r'^2-r^2}{\Delta^5} - \frac{1}{\Delta^3}\right\} \sin J\, r' \sin(f'+\Pi')$$

$$r\left(\frac{d^2\Omega}{drdZ'}\right) = \tfrac{3}{2}\frac{m'}{1+m}\left\{\frac{r'^2-r^2}{\Delta^5} - \frac{1}{\Delta^3}\right\} \sin J\, r \sin(f+\Pi) + \left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right)$$

deren letzterer sich vermittelst des Ausdrucks für $\left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right)$ in folgenden verwandelt,

$$r\left(\frac{d^2\Omega}{drdZ'}\right) = \tfrac{3}{2}\frac{m'}{1+m}\left\{\frac{r'^2-r^2}{\Delta^5} - \frac{1}{3\Delta^3}\right\} \sin J\, r \sin(f+\Pi) - \frac{m'}{1+m}\sin J \frac{r}{r'^3}\sin(f+\Pi)$$

Der Ausdruck von $\Delta^2$ giebt ferner

$$\frac{(r^2-rr'H)^2}{\Delta^5} = \frac{(r'^2-r^2)^2}{4\Delta^5} - \frac{r'^2-r^2}{2\Delta^3} + \frac{1}{4\Delta}$$

und hiemit bekommt man sogleich

$$r^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right) + r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{3(r'^2-r^2)^2}{4\Delta^5} - \frac{r'^2}{\Delta^3} + \frac{1}{4\Delta}\right\} - \frac{m'}{1+m}\frac{r}{r'^2}H$$

Die Factoren, welche $\Delta^{-5}$ und $\Delta^{-3}$ in diesen Ausdrücken bekommen, sind einfache Grössen, und dieselben Factoren kommen in mehreren Ausdrücken vor. Die Producte erhält man leicht und sicher durch die Methode der mechanischen Multiplication von Reihen, die ich zuerst in meiner Berliner Preisschrift vom Jahre 1830 gegeben, und dort in grösster Ausdehnung angewandt habe.

## 39.

Es wäre unangemessen, die eben entwickelten Ausdrücke in der Form, wie sie angesetzt worden sind, zur numerischen Rechnung anwenden zu wollen, da in dieser Form grosse und kleine Grössen unter einander gemischt vorkommen, wovon der Erfolg ist, dass man eine Grösse bald mit einem grossen Factor, und bald darauf das Product wieder mit einem kleinen Factor, oder umgekehrt, multipliciren müsste.

Es müssen vielmehr diese Ausdrücke für die zweckmässigste Anwendung derselben so vorbereitet werden, dass jeder Factor, welcher darin vorkommt, seinen natürlichen Gegenfactor erhält, und dieses bewirkt man dadurch, dass man statt der linearischen Grössen, die in diesen Ausdrücken enthalten sind, ihre Verhältnisse einführt. Es bestehen schliesslich alle für die Berechnung der Störungen erforderlichen Formeln aus lauter Verhältnisszahlen, deren Producte man durch blose Multiplication mit der Anzahl von Secunden, die dem Kreisradius gleichkommt, in Secunden verwandeln kann. Die vorhergehenden Ausdrücke sind daher in folgender Form zur numerischen Rechnung am geeignetesten.

$$a\Omega = \mu\left(\frac{a}{\Delta}\right) - (H)$$

$$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \tfrac{1}{2}\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\left\{\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right\} - \tfrac{1}{2}\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right) - (H)$$

$$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = -\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 \alpha \sin J\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+\Pi') + (J)$$

$$ar^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right) + ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \tfrac{3}{4}\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5\left\{\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}^2 - \mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right) - (H)$$

$$a^2r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dZ}\right) = -\tfrac{3}{2}\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5\left\{\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}\alpha\sin J\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+\Pi') + \tfrac{3}{2}\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\alpha\sin J\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+I$$

$$a^3\left(\frac{d^2\Omega}{dZ^2}\right) = 3\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5\alpha^2\sin^2 J\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\sin^2(f'+\Pi') - \mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$$

$$aa'\left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right) = \mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\alpha\sin J\left(\frac{r}{a}\right)\sin(f+\Pi) - (J)'$$

$$aa'r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dZ'}\right) = \tfrac{3}{2}\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5\left\{\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}\alpha\sin J\left(\frac{r}{a}\right)\sin(f+\Pi) - \tfrac{1}{2}\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\alpha\sin J\left(\frac{r}{a}\right)\sin(f+\Pi) -$$

$$a^2a'\left(\frac{d^2\Omega}{dZ\,dZ'}\right) = -3\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5\alpha^2\sin^2 J\left(\frac{r'}{a'}\right)\left(\frac{r}{a}\right)\sin(f'+\Pi')\sin(f+\Pi) + \mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\alpha\cos J - (J)''$$

in welchen zur Abkürzung

$$\mu = \frac{m'}{1+m}\,206265''$$

$$\alpha = \frac{a'}{a}$$

$$(H) = \frac{\mu}{\alpha^3}\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)H$$

$$(J) = \frac{\mu}{\alpha^3}\sin J\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\sin(f'+\Pi')$$

$$(J)' = \frac{\mu}{\alpha^3}\sin J\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\left(\frac{r}{a}\right)\sin(f+\Pi)$$

$$(J)'' = \frac{\mu}{\alpha^3}\cos J\left(\frac{a'}{r'}\right)^3$$

gesetzt worden ist.

## 10.

Aus den vorhergehenden Ausdrücken erhellet, dass nach der Ausführung der Reihenentwickelungen von

$$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right);\ \mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3;\ \mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5$$

so wie der der Grossen

$$\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2;\ \left(\frac{r}{a}\right)^2;\ \sin J\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+\Pi');\ \sin J\left(\frac{r}{a}\right)\sin(f+\Pi)$$
$$(H);\ (J);\ (J)';\ (J)'';$$

welche letztere sehr leicht zu erhalten sind, die Grösse $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ mit den Factoren

$$\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2;\ \left(\frac{r}{a}\right)^2;$$
$$\alpha\sin J\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+\Pi');$$
$$\text{und } \alpha\sin J\left(\frac{r}{a}\right)\sin(f+\Pi);$$

und die Grösse $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5$ mit den Factoren

$$\left\{\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}^2;$$
$$\left\{\alpha\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}\alpha\sin J\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+\Pi');$$
$$\alpha^2\sin^2 J\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\sin^2(f'+\Pi');$$
$$\left\{\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}\alpha\sin J\left(\frac{r}{a}\right)\sin(f+\Pi);$$
$$\text{und } \alpha^2\sin^2 J\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+\Pi')\left(\frac{r}{a}\right)\sin(f+\Pi);$$

multiplicirt werden muss, aus welchen Producten sich alle erforderlichen Differentialquotienten von $\Omega$ ergeben.

Will man blos die von der ersten Potenz der Massen abhängigen Störungen berechnen, so wird die Entwickelung von $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5$ überflüssig, und $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ ist blos mit den Factoren

$$\left\{\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}$$
$$\text{und } \alpha\sin J\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+\Pi')$$

zu multipliciren, um die in diesem Falle erforderlichen Differentialquotienten von $\Omega$ zu erhalten.

## § 5. Aufstellung aller für die Berechnung der Störungen erster und zweiter Ordnung in Bezug auf die Massen erforderlichen Ausdrücke.

### 41.

Ich werde hier alle diese Ausdrücke vollständig aufstellen, und so behandeln als müsste man davon in grösster Ausdehnung Gebrauch machen. In der Anwendung wird dieses jedoch nicht der Fall sein, sondern man wird von den zur zweiten Ordnung gehörigen manche übergehen dürfen, und von andern nur einige wenige Glieder gebrauchen. Die strengen Ausdrücke, auf deren Entwickelung es ankommt, sind (44)

$$\frac{dW_0}{dt} = h_0 \left\{ 2\,\frac{\varrho}{r}\cos(\bar{f}-\omega) - 1 + 2\,\frac{h^2 \varrho}{h_0^2\, a_0 \cos^2\varphi_0}\left[\cos(\bar{f}-\omega) - 1\right] \right\} \left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$
$$+\ 2h_0\,\frac{\varrho}{r}\sin(\bar{f}-\omega)\, r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

woraus die Störungen der Länge und des Radius Vectors hervorgehen, und (45)

$$\frac{dR_0}{dt} = hr\,\frac{\varrho}{a_0}\sin(\omega-\bar{f})\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i$$

woraus die Breitenstörungen folgen.

Ich habe früher diese Ausdrücke in unendliche Reihen aufgelöst, die nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen der mittleren Anomalien fortschreiten, und habe dadurch in den Anwendungen, die ich davon gemacht habe, nemlich auf die Jupiter-, Saturn-, Erd- und Mondstörungen hinreichend stark convergirende Reihen erhalten, weil dabei durchgehends nur kleine Excentricitäten und Neigungen vorkommen. Allein wenn diese Elemente nur etwas grössere Werthe wie in den genannten Theorien annehmen, so nimmt die Convergenz schon sehr ab; kommt noch der Umstand hinzu, dass das Minimum der Entfernung des gestörten und störenden Planeten von einander etwas kleiner ist, so wird auch aus diesem Grunde die Convergenz schwächer. Eine kleine Veränderung dieses Minimums wirkt überhaupt bedeutend auf die Grösse und sonstige Beschaffenheit der Störungen ein, und zwar schon bei solchen Minimis der Entfernung, wie sie zwischen den kleinen Planeten und dem Jupiter vorkommen. Einen Schluss von den Störungen, die derjenige der kleinen Planeten erleidet, welcher unter allen diesen vom Jupiter am weitesten entfernt bleibt, auf die Störungen machen zu wollen, die die andern kleinen Planeten vom Jupiter erleiden, ist daher im Voraus unmöglich, und in der Regel ein Fehlschluss.

Ich habe aber in den »Absoluten Störungen etc.« gezeigt, dass die Anwendung der excentrischen Anomalie des gestörten Planeten statt der mittleren selbst bei den grössten Excentricitäten eine bedeutende Convergenz hervorbringt, und diese ist es daher, die auch bei der Berechnung der Störungen der kleinen Planeten angewandt werden muss. Unter der excentrischen Anomalie, in Bezug auf welche die Störungen entwickelt werden sollen, verstehe ich die, welche aus der Zeit und den den Störungsrechnungen überhaupt zu Grunde gelegten constanten Elementen folgt, und werde sie, wo eine Unterscheidung in der Bezeichnung nothwendig wird, mit $\varepsilon_0$, so wie den dazu gehörigen Radius Vector mit $r_0$ bezeichnen. Es wird also

$$n_0 t + c_0 = \varepsilon_0 - e_0 \sin \varepsilon_0, \text{ und } n_0 dt = \frac{r_0}{a_0}\, d\varepsilon_0$$

Es wird in Folge der Einführung von $\varepsilon_0$ nothwendig, in den eben angeführten Ausdrücken $dt$ durch $d\varepsilon_0$ zu eliminiren, und es wird dadurch, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{dW_0}{d\varepsilon_0} = T, \text{ und } \frac{dR_0}{d\varepsilon_0} = U$$

setzt,

$$T = \frac{h_0 r_0}{n_0 a_0}\left\{2\frac{\varrho}{r}\cos(\bar{f}-\omega) - 1 + 2\frac{h^2 \varrho}{h_0{}^2 a_0 \cos^2\varphi_0}[\cos(\bar{f}-\omega) - 1]\right\}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$
$$+ 2\frac{h_0 r_0}{n_0 a_0}\frac{\varrho}{r}\sin(\bar{f}-\omega)\, r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$
$$U = \frac{h r_0 r \varrho}{n_0 a_0{}^2}\sin(\omega-\bar{f})\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i$$

welches die Ausdrücke sind, von welchen die Entwickelungen ausgehen müssen.

## 42.

Für die erste Annäherung bekommt man aus der ersten der vorstehenden Ausdrücke

$$T = \frac{1}{\cos\varphi}\left\{2\varrho\cos(f-\omega) - r + \frac{2\varrho r}{a\cos^2\varphi}[\cos(f-\omega) - 1]\right\}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$
$$+ \frac{2}{\cos\varphi}\,\varrho\sin(f-\omega)\, r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

wo, wie in allen folgenden Ausdrücken, die Unterscheidungszeichen überflüssig werden, da allenthalben unter den Elementen die constanten $a_0$, $e_0$, etc. und unter den Coordinaten diejenigen, welche aus der elliptischen Bewegung folgen, verstanden werden müssen. Da

$$\frac{df}{d\varepsilon} = \frac{a\cos\varphi}{r}, \quad \frac{dr}{d\varepsilon} = \frac{er\sin f}{\cos\varphi}$$

ist, so wird

$$(58) \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) = \left(\frac{d\Omega}{df}\right)\frac{a\cos\varphi}{r} + \left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\frac{er\sin f}{\cos\varphi}$$

woraus

$$\left(\frac{d\Omega}{df}\right) = \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)\frac{r}{a\cos\varphi} - r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\frac{er\sin f}{a\cos^2\varphi}$$

folgt. Eliminirt man hiemit $\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$, so wird

$$(59) \quad \ldots\ldots \quad T = Ma\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) + Nar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

wo

$$M = \frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\left\{r\varrho\cos(f-\omega) - r^2 + \frac{2r^2\varrho}{a\cos^2\varphi}[\cos(f-\omega)-1]\right\}$$

$$N = \frac{1}{a\cos\varphi}\left\{2\varrho\sin(f-\omega) - \left\{2\varrho\cos(f-\omega) - r + \frac{2\varrho r}{a\cos^2\varphi}[\cos(f-\omega)-1]\right\}\frac{er\sin f}{a\cos^2\varphi}\right\}$$

Man sieht hier sogleich, dass $M$ sich auf eine endliche Function der excentrischen Anomalie hinführen lässt, dass dieses auch mit $N$ der Fall ist, wird die folgende Umformung zeigen. Es ist

$$\varrho = a\cos^2\varphi - \varrho e\cos\omega$$

$$1 = \frac{r}{a\cos^2\varphi} + \frac{er\cos f}{a\cos^2\varphi}$$

Substituirt man diesen Werth von $\varrho$ in das letzte, und diesen Werth von Eins in das erste Glied des Ausdrucks für $N$, so wird

$$N = \frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\left\{3r^2 e\sin f - 2\varrho re\sin\omega + 2\varrho r\sin(f-\omega) - 2\frac{\varrho r^2 e\sin f}{a\cos^2\varphi}\cos(f-\omega) - 2\frac{\varrho r^2 e^2\sin f\cos\omega}{a\cos^2\varphi}\right.$$

Es ist aber identisch

$$-2\frac{\varrho r^2 e\sin f}{a\cos^2\varphi}\cos(f-\omega) = -2\frac{\varrho r^2 e\sin\omega}{a\cos^2\varphi} - 2\frac{\varrho r^2 e\cos f}{a\cos^2\varphi}\sin(f-\omega)$$

$$-2\frac{\varrho r^2 e^2\sin f\cos\omega}{a\cos^2\varphi} = -2\frac{\varrho r^2 e^2\cos f\sin\omega}{a\cos^2\varphi} - 2\frac{\varrho r^2 e^2}{a\cos^2\varphi}\sin(f-\omega)$$

$$2\varrho r\sin(f-\omega) = 2\frac{\varrho r^2}{a\cos^2\varphi}\sin(f-\omega) + 2\frac{\varrho r^2 e\cos f}{a\cos^2\varphi}\sin(f-\omega)$$

also wenn man diese Gleichungen Seite für Seite addirt

$$2\varrho r\sin(f-\omega) - 2\frac{\varrho r^2 e\sin f}{a\cos^2\varphi}\cos(f-\omega) - 2\frac{\varrho r^2 e^2\sin f\cos\omega}{a\cos^2\varphi}$$

$$= -2\varrho re\sin\omega\left\{\frac{r}{a\cos^2\varphi} + \frac{er\cos f}{a\cos^2\varphi}\right\} + 2\frac{\varrho r^2(1-e^2)}{a\cos^2\varphi}\sin(f-\omega)$$

$$= -2\varrho re\sin\omega + 2\frac{\varrho r^2}{a}\sin(f-\omega)$$

Substituirt man diese Gleichung, so erhält man

$$N = \frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\left\{2\frac{\varrho r^2}{a}\sin(f-\omega) + 3r^2 e\sin f - 4\varrho re\sin\omega\right\}$$

woraus ersichtlich ist, dass auch $N$ sich in eine endliche Function der

excentrischen Anomalie verwandeln lässt. Die Anwendung der Gleichungen

$$r\cos f = a\cos\varepsilon - ae\,,\quad \varrho\cos\omega = a\cos\eta - ae$$
$$r\sin f = a\cos\varphi\sin\varepsilon\,,\quad \varrho\sin\omega = a\cos\varphi\sin\eta$$
$$r = a - ae\cos\varepsilon\quad,\quad \varrho = a - ae\cos\eta$$

giebt nun ohne Schwierigkeit

$$\left.\begin{aligned}M&=\frac{1}{\cos^2\varphi}\Big\{-3(1-\tfrac{1}{2}e^2)+2e\cos\varepsilon-\tfrac{1}{2}e^2\cos 2\varepsilon\\&\qquad+e^2\cos(\eta+\varepsilon)-3e\cos\eta+(4-e^2)\cos(\eta-\varepsilon)-e\cos(\eta-2\varepsilon)\Big\}\\N&=\frac{1}{\cos^2\varphi}\Big\{e\sin\varepsilon-\tfrac{1}{2}e^2\sin 2\varepsilon\\&\qquad+e^2\sin(\eta+\varepsilon)-e\sin\eta-(2-e^2)\sin(\eta-\varepsilon)+e\sin(\eta-2\varepsilon)\Big\}\end{aligned}\right\}(60)$$

Der strenge Ausdruck für $U$ des vor. Art. giebt für die erste Annäherung

$$U=\frac{r^2\varrho}{a\cos\varphi}\sin(\omega-f)\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i$$

und wenn man hierin auch die excentrische Anomalie einführt,

$$U=Q\,a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ (61)$$

wo

$$Q=e\sin\varepsilon-\tfrac{1}{2}e^2\sin 2\varepsilon$$
$$+\tfrac{1}{2}e^2\sin(\eta+\varepsilon)-\tfrac{3}{2}e\sin\eta+(1+\tfrac{1}{2}e^2)\sin(\eta-\varepsilon)-\tfrac{1}{2}e\sin(\eta-2\varepsilon)\quad(62)$$

also eine Function von derselben Gattung ist wie $M$ und $N$.

Der partielle Differentialquotient $\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ ist die Componente der störenden Kraft, die in der Richtung des Radius Vectors, und $\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ die, welche senkrecht auf die Bahnebene wirkt. Nennt man für einen Augenblick $v$ die Geschwindigkeit des gestörten Planeten, so ist $\frac{an}{rv}\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$ die Componente der störenden Kraft, die in der Richtung der Tangente an der Ellipse wirkt; dieses findet man leicht durch die Bemerkung, dass

$$v^2=\frac{a^4n^2}{r^2}(1-e^2\cos^2\varepsilon)$$

ist.

43.

Für die Störungsglieder zweiter Ordnung in Bezug auf die Massen setze ich

$$\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon}=A\frac{an\delta z}{r}+B\nu+C\delta\frac{h}{h_0}+D\frac{u}{\cos i}+E\frac{u_1}{\cos i}$$
$$+F n'\delta z'+G\nu'+H\frac{u'}{\cos i'}$$

in welchem Ausdruck nur Ein störender Planet berücksichtigt ist, indem jeder ausserdem hinzukommende keinen andern Einfluss äussert, wie drei, den Gliedern der zweiten Zeile völlig ähnliche diesem Ausdruck hinzuzufügen, wenn man unter den zweiten Factoren der Glieder der ersten Zeile die vollständigen Störungen der ersten Ordnung des gestörten Planeten versteht, und auch die ersten Factoren dieser Glieder auf alle vorhandenen störenden Planeten ausdehnt.

## 44.

Die nächste Aufgabe besteht nun darin, die Ausdrücke der Coefficienten $A$, $B$, etc. der Störungen zu ermitteln. In dem strengen, im Art. 41 gegebenen Ausdruck für $T$ sind mit Ausnahme des allgemeinen Factors $r_0$, welcher kein $n\delta z$, sondern an dessen Statt die mittlere Anomalie

$$g = n_0 t + c_0$$

enthält, alle $r$ und $f$ Functionen von $n\delta z$, und da $n\delta z$ der oben mit $g$ bezeichneten mittleren Anomalie hinzugefügt werden muss, so muss man um das Product $A\frac{a}{r}$ zu erhalten, $T$ in Bezug auf die mittlere Anomalie $g$ des gestörten Planeten differentiiren und mit $dg$ dividiren, jedoch bei dieser Differentiation den allgemeinen Factor $r_0$ constant annehmen. Setzt man daher für einen Augenblick $T = rT'$, so wird

$$A\frac{a}{r} = r\left(\frac{dT'}{d\varepsilon}\right)\frac{d\varepsilon}{dg}$$

aber es ist $\frac{d\varepsilon}{dg} = \frac{a}{r}$, also wird

$$A = r\left(\frac{dT'}{d\varepsilon}\right)$$

Die Differentiation der Relation zwischen $T$ und $T'$ giebt

$$r\left(\frac{dT'}{d\varepsilon}\right) = \left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right) - \frac{1}{r}\,T\frac{dr}{d\varepsilon}$$

und da $\frac{dr}{d\varepsilon} = ae\sin\varepsilon$ ist, wird schliesslich

$$(63) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A = \left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right) - T\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$$

Es wird daher $A$ durch directe Differentiation von $T$ nach $\varepsilon$, und durch Subtraction des Products von $T$ in

$$\frac{ae\sin\varepsilon}{r} = 2\beta\sin\varepsilon + 2\beta^2\sin 2\varepsilon + 2\beta^3\sin 3\varepsilon + \ldots$$

erhalten, und um das erste Glied des im vor. Art. gegebenen Ausdrucks

zu erhalten, muss dieses $A$ mit dem Product der Längenstörungen $n\delta z$ in

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{\cos\varphi} + \frac{2\beta}{\cos\varphi}\cos\varepsilon + \frac{2\beta^2}{\cos\varphi}\cos 2\varepsilon + \frac{2\beta^3}{\cos\varphi}\cos 3\varepsilon + \ldots$$

multiplicirt werden, in welchen Reihen $\beta = \text{tg}\,\frac{1}{2}\varphi$ ist, so dass diese Reihen bei bedeutend grossen Excentricitäten noch stark convergiren. Diese sind übrigens die einzigen unendlichen Reihen dieser Art, die vorkommen werden, alle noch zu ermittelnden Coefficienten sind endliche Functionen der excentrischen Anomalie.

Um $B$ zu erhalten, muss man das Differential von $T$ nach $\nu$ nehmen, und mit $d\nu$ dividiren, aber wegen $r = \bar{r}\,(1 + \nu)$ ist dieser Differentialquotient gleich $r\left(\frac{dT}{dr}\right)$, wobei wieder der allgemeine Factor $r_0$ constant gesetzt werden muss. Setzt man zuerst in dem strengen Ausdruck von $T$ den Radius $r$ ausserhalb der Differentialquotienten von $\Omega$ constant, und nennt den bezüglichen Differentialquotienten $V$, so ist offenbar

$$V = \frac{1}{\cos\varphi}\left\{2\varrho\cos(f-\omega) - r + \frac{2\varrho r}{a\cos^2\varphi}\left[\cos(f-\omega) - 1\right]\right\} r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,df}\right)$$
$$+ \frac{2}{\cos\varphi}\,\varrho\sin(f-\omega)\left\{r^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right) + r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\}$$

und setzt man hingegen in diesen Differentialquotienten $r$ constant und ausserhalb derselben veränderlich, so wird, wenn man den daraus entstehenden Differentialquotienten mit $X$ bezeichnet,

$$X = -\frac{2}{\cos\varphi}\,\varrho\cos(f-\omega)\left(\frac{d\Omega}{df}\right) - \frac{2}{\cos\varphi}\,\varrho\sin(f-\omega)\,r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

und hieraus folgt

$$B = V + X \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

Da $r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ hier als blose Function von $r$ und $f$ betrachtet werden darf, welche ihrerseits Functionen blos von $\varepsilon$ sind, so wird

$$\frac{d.r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon} = r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,df}\right)\frac{a\cos\varphi}{r} + \left\{r\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right) + \left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\}\frac{er\sin f}{\cos\varphi}$$

welche Gleichung der Gleichung (58) völlig analog ist. Die im Art. 42 mit $T$ vorgenommenen Umformungen können also ohne Veränderung auch auf $V$ angewandt werden, und es wird sogleich

$$V = M\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right) + N\left\{ar^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right) + ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\} \quad \ldots \quad (65)$$

wo $M$ und $N$ durch die Ausdrücke (60) gegeben sind. Die Anwendung der Gleichung (58) auf den obigen Ausdruck für $X$ giebt

$$X = -\frac{2}{a\cos^2\varphi}\varrho r\cos(f-\omega)\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$$
$$-\frac{2}{a\cos^2\varphi}\left\{\varrho r\sin(f-\omega) - e\varrho r\sin\omega\right\}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

und führt man hier auch die excentrische Anomalie ein, so ergiebt sich

$$(66) \quad \ldots\ldots\ldots \quad X = M'a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) + N'ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

wo

$$(67)\begin{cases} M' = \frac{1}{\cos^2\varphi}\left\{-2e^2+2e\cos\varepsilon - e^2\cos(\eta+\varepsilon)+2e\cos\eta-(2-e^2)\cos(\eta-\varepsilon)\right\} \\ N' = \frac{1}{\cos^2\varphi}\left\{2e\sin\varepsilon - e^2\sin(\eta+\varepsilon) + (2-e^2)\sin(\eta-\varepsilon)\right\} \end{cases}$$

ist. Der strenge Ausdruck für $T$ giebt sogleich

$$C = 4\frac{r\varrho}{a\cos^2\varphi}[\cos(f-\omega)-1]\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

und dieser kann leicht aus den bereits eingeführten Grössen berechnet werden. Verwandelt man $\tau$ in $t$ in den obigen Ausdruck für $T$, und zeigt dieses wie früher durch einen darüber gestellten Strich an, so erhält man

$$(68) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \overline{T} = \frac{r}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

und hiemit findet man leicht, dass

$$(69) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad C = 2\left\{T + X + \overline{T}\right\}$$

wird, wodurch dieser Coefficient leicht und sicher berechnet werden kann.

Die Störungen $n\delta z$ und $\nu$ hat man unmittelbar aus der ersten Annäherung, es muss aber noch gezeigt werden, wie man $\delta\frac{h}{h_0}$ erhält. Hiezu dient die Gleichung (33), welche ich zuerst so stellen will

$$\frac{h_0}{h} = \frac{dz}{dt}(1+\nu)^2$$

Da $\frac{h}{h_0} = 1 + \delta\frac{h}{h_0}$ ist, indem in der ersten Annäherung der Werth Eins für $\frac{h}{h_0}$ gesetzt worden ist, so wird, wenn man blos auf die Glieder erster Ordnung in Bezug auf die Massen Rücksicht nimmt,

$$\frac{h_0}{h} = 1 - \delta\frac{h}{h_0}$$

und da ferner

$$\frac{dz}{dt} = 1 + \frac{d\delta z}{dt}$$

ist, so giebt die vorstehende Gleichung

$$(70) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \delta\frac{h}{h_0} = -\frac{d\delta z}{dt} - 2\nu$$

für welche $\frac{d\delta z}{dt}$ nicht minder wie $\nu$ zu den in der ersten Annäherung unmittelbar erhaltenen Grössen gehört.* Ein anderes Verfahren, um $\delta\frac{h}{h_0}$ zu erhalten, gewährt die Gleichung (42). Diese giebt zuerst, wenn man nur die Störungen erster Ordnung berücksichtigt,

$$d\frac{h}{h_0} = -\frac{an}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

woraus, wegen (68), sogleich

$$\delta\frac{h}{h_0} = -\int \overline{T}\, d\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

folgt. Aus diesen beiden Berechnungsarten für $\delta\frac{h}{h_0}$ erlangt man zugleich eine Controle für die numerische Berechnung der Störungen der ersten Annäherung.

## 45.

Für die Ermittelung der Coefficienten $D$, $E$ und $H$ des Ausdrucks des Art. 43 dienen die im § 4 abgeleiteten, und von der mit $\delta'$ bezeichneten Variation abhängigen Ausdrücke. Der Coefficient $D$ ergiebt sich, wenn man die Coefficienten von $\frac{u}{\cos i}$, $E$ wenn man die Coefficienten von $\frac{u_1}{\cos i}$, und $H$ wenn man die Coefficienten von $\frac{u'}{\cos i}$ der Gleichung (55) für $\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$ und $r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ in den Ausdruck für $T$ substituirt. Es wird damit sogleich

$$D = P + Q$$

wenn man für einen Augenblick

$$P = \frac{1}{\cos\varphi}\left\{2\rho\cos(f-\omega) - r + \frac{2\rho r}{a\cos^2\varphi}[\cos(f-\omega)-1]\right\}a\left(\frac{d^2\Omega}{df dZ}\right)$$
$$+\frac{2}{\cos\varphi}\rho\sin(f-\omega)\, ar\left(\frac{d^2\Omega}{dr dZ}\right)$$
$$Q = \frac{1}{\cos\varphi}\left\{2\rho\sin(f-\omega) - \{2\rho\cos(f-\omega) - r + \frac{2\rho r}{a\cos^2\varphi}[\cos(f-\omega)-1]\}\frac{er\sin f}{a\cos^2\varphi}\right\}a\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

setzt, ferner

$$E = \frac{1}{\cos^2\varphi}\left\{2\rho r\cos(f-\omega) - r^2 + \frac{2\rho r^2}{a\cos^2\varphi}[\cos(f-\omega)-1]\right\}\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$
$$H = \frac{1}{\cos\varphi}\left\{2\rho\cos(f-\omega) - r + \frac{2\rho r}{a\cos^2\varphi}[\cos(f-\omega)-1]\right\}a'\left(\frac{d^2\Omega}{df dZ'}\right)$$
$$+\frac{2}{\cos\varphi}\rho\sin(f-\omega)\, a'\, r\left(\frac{d^2\Omega}{dr dZ'}\right)$$

Die Functionen, mit welchen hier die Differentialquotienten von $\Omega$ multiplicirt sind, sind dieselben, die im vorvor. Art. vorkamen und in Func-

tionen der excentrischen Anomalie verwandelt wurden. Es ergiebt sich daher hier sogleich

$$(72) \quad \ldots \quad \begin{cases} D = Ma^2\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon dZ}\right) + N\left\{a^2r\left(\frac{d^2\Omega}{drdZ}\right) + a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\right\} \\ E = Ma^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) \\ H = Maa'\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon dZ'}\right) + Naa'r\left(\frac{d^2\Omega}{drdZ'}\right) \end{cases}$$

Die gegenseitige Neigung der Bahnen des gestörten und des störenden Planeten muss beträchtlich sein, wenn diese Ausdrücke wesentlich merkliche Störungen enthalten sollen.

46.

Die Coefficienten $F$ und $G$ des Ausdrucks des Art. 43 sind leicht zu erhalten. Es wird

$$F = \left(\frac{dT}{dg'}\right)$$

oder

$$(73) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad F = \left(\frac{dT}{dc'}\right)$$

wo $g'$ überhaupt die mittlere Anomalie des störenden Planeten, und $c'$ die mittlere Anomalie desselben für $t = 0$ bedeuten. Da die Störungen in Bezug auf $g'$ oder $c'$ explicite entwickelt werden sollen, so bekommt man $F$ durch directe Differentiation von $T$. Es ist ferner wegen $r' = \bar{r}'(1 + \nu)$

$$G = r'\left(\frac{dT}{dr'}\right)$$

aber in dem Ausdruck für $T$ kommt $r'$ nur in den Differentialquotienten von $\Omega$ vor, und da diejenigen derselben, die in $T$ vorkommen, in Bezug auf $r$ und $r'$ homogene Functionen von der minus ersten Ordnung sind, so giebt der für diese Functionen statt findende, längst bekannte Satz sogleich

$$(74) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad G = -V - T$$

Nachdem man nun $\frac{d\delta W_0}{dt}$, so wie das Integral $\delta W_0$ davon berechnet hat, bekommt man daraus $\overline{\delta W_0}$ durch Verwandelung von $\eta$ in $\varepsilon$, und hiemit wird die erste (40), wenn man darin nur die Störungen zweiter Ordnung in Bezug auf die Massen aufnimmt,

$$(75) \quad \ldots\ldots \quad n\delta z = \int \frac{r}{a}\left\{\overline{\delta W_0} + \overline{\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)}\frac{an\delta z}{r} + \nu^2\right\}d\varepsilon$$

die man, wenn man will, auch wie folgt stellen kann

$$n\delta z = \int\left\{\frac{r}{a}[\delta W_0 + \nu^2] + \overline{\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)} n\delta z\right\} d\varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (76)$$

Die Grösse $\frac{an\delta z}{r}$ ist übrigens schon oben angewandt worden; die Grössen $\overline{\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)}$ und $\nu^2$ werden aus der Berechnung der Störungen erster Ordnung erhalten, und zwar die erstere durch directe Differentiation und $\nu^2$ durch mechanische Erhebung von $\nu$ ins Quadrat. Es ist ferner

$$\frac{d\delta W_0}{d\tau} = \frac{d\delta W_0}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{d\tau}$$

und daher

$$\left(\frac{d\delta W_0}{d\tau}\right) dt = \left(\frac{d\delta W_0}{d\eta}\right) d\varepsilon$$

Aus

$$\frac{dW_0}{d\tau} = \frac{dW_0}{d\eta}\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{dW_0}{d\eta}\frac{an}{\varrho}$$

folgt ferner

$$\frac{d^2W_0}{d\tau^2} = \frac{d^2W_0}{d\eta^2}\frac{an}{\varrho}\frac{d\eta}{d\tau} - \frac{dW_0}{d\eta}\frac{an}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{d\eta}\frac{d\eta}{d\tau}$$

und hieraus

$$\overline{\left(\frac{d^2W_0}{d\tau^2}\right)} dt = \overline{\left(\frac{d^2W_0}{d\eta^2}\right)}\frac{an}{r} d\varepsilon - \overline{\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)}\frac{ane\sin\varepsilon}{r^2} d\varepsilon$$

Es wird daher die zweite Gleichung (40), wenn wir darin auch nur die Störungen zweiter Ordnung aufnehmen,

$$\delta\nu = -\tfrac{1}{2}\int\left\{\overline{\left(\frac{d\delta W_0}{d\eta}\right)} + \left[\overline{\left(\frac{d^2W_0}{d\eta^2}\right)} - \overline{\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)}\frac{ae\sin\varepsilon}{r}\right]\frac{an\delta z}{r}\right\} d\varepsilon \quad . \quad (77)$$

wo wieder $\overline{\left(\frac{d^2W_0}{d\eta^2}\right)}$ und $\overline{\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)}$ aus den Rechnungen der ersten Annäherung genommen werden, und für $\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$ die im Art. 44 gegebene Reihe angewandt werden muss. Das Product $\overline{\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)}\frac{an\delta z}{r}$ kommt schon in (75) vor, und man braucht es also für den vorstehenden Ausdruck nur mit der Reihe für $\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$ zu multipliciren.

### 47.

Ehe ich zu den Breitenstörungen zweiter Ordnung übergehe, will ich die Gleichung (33) weiter entwickeln. Es wurde schon im Art. 44 bemerkt, dass diese Gleichung, so weit sie dort entwickelt wurde, zur Controle der Berechnung der Störungen erster Ordnung dienen kann; entwickelt man sie weiter, so kann sie auch zur Controle der Berech-

nung der Störungen der zweiten Ordnung dienen. Ja man kann sich derselben ausschliesslich bedienen, um die Längenstörungen der zweiten Ordnung in Bezug auf die Massen zu berechnen, nachdem man die von $\nu$ durch die vorhergehenden Ausdrücke berechnet hat, für welchen Zweck man alle Glieder dieser weglassen darf, die von $\eta$ unabhängig sind, da man gesehen hat, dass $\delta\nu$ nur von den Differentialen von $\delta W_0$ und $W_0$ in Bezug auf $\eta$ abhängt.

Die Gleichung (42) giebt strenge

$$d\frac{h_0}{h} = \frac{r_0}{\cos\varphi_0}\left(\frac{d\Omega}{df}\right) dt$$

Setzt man also

$$P = \frac{r_0}{\cos\varphi_0}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

so wird für die Glieder der ersten Ordnung in Bezug auf die Massen

$$P = \overline{T}$$

welches mit dem Ausdruck (68) übereinstimmt. Für die Glieder der zweiten Ordnung setze ich

$$(77^*) \quad \ldots \quad \frac{d\delta\frac{h_0}{h}}{dt} = A'\frac{an\delta z}{r} + B'\nu + D'\frac{u}{\cos i} + E'\frac{u_1}{\cos i} + F'n'dz' + G'\nu' + H'\frac{u'}{\cos i'}$$

wo in Bezug auf mehrere störende Planeten die im Art. 43 gemachte Bemerkung gilt. Es ist nun leicht einzusehen, dass

$$(78) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A' = \left(\frac{d\overline{T}}{dt}\right) - \overline{T}\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$$

wird. Das erste Glied muss durch directe Differentiation von $\overline{T}$ erlangt werden, das zweite bekommt man, wenn man im Gliede $T\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$ des Ausdrucks (63) für $A$ die Anomalie $\eta$ in $\varepsilon$ verwandelt. Es wird ferner

$$(79) \quad . \quad B' = \overline{V},\ D' = \overline{D},\ E' = \overline{E},\ F' = \overline{F},\ G' = \overline{G},\ H' = \overline{H}$$

wo allenthalben der Strich über den Functionen anzeigt, dass man in denselben $\eta$ in $\varepsilon$ verwandeln soll. Nachdem hieraus $\frac{d\delta\frac{h_0}{h}}{dt}$, und daraus durch die Integration $\delta\frac{h_0}{h}$ ermittelt worden ist, muss die Gleichung (33) betrachtet und verschiedenartig aufgestellt werden, je nachdem man sie nur zur Controle gebrauchen, oder aus derselben die Längenstörungen zweiter Ordnung direct berechnen will. Für die Anwendung zur Controle stelle ich (33) wie folgt.

$$1 + \delta\frac{h_0}{h} = \left(1 + \frac{d\delta z}{dt}\right)(1+\nu)^2$$

Entwickelt man diese, und hebt nur die Glieder heraus, die von der zweiten Ordnung in Bezug auf die Massen sind, so bekommt man

$$\delta\frac{h_0}{h} = \frac{d\delta z}{dt} + 2\delta\nu + 2\nu\frac{d\delta z}{dt} + \nu^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (80)$$

wo linker Hand der aus (77*) folgende Werth von $\delta\frac{h_0}{h}$, und in den beiden ersten Gliedern rechter Hand die Störungen der Länge und des Radius substituirt werden müssen, deren Berechnung in den vorhergehenden Artt. erklärt worden ist, die beiden letzten Glieder hingegen aus einem Product und einem Quadrat der Störungen der ersten Ordnung bestehen.

Eine andere Art, diese Controle zu erhalten, beruht auf folgender Entwickelung. Stellt man die Gleichung (33) anfänglich wie folgt,

$$\log\left(1 + \delta\frac{h_0}{h}\right) = \log\left(1 + \frac{d\delta z}{dt}\right) + 2\log(1+\nu)$$

und entwickelt diese, so ergiebt sich

$$\delta\frac{h_0}{h} = \frac{d\delta z}{dt} + 2\delta\nu - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)^2 - \nu^2 + \tfrac{1}{2}\left(\delta\frac{h_0}{h}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (81)$$

Diese unterscheidet sich von der vorhergehenden, dass nur Quadrate von Störungen erster Ordnung darin vorkommen, die einfacher zu erhalten sind wie Producte.

Will man sich hingegen der Gleichung (33) zur directen Berechnung der Längenstörungen bedienen, so muss man sie wie folgt stellen

$$1 + \frac{d\delta z}{dt} = \left(1 + \delta\frac{h_0}{h}\right)(1+\nu)^{-2}$$

und bekommt durch deren Entwickelung leicht, wenn man wieder nur die Störungen zweiter Ordnung in Bezug auf die Massen aufnimmt,

$$n\delta z = \int\frac{r}{a}\left\{\delta\frac{h_0}{h} - 2\delta\nu - 2\nu.\delta\frac{h_0}{h} + 3\nu^2\right\}d\varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (82)$$

wo wieder die beiden letzten Glieder Product und Quadrat aus den Störungen erster Ordnung sind.

## 18.

Für die Breitenstörungen sei

$$\frac{d\delta R_0}{d\varepsilon} = A''\frac{an\delta z}{r} + B''\nu + C''\delta\frac{h}{h_0} + D''\frac{u}{\cos i} + E''\frac{u_1}{\cos i}$$
$$+ F''n'\delta z' + G''\nu' + H''\frac{u'}{\cos i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (83)$$

können. Setzt man

(93) . . . . $W' = \frac{\sin\varepsilon}{\cos^2\varphi} a^2 \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$; $W'_1 = -\frac{\cos\varepsilon - e}{\cos^2\varphi} a^2 \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$

so wird

(94) . . . . . . . . . . $K_1 = PW'$ ; $K_2 = PW'_1$

wo $P$ derselbe Factor ist wie vorher. Ausserdem wird auch

(95) . . . . . . . . . $$\begin{cases} K_1 = \frac{\cos\varphi}{e} Q_1 a^2 \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) \\ K_2 = Q_3 a^2 \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) \end{cases}$$

wo $Q_1$ dieselbe Grösse ist wie oben, und

(96) $$\begin{cases} Q_3 = \frac{1}{\cos^2\varphi} \{ e^2 \sin\varepsilon - \frac{1}{4} e \sin 2\varepsilon \\ \quad + \frac{1}{4} e \sin(\eta + \varepsilon) - \frac{1}{4}(1 + 2e^2) \sin\eta + \frac{3}{4} e \sin(\eta - \varepsilon) - \frac{1}{4} \sin(\eta - 2\varepsilon) \} \end{cases}$$

Die Neigung muss sehr beträchtlich sein, wenn alle diese Glieder etwas Merkliches geben sollen.

49.

Für die Coefficienten der zweiten Zeile des Ausdrucks (83) ist sogleich

(97) . . . . . . . . . . . . . $F'' = \left(\frac{dU}{dc'}\right)$

wo die Differentiation direct ausgeführt wird. Da $\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ eine homogene Function von $r$ und $r'$ von der minus zweiten Ordnung ist, so erhält man sogleich

(98) . . . . . . . . . . . $G'' = -(Y + 2U)$

und aus dem Ausdruck (56) verbunden mit dem strengen Ausdruck für $U$ des Art. 41 ergiebt sich

$$H'' = \frac{\varrho r^2}{a \cos\varphi} \sin(\omega - f)\, a' \left(\frac{d^2\Omega}{dZ dZ'}\right) \cos i$$

oder nach Einführung der excentrischen Anomalie

(99) . . . . . . . . . . $H'' = Q\, a^2 a' \left(\frac{d^2\Omega}{dZ dZ'}\right) \cos i$

wo $Q$ wieder durch den Ausdruck (62) gegeben ist.

50.

Sondert man nun in dem Ausdruck (46) die Glieder ab, die von den Quadraten und Producten der störenden Kräfte abhängen, und

nimmt auf diese allein Rücksicht, so wird

$$\delta u = \overline{\delta R_0} + \overline{\left(\frac{dR_0}{d\eta}\right)} \frac{an\delta z}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (100)$$

wo $\overline{\delta R_0}$ durch die Integration des Ausdrucks (83) und darauf vorgenommene Verwandelung von $\eta$ in $\varepsilon$ erlangt, und $\overline{\left(\frac{dR_0}{d\eta}\right)}$ aus den Rechnungen der ersten Annäherung erhalten wird. Aus dem Ausdruck (47) erhält man ähnlicher Weise

$$\delta u = \int \left\{ \overline{\left(\frac{d\delta R_0}{d\eta}\right)} + \overline{\left(\frac{dR_0}{d\eta}\right)} \frac{d\delta z}{dt} + \left[ \overline{\left(\frac{d^2 R_0}{d\eta^2}\right)} - \overline{\left(\frac{dR_0}{d\eta}\right)} \frac{ae \sin \varepsilon}{r} \right] \frac{an\delta z}{r} \right\} d\varepsilon \quad (101)$$

für welche $\frac{d\delta z}{dt}$ aus den Rechnungen der ersten Annäherung unmittelbar gegeben ist. Der vorhergehende Ausdruck für $\delta u$ ist indess einfacher wie dieser.

## § 6. Entwickelung der Störungsfunction und der Differentialquotienten derselben in unendliche Reihen.

### 51.

In vielen bei den kleinen Planeten und ausserdem in unserm Sonnensystem vorkommenden Fällen kann die Reihenentwickelung der Störungsfunction und ihrer Differentialquotienten durch die Methode, von welcher ich die Hauptsache in der »Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen etc.« betitelten Abhandlung gegeben habe, mit Leichtigkeit ausgeführt werden, und ich habe diese Methode auch schon mit Erfolg angewandt. Sie hat aber eine Grenze, an welcher sie aufhört bequem zu sein, und es ist nicht ganz leicht diese Grenze genau anzugeben, ich kann nur sagen, dass sie bei einem Verhältniss der grossen Achsen, wie es für die Egeria und den Jupiter statt findet, noch ohne Unbequemlichkeit angewandt werden kann. Es kommen aber sowohl bei den kleinen Planeten wie ausserdem in unserm Sonnensystem solche Werthe dieses Verhältnisses vor, bei welchen die Anwendung der genannten Methode nicht mehr angerathen werden kann. Ich werde daher hier eine andere Methode auseinander setzen, die eben in diesen Fällen die kürzeste zu sein scheint, die man geben kann. Es ist dieses, abgesehen von den kleinen Änderungen, die die Sachlage erfordert, die Methode, die ich in meiner Pariser Preisschrift entwickelt habe, die zwar

in Bezug auf den einen der beiden in Betracht kommenden Planeten die Anwendung von mechanischen Quadraturen verlangt, in Bezug auf den andern aber die Entwickelung analytisch auf eine sehr einfache Art giebt. Jeder Coefficient in der Reihenentwickelung der Störungsfunction hängt eigentlich, da dieselbe Function von zwei veränderlichen Grössen ist, von einem doppelten, bestimmten Integral ab, durch die in Rede stehende Methode wird das eine dieser Integrale auf einfache Weise analytisch erhalten, und nur das andere muss durch mechanische Quadraturen ermittelt werden.

## 52.

Es ist

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{r'}{a'}\right)^2 \alpha^2 - 2\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r'}{a'}\right)\alpha H$$

wo wie oben

$$H = \cos(f+\Pi)\cos(f'+\Pi') + \cos J \sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')$$

$$\alpha = \frac{a'}{a}$$

ist. Berechnet man zuerst die Constanten $k$, $K$, $k_1$ und $K_1$ nach folgenden Formeln,

$$(102)\ \ldots \begin{cases} \cos J \sin \Pi' = k \sin K; & \sin \Pi' = k_1 \sin K_1 \\ \cos \Pi' = k \cos K; & \cos J \cos \Pi' = k_1 \cos K_1 \end{cases}$$

so erhält man

$$H = \cos f \cos f' \, k \cos(\Pi - K) + \cos f \sin f' \, k_1 \sin(\Pi - K_1)$$
$$- \sin f \cos f' \, k \sin(\Pi - K) + \sin f \sin f' \, k_1 \cos(\Pi - K_1)$$

und wenn man hierin die excentrische Anomalie des gestörten Planeten sowohl wie die des störenden einführt,

$$\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r'}{a'}\right) H = \cos\varepsilon \cos\varepsilon' \, k \cos(\Pi - K) - \cos\varepsilon' . ek \cos(\Pi - K)$$
$$- \cos\varepsilon . e'k \cos(\Pi - K) + ee'k \cos(\Pi - K)$$
$$+ \cos\varepsilon \sin\varepsilon' \cos\varphi' \, k_1 \sin(\Pi - K_1) - \sin\varepsilon' . e \cos\varphi' \, k_1 \sin(\Pi - K_1)$$
$$- \sin\varepsilon \cos\varepsilon' \cos\varphi \, k \sin(\Pi - K) + \sin\varepsilon . e' \cos\varphi \, k \sin(\Pi - K)$$
$$+ \sin\varepsilon \sin\varepsilon' \cos\varphi \cos\varphi' \, k_1 \cos(\Pi - K_1)$$

Aus dieser Entwickelung und mit Zuziehung der Gleichungen

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos\varepsilon; \quad \frac{r'}{a'} = 1 - e'\cos\varepsilon'$$

ergiebt sich leicht

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \gamma_0 - \gamma_1 \cos\varepsilon' - \beta_0 \sin\varepsilon' + \gamma_2 \cos^2\varepsilon' \quad . \; . \; . \; . \quad (103)$$

wo

$$\gamma_0 = 1 + \alpha^2 - 2e\cos\varepsilon + e^2\cos^2\varepsilon$$
$$-2\alpha ee' k\cos(\Pi - K) + 2\alpha e' k\cos(\Pi - K)\cos\varepsilon - 2\alpha e'\cos\varphi k\sin(\Pi - K)\sin\varepsilon$$
$$\gamma_1 = 2\alpha^2 e' - 2\alpha e k\cos(\Pi - K) + 2\alpha k\cos(\Pi - K)\cos\varepsilon$$
$$-2\alpha\cos\varphi k\sin(\Pi - K)\sin\varepsilon$$
$$\beta_0 = -2\alpha e\cos\varphi' k_1\sin(\Pi - K_1) + 2\alpha\cos\varphi\cos\varphi' k_1\cos(\Pi - K_1)\sin\varepsilon$$
$$+2\alpha\cos\varphi' k_1\sin(\Pi - K_1)\cos\varepsilon$$
$$\gamma_2 = \alpha^2 e'^2$$

ist. In diesem Ausdruck von $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$ sind also die Coefficienten $\gamma_0$, $\gamma_1$ und $\beta_0$ blos Functionen der excentrischen Anomalie $\varepsilon$ des gestörten Planeten, $\gamma_2$ ist constant, und von der Ordnung des Quadrats der Excentricität des störenden Planeten.

## 53.

Ehe ich weiter gehe, will ich die eben entwickelten Ausdrücke für $\gamma_0$, $\gamma_1$ und $\beta_0$ auf die für die Berechnung derselben für verschiedene Werthe von $\varepsilon$ geeigneteste Form hinführen. Setzt man zuerst

$$\left.\begin{aligned} p\sin P &= 2\alpha^2\frac{e'}{e} - 2\alpha k\cos(\Pi - K) \\ p\cos P &= 2\alpha\cos\varphi' k_1\sin(\Pi - K_1) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (104)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \beta_0 &= f\sin F \\ \gamma_1 &= f\cos F \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (105)$$

wo leicht zu erkennen ist, dass $f$ nicht die wahre Anomalie wie oben bedeutet, so verwandeln sich die vorstehenden Ausdrücke für $\beta_0$ und $\gamma_1$ in folgende

$$f\sin F = 2\alpha\cos\varphi\cos\varphi' k_1\cos(\Pi - K_1)\sin\varepsilon + p\cos P\cos\varepsilon - ep\cos P$$
$$f\cos F = \left(2\alpha^2\frac{e'}{e} - p\sin P\right)\cos\varepsilon - 2\alpha\cos\varphi k\sin(\Pi - K)\sin\varepsilon + ep\sin P$$

und hieraus folgt

$$f\sin(F - P) = \{2\alpha\cos\varphi\cos\varphi' k_1\cos(\Pi - K_1)\cos P + 2\alpha\cos\varphi k\sin(\Pi - K)\sin P\}\sin\varepsilon$$
$$+\left\{p - 2\alpha^2\frac{e'}{e}\sin P\right\}\cos\varepsilon - ep$$
$$f\cos(F - P) = \{2\alpha\cos\varphi\cos\varphi' k_1\cos(\Pi - K_1)\sin P - 2\alpha\cos\varphi k\sin(\Pi - K)\cos P\}\sin\varepsilon$$
$$+2\alpha^2\frac{e'}{e}\cos P\cos\varepsilon$$

Führt man hierin die durch die folgenden Gleichungen zu bestimmenden Constanten $w$, $W$, $w_1$ und $W_1$ ein, zu deren leichterer Berechnung die beiden Constanten $v$ und $V$ dienen,

$$(106) \quad \ldots \quad \begin{cases} v \ \sin V = 2a \cos\varphi\, k \sin(\Pi - K) \\ v \ \cos V = 2a \cos\varphi \cos\varphi'\, k_1 \cos(\Pi - K_1) \\ w \ \sin W = p - 2a^2 \frac{e'}{e} \sin P \\ w \ \cos W = v \cos(V - P) \\ w_1 \sin W_1 = v \sin(V - P) \\ w_1 \cos W_1 = 2a^2 \frac{e'}{e} \cos P \end{cases}$$

so wird

$$(107) \quad \ldots \quad \begin{cases} f \sin(F - P) = w \ \sin(\varepsilon + W) - ep \\ f \cos(F - P) = w_1 \cos(\varepsilon + W_1) \end{cases}$$

Setzt man ferner

$$(108) \quad \ldots\ldots\ldots \quad R = 1 + a^2 - 2a^2 e'^2$$

so zeigt sich leicht, dass

$$(109) \quad \ldots \quad \gamma_0 = R - 2e \cos\varepsilon + e^2 \cos^2\varepsilon + e' f \cos F$$

wird. Nachdem man also ein für alle Mal die Constanten $k$, $K$, $k_1$ und $K_1$ aus den (102), die Constanten $p$ und $P$ aus (104), die Constanten $w$, $W$, $w_1$ und $W_1$ aus den (106), und die Constante $R$ aus (108) berechnet hat, geben für jeden beliebigen Werth von $\varepsilon$ die Gleichungen (107) $f$ und $F$ und die Gleichung (109) $\gamma_0$. Vermittelst $f$ und $F$ kann man aus den (105) $\beta_0$ und $\gamma_1$ erhalten, es wird sich aber weiter unten zeigen, dass diese nicht gebraucht, sondern statt dessen $f$ und $F$ in allen Formeln angewandt werden; man braucht daher $\beta_0$ und $\gamma_1$ nicht aus $f$ und $F$ zu berechnen. Endlich giebt

$$(110) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \gamma_2 = a^2 e'^2$$

den Coefficienten $\gamma_2$.

## 54.

Bekanntlich kann man alle Functionen von der Form wie (103) in zwei Factoren des ersten Grades in $\cos\varepsilon'$ und $\sin\varepsilon'$ zerlegen, deren Coefficienten immer reell sind,*) und die ungraden und negativen Poten-

*) Die allgemeine Theorie der Auflösung der Polynomien

$$X = \gamma_0 + \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \cos 2x + \gamma_3 \cos 3x + \ldots$$
$$+ \sin x \left\{ \beta_0 + \beta_1 \cos x + \beta_2 \cos 2x + \ldots \right\}$$

in Factoren habe ich in meiner Pariser Preisschrift vollständig entwickelt.

zen der Quadratwurzeln aus diesen Factoren lassen sich vermittelst der Anfangsgründe der Theorie der elliptischen Functionen leicht in Reihen entwickeln. Sei daher

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \{C - q\cos(\varepsilon' - Q)\}\,\{1 - q_1\cos(\varepsilon' - Q_1)\}$$

Multiplicirt man diese Factoren aus, und vergleicht die einzelnen Glieder des Products mit den Gliedern des Ausdrucks (103), so bekommt man die folgenden Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= C + qq_1\sin Q\sin Q_1\\
\gamma_1 &= q\cos Q + q_1 C\cos Q_1\\
\gamma_2 &= qq_1\cos(Q + Q_1)\\
\beta_0 &= q\sin Q + q_1 C\sin Q_1\\
0 &= \sin(Q + Q_1)
\end{aligned}$$

Der letzten dieser wird durch

$$Q_1 = -\,Q$$

Gnüge geleistet, und hiemit gehen die übrigen über in

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_0 &= C - qq_1\sin^2 Q\\
\gamma_1 &= (q + q_1 C)\cos Q\\
\gamma_2 &= qq_1\\
\beta_0 &= (q - q_1 C)\sin Q
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (111)$$

aus welchen man $C$, $q$ und $q_1$ immer so bestimmen kann, dass sie alle drei positiv werden. Der zweiten und vierten dieser Gleichungen leistet man durch die folgenden Gnüge

$$\left.\begin{aligned}
q\sin Q &= \beta_0 + \xi\ ;\quad q_1 C\sin Q = \xi\\
q\cos Q &= \gamma_1 - \eta\ ;\quad q_1 C\cos Q = \eta
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (112)$$

und die erste vereinfacht man, wenn man

$$C = \gamma_0 + \zeta$$

setzt; die Auflösung der Aufgabe ist hiemit von der Ermittelung der Gleichungen für die drei neuen Unbekannten $\xi$, $\eta$ und $\zeta$ abhängig gemacht worden.

## 55.

Die Gleichungen (112) geben

$$qq_1 C\sin^2 Q = (\beta_0 + \xi)\,\xi$$

und hiemit wird die erste der Bedingungsgleichungen (111), nachdem auch für $C$ sein obiger Ausdruck gesetzt worden ist,

$(a)$ . . . . . . . . . . . $(\gamma_0 + \zeta)\,\zeta = (\beta_0 + \xi)\,\xi$

Aus den Gleichungen (112) zieht man ferner

$$qq_1 C = (\beta_0 + \xi)\,\xi + (\gamma_1 - \eta)\,\eta$$

woraus zufolge der dritten der Bedingungsgleichungen (111) und dem Werthe $\gamma_0 + \zeta$ von $C$

$(b)$ $\qquad (\gamma_0 + \zeta)\,\gamma_2 = (\beta_0 + \xi)\,\xi + (\gamma_1 - \eta)\,\eta$

folgt. Die Gleichungen (112) geben endlich noch

$(c)$ . . . . . . . . . . . $(\gamma_1 - \eta)\,\xi = (\beta_0 + \xi)\,\eta$

und aus den drei Gleichungen $(a)$, $(b)$ und $(c)$ müssen $\xi$, $\eta$ und $\zeta$ ermittelt werden. Die Gleichung $(a)$ giebt schon $\xi$, wenn $\zeta$ bekannt ist, und der Unterschied zwischen $(a)$ und $(b)$, nemlich

$(d)$ . . . . . . . . . . $(\gamma_0 + \zeta)\,(\gamma_2 - \zeta) = (\gamma_1 - \eta)\,\eta$

giebt $\eta$, wenn $\zeta$ bekannt ist; es handelt sich also nur noch um die Entwickelung der Gleichung für $\zeta$. Zu dem Ende geben $(a)$ und $(c)$ leicht

$$\beta_0^2 + 4\,(\gamma_0 + \zeta)\,\zeta = (\beta_0 + 2\xi)^2$$
$$\beta_0 + 2\xi = \gamma_1 \frac{\xi}{\eta}$$

woraus

$$\beta_0^2 + 4\,(\gamma_0 + \zeta)\,\zeta = \gamma_1^2 \frac{\xi^2}{\eta^2}$$

folgt. Zieht man hingegen die Werthe von $\beta_0 + \xi$ und $\gamma_1 - \eta$ aus $(a)$ und $(d)$, und substituirt sie in $(c)$, so wird

$$\frac{\eta^2}{\xi^2} = \frac{\gamma_2 - \zeta}{\zeta}$$

Eliminirt man hiemit das Verhältniss von $\xi^2$ zu $\eta^2$ aus der vorhergehenden, so wird

$(e)$ . . . . . $0 = \gamma_1^2 \zeta - \beta_0^2 (\gamma_2 - \zeta) - 4\,(\gamma_0 + \zeta)\,(\gamma_2 - \zeta)\,\zeta$

die Gleichung, woraus $\zeta$ bestimmt werden muss, und womit die Aufgabe gelöst ist, indem die Gleichungen $(a)$ und $(d)$ $\xi$ und $\eta$ geben, nachdem $\zeta$ aus $(e)$ berechnet worden ist. Ordnen wir diese drei Gleichungen, so werden sie

$$(f) \;.\;.\; \left\{\begin{aligned} &\zeta^3 + (\gamma_0 - \gamma_2)\,\zeta^2 + \tfrac{1}{4}(\gamma_1^2 + \beta_0^2 - 4\gamma_0\gamma_2)\,\zeta - \tfrac{1}{4}\beta_0^2\gamma_2 = 0 \\ &\xi^2 + \beta_0\xi - (\gamma_0 + \zeta)\,\zeta = 0 \\ &\eta^2 - \gamma_1\eta + (\gamma_0 + \zeta)\,(\gamma_2 - \zeta) = 0 \end{aligned}\right.$$

56.

Da das letzte Glied der eben gefundenen cubischen Gleichung für $\zeta$ negativ ist, so hat sie gewiss Eine positive Wurzel, wenn nicht grade $\beta_0 = 0$ ist, in welchem Falle diese Wurzel gleich Null wird. Da die Excentricität $e'$ des störenden Planeten immer klein, und $\gamma_2$ von der Ordnung $e'^2$ ist, so ist diese positive Wurzel der ersten Gleichung $(f)$ eine kleine Grösse zweiter Ordnung, die in eine nach den aufsteigenden Potenzen von $\gamma_2$ fortschreitende unendliche Reihe entwickelt werden kann. Berücksichtigt man hiebei vorläufig nur die erste Potenz von $\gamma_2$, so ergiebt sich

$$\zeta = \frac{\beta_0^2}{\gamma_1^2 + \beta_0^2}\gamma_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (g)$$

und hiemit geben die beiden anderen $(f)$ mit demselben Grade der Genauigkeit

$$\xi = \frac{\gamma_0 \beta_0}{\gamma_1^2 + \beta_0^2}\gamma_2;\ \eta = \frac{\gamma_0 \gamma_1}{\gamma_1^2 + \beta_0^2}\gamma_2 \quad \ldots\ldots\ldots (h)$$

welches alle drei immer reelle Grössen sind, und von welchen $\zeta$ stets positiv, oder wenigstens nie negativ ist.

Stellen wir die Gleichung $(e)$ wie folgt

$$0 = \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2 - \zeta} - \frac{\beta_0^2}{\zeta} - 4(\gamma_0 + \zeta)$$

und bezeichnen mit $a$ den genauen Werth der eben annäherungsweise entwickelten Wurzel dieser Gleichung, dann ist auch

$$0 = \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2 - a} - \frac{\beta_0^2}{a} - 4(\gamma_0 + a)$$

Der Unterschied dieser beiden Gleichungen ist durch $\zeta - a$ theilbar, und wird nach der Division

$$0 = \frac{\gamma_1^2}{(\gamma_2 - \zeta)(\gamma_2 - a)} + \frac{\beta_0^2}{\zeta a} - 4$$

Ordnet man diese, so wird

$$0 = \zeta^2 + (\gamma_0 + a - \gamma_2)\zeta + \frac{\beta_0^2}{4a}\gamma_2$$

die Gleichung, welche die beiden andern Wurzeln der ersten Gleichung $(f)$ giebt, und diese haben also folgenden Ausdruck

$$\zeta = -\tfrac{1}{2}(\gamma_0 + a - \gamma_2) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(\gamma_0 + a - \gamma_2)^2 - \frac{\beta_0^2}{a}\gamma_2}$$

Es ist für unsern Zweck ausreichend, in dieser Gleichung blos die Glieder niedrigster Ordnung zu berücksichtigen, und wir dürfen daher $a - \gamma_2$

in Bezug auf $\gamma_0$ übergehen, und im letzten Gliede den Ausdruck $(g)$ von $\zeta$ für $a$ substituiren. Hiemit werden die obigen Wurzeln

$$\zeta = -\tfrac{1}{2}\left\{\gamma_0 \pm \sqrt{\gamma_0^2 - \gamma_1^2 - \beta_0^2}\right\}$$

Da aber $\Delta^2$ nie negativ werden kann, so muss nothwendig

$$\gamma_0^2 > \gamma_1^2 + \beta_0^2$$

sein, und die cubische Gleichung $(f)$ hat also immer drei reelle Wurzeln. Substituirt man aber die beiden vorstehenden Wurzeln derselben in die beiden anderen Gleichungen $(f)$, und behält wieder nur die Glieder der niedrigsten Ordnung bei, so wird

$$\xi^2 + \beta_0\xi + \tfrac{1}{4}(\gamma_1^2 + \beta_0^2) = 0$$
$$\eta^2 - \gamma_1\eta + \tfrac{1}{4}(\gamma_1^2 + \beta_0^2) = 0$$

woraus

$$\xi = -\tfrac{1}{2}(\beta_0 \pm \sqrt{-\gamma_1^2})$$
$$\eta = \quad \tfrac{1}{2}(\gamma_1 \pm \sqrt{-\beta_0^2})$$

hervorgeht, also $\xi$ und $\eta$ imaginär werden. Die unter $(g)$ gegebene Wurzel der Gleichung $(f)$ für $\zeta$ ist daher die einzig anwendbare.

57.

Die Ausdrücke $(g)$ und $(h)$ geben in vielen Fällen hinreichend genaue Werthe von $\zeta$, $\xi$ und $\eta$, und wo dieses nicht statt findet, kann man sie leicht genauer entwickeln. Substituirt man den Ausdruck $(g)$ für $\zeta$ in das zweite Glied der ersten Gleichung $(f)$, so bekommt man bis auf Grössen von der Ordnung $\gamma_2^3$

$$(113) \quad .\;. \quad \zeta = \frac{\beta_0^2}{\gamma_1^2 + \beta_0^2}\gamma_2 + 4\frac{\gamma_0\beta_0^2}{(\gamma_1^2 + \beta_0^2)^2}\gamma_2^2 - 4\frac{\gamma_0\beta_0^4}{(\gamma_1^2 + \beta_0^2)^3}\gamma_2^2$$

und bis zu demselben Grade von Genauigkeit geben die beiden andern $(f)$

$$\xi = \frac{C\zeta}{\beta_0} - \frac{C^2\zeta^2}{\beta_0^3}$$
$$\eta = \frac{C(\gamma_2 - \zeta)}{\gamma_1} + \frac{C^2(\gamma_2 - \zeta)^2}{\gamma_1^3}$$

Führt man hierin die durch die Gleichungen (105) bestimmten Grössen $f$ und $F$ ein, und setzt

$$(114) \quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad \begin{cases} \chi = \gamma_2 + 4\gamma_2^2\frac{\gamma_0}{f^2}\cos^2 F \\ \chi' = \gamma_2 - 4\gamma_2^2\frac{\gamma_0}{f^2}\sin^2 F \end{cases}$$

so wird zuerst $\zeta = \chi \sin^2 F$, und man kann also

$$C = \gamma_0 + \chi \sin^2 F \quad \ldots\ldots\ldots \quad (115)$$

berechnen. Da ferner

$$\gamma_2 - \zeta = \chi' \cos^2 F$$

wird, so bekommt man aus den obigen Ausdrücken für $\xi$ und $\eta$ leicht

$$\beta_0 + \xi = f\xi' \sin F, \quad \gamma_1 - \eta = f\eta' \cos F$$

nachdem

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= 1 + \tfrac{C\chi}{f^2} - \left(\tfrac{C\chi}{f^2}\right)^2 \\ \eta' &= 1 - \tfrac{C\chi}{f^2} - \left(\tfrac{C\chi}{f^2}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (116)$$

gesetzt worden ist. Substituirt man diese Ausdrücke in die beiden ersten (112), so erhält man

$$\left.\begin{aligned} q \sin Q &= f\xi' \sin F \\ q \cos Q &= f\eta' \cos F \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (117)$$

Nachdem man also $\chi$ und $\chi'$ aus (114) berechnet hat, ergiebt sich $C$ aus (115); nachdem hierauf $\xi'$ und $\eta'$ aus (116) berechnet worden sind, bekommt man $q$ und $Q$ aus (117). Endlich folgt $q_1$ aus der dritten Bedingungsgleichung (111), nemlich

$$q_1 = \frac{\gamma_0}{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (118)$$

Diese Formeln haben mir bei den Anwendungen, die ich in den letzten 10 Jahren von dieser Methode gemacht habe, immer mehr wie hinreichende Genauigkeit gewährt, und es ist mir kein Fall vorgekommen, in welchem ich die Annäherung hätte weiter treiben müssen.

58.

Man kann auch $q$, $q_1$ und $Q$ unmittelbar durch $\gamma_2$ ausdrücken, und die Formeln werden eleganter, wenn man $\log q$ und $\log q_1$ statt $q$ und $q_1$ selbst entwickelt. Die Gleichungen (117) geben

$$\operatorname{tg} Q = \frac{\xi'}{\eta'} \operatorname{tg} F$$

$$q^2 = f^2 \xi'^2 \sin^2 F + f^2 \eta'^2 \cos^2 F$$

woraus auf bekannte Art

$$Q = F + \frac{\xi'-\eta'}{\xi'+\eta'} \sin 2F + \tfrac{1}{2} \left(\frac{\xi'-\eta'}{\xi'+\eta'}\right)^2 \sin 4F + \ldots$$

$$\log q = \log f + \tfrac{1}{2} \log(\xi'^2 \sin^2 F + \eta'^2 \cos^2 F)$$

folgt. Da aber $\chi^2$ und $\chi'^2$ bis auf Grössen dritter Ordnung einander gleich sind, so geben die (116) sogleich

$$\frac{\xi'-\eta'}{\xi'+\eta'} = \frac{C(\chi+\chi')}{2f^2}$$

oder wenn man die Werthe von $C$ und $\chi + \chi'$ substituirt,

$$\frac{\xi'-\eta'}{\xi'+\eta'} = \frac{\gamma_0\gamma_2}{f^2} + \frac{\gamma_2^2}{2f^2} + \left\{2\frac{\gamma_0^2\gamma_2^2}{f^4} - \frac{\gamma_2^2}{2f^2}\right\}\cos 2F$$

Es ist ferner

$$\xi'^2\sin^2F + \eta'^2\cos^2F = 1 + 2\frac{C}{f^2}(\chi\sin^2F - \chi'\cos^2F) - \left(\frac{C\chi}{f^2}\right)^2$$

also

$$\tfrac{1}{2}\log(\xi'^2\sin^2F + \eta'^2\cos^2F) = \frac{C}{f^2}(\chi\sin^2F - \chi'\cos^2F)$$
$$- \frac{C^2}{f^4}(\chi\sin^2F - \chi'\cos^2F)^2 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{C\chi}{f^2}\right)^2$$

und nach der Substitution der obigen Werthe von $\chi$, $\chi'$ und $C$,

$$\frac{C}{f^2}(\chi\sin^2F - \chi'\cos^2F) = \frac{\gamma_0^2\gamma_2^2}{f^4} + \frac{\gamma_2^2}{4f^2} - \left(\frac{\gamma_0\gamma_2}{f^2} + \frac{\gamma_2^2}{2f^2}\right)\cos 2F$$
$$- \left(\frac{\gamma_0^2\gamma_2^2}{f^4} - \frac{\gamma_2^2}{4f^2}\right)\cos 4F$$

$$\left(\frac{C\chi}{f^2}\right)^2 = \frac{\gamma_0^2\gamma_2^2}{f^4}$$

Die dritte Bedingungsgleichung (111) giebt

$$\log\gamma_2 = \log q + \log q_1$$

Setzt man daher

$$\log q = \log f + y$$

so wird

$$\log q_1 = \log\frac{\gamma_2}{f} - y$$

Substituirt man nun die eben entwickelten Ausdrücke, setzt

$$\varrho = 206265''$$

und nennt $m$ den Modul der Briggischen Logarithmen, dass also

$$\text{log. br. } m = 9.63778\ldots$$

wird, so ergiebt sich

$$(119) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} Q = F + x \\ \text{log. br. } q = \text{log. br. } f + y \\ \text{log. br. } q_1 = \text{log. br. } \frac{\gamma_2}{f} - y \end{cases}$$

wo

$$(120) \begin{cases} x = \varrho\left\{\frac{\gamma_0\gamma_2}{f^2} + \frac{\gamma_2^2}{2f^2}\right\}\sin 2F + \varrho\left\{\frac{3\gamma_0^2\gamma_2^2}{2f^4} - \frac{\gamma_2^2}{4f^2}\right\}\sin 4F \\ y = m\frac{\gamma_2^2}{4f^2} - m\left\{\frac{\gamma_0\gamma_2}{f^2} + \frac{\gamma_2^2}{2f^2}\right\}\cos 2F - m\left\{\frac{3\gamma_0^2\gamma_2^2}{2f^4} - \frac{\gamma_2^2}{4f^2}\right\}\cos 4F \end{cases}$$

bis auf Grössen von der Ordnung $\gamma_2^3$ genau. Die erste Bedingungsgleichung (111) giebt schliesslich

$$C = \gamma_0 + \gamma_2 \sin^2 Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (121)$$

Also entweder durch diese Ausdrücke, oder durch die des vor. Art., oder, wenn es nöthig werden sollte, durch die strengen Gleichungen des Art. 45 bekommt man

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \{C - q\cos(\varepsilon' - Q)\}\,\{1 - q_1\cos(\varepsilon' + Q)\} \quad . \; . \quad (122)$$

wo $C$, $q$, $q_1$ und $Q$ blos Functionen der excentrischen Anomalie des gestörten Planeten sind.

59.

Es ist besonders nothwendig, dass die in den vor. Artt. beschriebenen Rechnungen sorgfältig controlirt werden, da sie die Grundlage aller ferneren Rechnungen bilden. Eine scharfe Controle ist auch leicht zu haben, da man $\Delta^2$ unter mehreren Formen darstellen kann; ich werde zwei Methoden zur Controlirung angeben. Setzt man

$$\begin{aligned} \cos B \sin L &= \cos J \sin(f + \Pi) \\ \cos B \cos L &= \cos(f + \Pi) \\ \sin B &= \sin J \sin(f + \Pi) \end{aligned}$$

wo $f$ wieder die wahre Anomalie des gestörten Planeten bedeutet, so wird

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - 2\alpha\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r'}{a'}\right)\cos B\cos(f' + \Pi' - L)$$

wo $f'$ die wahre Anomalie des störenden Planeten bezeichnet. Um aus dieser Gleichung $\frac{\Delta}{a}$ auf die einfachste Art zu berechnen, ist es am zweckmässigsten, sich der folgenden zu bedienen, die ihr Gnüge leisten,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta}{a}\right)\cos E\cos E' &= \left(\frac{r}{a}\right)\cos B\cos(f' + \Pi' - L) - \alpha\left(\frac{r'}{a'}\right) \\ \left(\frac{\Delta}{a}\right)\cos E\sin E' &= \left(\frac{r}{a}\right)\cos B\sin(f' + \Pi' - L) \\ \left(\frac{\Delta}{a}\right)\sin E &= \left(\frac{r}{a}\right)\sin B \end{aligned}$$

bei deren Anwendung man die Bögen $E$ und $E'$ nicht aufzuschreiben braucht, da sie weiter nicht gebraucht werden. Um $B$ und $L$ aus den obigen Ausdrücken berechnen zu können, müsste man $f$ und $r$ kennen, deren Kenntniss in den vorhergehenden Rechnungen nicht verlangt wird; allein man kann diese Ausdrücke so umformen, dass auch hier die Kenntniss von $f$ und $r$ entbehrlich wird. Führt man die excentrische Anomalie ein, so wird zuerst

$$\Theta \sin L = \cos\varphi \cos J \cos \Pi \sin\varepsilon + \cos J \sin \Pi \cos\varepsilon - e \cos J \sin \Pi$$
$$\Theta \cos L = -\cos\varphi \sin \Pi \sin\varepsilon + \cos \Pi \cos\varepsilon - e \cos \Pi$$
$$\Theta' = \Theta \operatorname{tg} J \sin L$$

wo ich zur Abkürzung $\Theta$ für $\left(\frac{r}{a}\right)\cos B$, und $\Theta'$ für $\left(\frac{r}{a}\right)\sin B$ geschrieben habe. Setzt man hier zuerst

$$m \sin M = \cos J \sin \Pi$$
$$m \cos M = \cos \Pi$$

so wird

$$\Theta \sin(L-M) = \{\cos\varphi \cos J \cos \Pi \cos M + \cos\varphi \sin \Pi \sin M\} \sin\varepsilon$$
$$\Theta \cos(L-M) = \{\cos\varphi \cos J \cos \Pi \sin M - \cos\varphi \sin \Pi \cos M\} \sin\varepsilon + m \cos\varepsilon - em$$

setzt man daher ferner noch

$$n \sin N = \cos\varphi \sin \Pi$$
$$n \cos N = \cos\varphi \cos J \cos \Pi$$
$$g \sin G = n \sin(N-M)$$
$$g \cos G = m$$
$$g' = n \cos(N-M)$$

so wird

$$(123) \quad \left\{\begin{array}{l} \Theta \sin(L-M) = g' \sin\varepsilon \\ \Theta \cos(L-M) = g \cos(\varepsilon + G) - em \\ \Theta' = \Theta \operatorname{tg} J \sin L \end{array}\right.$$

und nachdem man hieraus $L$, $\Theta$ und $\Theta'$ berechnet hat, bekommt man $\left(\frac{\Delta}{a}\right)$ aus den folgenden

$$(124) \quad \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\Delta}{a}\right) \cos E \cos E' = \Theta \cos(f' + \Pi' - L) - \alpha \left(\frac{r'}{a'}\right) \\ \left(\frac{\Delta}{a}\right) \cos E \sin E' = \Theta \sin(f' + \Pi' - L) \\ \left(\frac{\Delta}{a}\right) \sin E = \Theta' \end{array}\right.$$

Um die Controle zu erlangen, muss man für jeden in Betracht kommenden Werth von $\varepsilon$, unter Anwendung eines oder mehrerer Werthe von $\varepsilon'$, theils durch die Ausdrücke (123) und (124), theils durch (122) die entsprechenden Werthe von $\left(\frac{\Delta}{a}\right)$ rechnen. In der Regel reicht man für jeden Werth von $\varepsilon$ mit einem oder höchstens zwei Werthen von $\varepsilon'$ aus, die man immer so wählen kann, dass $f'$ und $r'$ leicht berechnet werden können. Solche Werthe von $\varepsilon'$ sind die folgenden

$\varepsilon' = 0$, wozu $f' = 0$ und $\frac{r'}{a'} = 1 - e'$ gehören;

$\varepsilon' = 90^0$ „ $f' = 90^0 + \varphi'$ „ $\frac{r'}{a'} = 1$ „

$\varepsilon' = 180^0$ „ $f' = 180^0$ „ $\frac{r'}{a'} = 1 + e'$ „

$\varepsilon' = 270^0$ „ $f' = 270^0 - \varphi'$ „ $\frac{r'}{a'} = 1$ „

und unter diesen wird man denjenigen oder diejenigen wählen, welche in Folge der Werthe, die $Q$ hat, die etwa begangenen Rechnungsfehler am meisten hervortreten lassen.

60.

Die zweite Art der Controle besteht in Folgendem. Durch die Gleichungen (102), (104) und (106), indem man die Grössen, die sich auf den störenden Planeten beziehen, mit denen, die dem gestörten zukommen, vertauscht, rechne man neue Werthe der durch diese Gleichungen bestimmten Constanten, und hiemit für einige wenige Werthe von $\varepsilon'$, die man im ersten Quadranten gleichförmig vertheilen kann, aus (107), (108), (109) und (110) die entsprechenden Werthe von $f$, $F$ und $\gamma_0$, die ich mit $f'$, $F'$ und $\gamma'_0$ bezeichnen will. Dadurch bekommt man

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \gamma'_0 - f' \cos(\varepsilon - F') + e^2 \cos^2\varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (125)$$

Substituirt man nun hierin nach und nach alle Werthe von $\varepsilon$, die man bei der Berechnung der Coefficienten von (122) angewandt hat, und in diese Einen oder zwei der Werthe von $\varepsilon'$, die für die Berechnung der Coefficienten von (125) gedient haben, so bekommt man wieder eine vollständige Controle für die Richtigkeit dieser Coefficienten. Da ich diese Methode der im vor. Art. erklärten vorziehe, so will ich alle dazu gehörigen Formeln vollständig hinschreiben. Zuerst rechne man die Constanten $k'$, $K'$, $k'_1$ und $K'_1$ aus den folgenden Ausdrücken

$$k' \sin K' = \cos J \sin \Pi; \quad k'_1 \sin K'_1 = \sin \Pi$$
$$k' \cos K' = \cos \Pi; \quad k'_1 \cos K'_1 = \cos J \cos \Pi$$

und sodann die Constanten $p'$, $P'$, $w'$, $W'$, $w'_1$ und $W'_1$ aus den folgenden

$$p' \sin P' = 2\frac{e}{e'} - 2\alpha k' \cos(\Pi' - K').$$
$$p' \cos P' = 2\alpha \cos\varphi\, k'_1 \sin(\Pi' - K'_1)$$
$$v' \sin V' = 2\alpha \cos\varphi'\, k' \sin(\Pi' - K')$$
$$v' \cos V' = 2\alpha \cos\varphi \cos\varphi'\, k'_1 \cos(\Pi' - K'_1)$$

$$w' \sin W' = p' - 2\frac{e}{e'}\sin P'$$
$$w' \cos W' = v' \cos(V' - P')$$
$$w'_1 \sin W'_1 = v' \sin(V' - P')$$
$$w'_1 \cos W'_1 = 2\frac{e}{e'}\cos P'$$

endlich die Constante $R'$ durch folgenden

$$R' = 1 + \alpha^2 - 2e^2$$

in welchen Ausdrücken $\alpha$ dieselbe Bedeutung hat wie oben, dann bekommt man

$$f' \sin(F' - P') = w' \sin(\varepsilon' + W') - e'p'$$
$$f' \cos(F' - P') = w'_1 \cos(\varepsilon' + W'_1)$$

die $f'$ und $F'$ geben, und es wird

$$\gamma'_0 = R' - 2\alpha^2 e' \cos\varepsilon' + \alpha^2 e'^2 \cos^2\varepsilon' + ef' \cos F'$$

welches die für den Ausdruck (125) erforderlichen Coefficienten sind.

61.

Im § 4 ist gezeigt worden, dass man für die Berechnung der Störungen der Entwickelung der Grössen

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right) ; \left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 \text{ und } \left(\frac{a}{\Delta}\right)^5$$

bedarf, und in Bezug auf $\varepsilon'$ lässt sich nun die Entwickelung dieser Potenzen von $\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ auf folgende Art ausführen. Sei

$$A = C - q \cos(\varepsilon' - Q)$$
$$B = 1 - q_1 \cos(\varepsilon' + Q)$$

dann wird vermöge der Gleichung (122)

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^n = A^{-\frac{n}{2}} B^{-\frac{n}{2}}$$

und setzt man ferner

$$A^{-\frac{n}{2}} = \alpha_0^{(n)} + 2\alpha_1^{(n)} \cos(\varepsilon' - Q) + 2\alpha_2^{(n)} \cos 2(\varepsilon' - Q) + \text{etc.}$$

so kann man die Coefficienten dieser unendlichen Reihe auf vielerlei Arten erhalten. Es ist indess nicht meine Absicht, alle diese Entwickelungsarten hier anzugeben, da viele derselben sich für die rechnerische Anwendung nicht eignen, sondern ich werde blos Ein leichtes und in der Anwendung sicheres Verfahren angeben, und zwar dasjenige, welches dem analog ist, welches ich in der »Entwickelung des Products

etc.« betitelten Abhandlung gegeben habe, und welches mit einer geringen Abänderung auch schon in meiner Pariser Preisschrift vorkommt. Wendet man dieses Verfahren auf die Form von $A$ an, so findet man leicht, dass die Rechnung wie folgt geführt werden muss. Sei

$$F_i = \frac{2i+n-2}{4i}\,\frac{q}{C}$$

$$\lambda_i = F_i\,\frac{2i-n}{4(i-1)}\,\frac{q}{C}$$

$$\text{oder}\quad \lambda_i = \frac{(2i+n-2)\,(2i-n)}{16\,i\,(i-1)}\left(\frac{q}{C}\right)^2$$

$$\gamma_i = \frac{1}{1-\lambda_{i+1}\,\gamma_{i+1}}$$

$$p_i^{(n)} = F_i\,\gamma_i$$

dann wird

$$\alpha_i^{(n)} = \alpha_0^{(n)}\cdot p_1^{(n)}\cdot p_2^{(n)}\ \ldots\ p_i^{(n)}$$

Um die $\gamma_i$ nach diesen Formeln berechnen zu können, muss man für den grössten Werth von $i$, welcher in Betracht kommt, $\gamma_i$ anderweitig berechnen, und man findet leicht, dass die Grenze, wonach $\gamma_i$ bei stets wachsendem $i$ hinstrebt,

$$\gamma_i = \sec^2\tfrac{1}{2}\chi$$

ist, wenn

$$\sin\chi = \frac{q}{C}$$

gesetzt wird. In vielen Fällen ist die Anwendung dieses Grenzwerthes jedoch nicht hinreichend genau, und dann rechnet man am sichersten $\gamma_i$ für den grössten Werth von $i$, welcher in Betracht kommt, durch folgenden Kettenbruch, welcher übrigens auch allgemein gültig ist,

$$\gamma_i = \cfrac{\sec^2\frac{1}{2}\chi}{1-\cfrac{p_i}{1-\cfrac{q_i}{1-\cfrac{r_i}{1-\cfrac{s_i}{1-\text{etc.}}}}}}$$

wo ($p_i$ nicht mit $p_i^{(n)}$ zu verwechseln)

$$p_i = \frac{n\,(2-n)}{4i\,(i+1)}\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\chi\ ,\qquad q_i = \frac{(2i+n)\,(2i+2-n)}{4\,(i+1)\,(i+2)}\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\chi$$

$$r_i = \frac{(n+2)\,(4-n)}{4\,(i+2)\,(i+3)}\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\chi\ ,\qquad s_i = \frac{(2i+2+n)\,(2i+4-n)}{4\,(i+3)\,(i+4)}\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\chi$$

etc. etc.

von welchem man, wenn $i$ nur nicht ganz klein ist, mit den ersten Gliedern stets ausreicht. Man muss ferner den Werth von $\alpha_0^{(n)}$ besonders

berechnen. Bezeichnet man allgemein mit $M(a, b)$ das arithmetisch-geometrische Mittel aus den Grössen $a$ und $b$, so wird

(126) . . . . . . . . . $$\alpha_0^{(1)} = \frac{1}{M(\sqrt{C+q}, \sqrt{C-q})}$$

oder welches diesem gleichkommt,

(127) . . . $$\alpha_0^{(1)} = \frac{1}{M(\sqrt{2C}.\cos(45^\circ - \frac{1}{2}\chi), \sqrt{2C}.\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\chi))}$$

Aus $\alpha_0^{(1)}$ bekommt man

(128) . . . . . . . . . . . . . $$\alpha_0^{(3)} = \frac{\alpha_0^{(1)}}{C - q\,p_1^{(3)}}$$

und hieraus

(129) . . . . . . . . . . . . . $$\alpha_0^{(5)} = \frac{\alpha_0^{(3)}}{C - q\,p_1^{(5)}}$$

u. s. w. Man kann auch $\alpha_0^{(5)}$ aus $\alpha_0^{(1)}$ durch folgenden Ausdruck erhalten,

(130) . . . . . . $$\alpha_0^{(5)} = \frac{\alpha_0^{(1)}}{C^2 + \frac{1}{2}q^2 - 2Cq\,p_1^{(5)} + \frac{1}{2}q^2\,p_1^{(5)}\,p_2^{(5)}}$$

u. s. w., die alle leicht aus der Form

$$A = C - q\cos(\varepsilon' - Q)$$

folgen. Es kann zuweilen dienlich werden, einen Einzelnen der $\alpha$ Coefficienten für sich berechnen zu können, und hiezu wird die folgende längst bekannte Reihe zweckmässig angewandt.

(131) . . $$\alpha_i^{(n)} = E\left\{1 + \frac{n-2}{2}\cdot\frac{n}{i+1}\left(\frac{\sin^2\frac{1}{2}\chi}{2\cos\chi}\right) + \frac{n-2.n-4}{2.4}\cdot\frac{n.n+2}{i+1.i+2}\left(\frac{\sin^2\frac{1}{2}\chi}{2\cos\chi}\right)^2 + \frac{n-2.n-4.n-6}{2.4.6}\cdot\frac{n.n+2.n+4}{i+1.i+2.i+3}\left(\frac{\sin^2\frac{1}{2}\chi}{2\cos\chi}\right)^3 + \text{etc.}\right\}$$

wo

$$E = \frac{n.n+2.n+4\ldots n+2i-2}{2.4.6\ldots 2i}\cdot\frac{\operatorname{tg}^i\frac{1}{2}\chi}{(C\cos\chi)^{\frac{n}{2}}}$$

ist. Wenn $\frac{\sin^2\frac{1}{2}\chi}{\cos\chi} < 1$ ist, so convergirt diese Reihe; wenn aber diese Ungleichheit nicht erfüllt und zugleich $i$ eine grosse Zahl ist, so gehört sie in die Classe der halbconvergirenden Reihen.

## 62.

Für die Berechnung der Störungen der ersten Ordnung in Bezug auf die Massen braucht man, wie aus den vorhergehenden §§ zu ersehen ist, $\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ und $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$, also die $\alpha_i^{(1)}$ und $\alpha_i^{(3)}$, und erst in den Formeln, die zur Berechnung der Störungen der zweiten Ordnung dienen, tritt $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5$ ein, weshalb nur bei diesen die Kenntniss der $\alpha_i^{(5)}$ nothwendig

wird. Da nun aus dieser Ursache eine geringere Anzahl der $\alpha_i^{(5)}$ erforderlich wird, und man diese auch nur mit wenigeren Decimalen zu kennen braucht, wie jene, so pflege ich sie nicht durch die vorstehenden Formeln direct, sondern aus den $\alpha_i^{(3)}$ zu berechnen, aber auch die $\alpha_i^{(1)}$ rechne ich nicht direct, sondern auch aus den $\alpha_i^{(3)}$, welches geschehen kann, ohne von der Genauigkeit etwas einzubüssen. Die Methode des vor. Art. brauche ich demnach nur für $n = 3$, und will die Formeln deshalb hier für diesen Fall besonders ausschreiben. Es ist zu berechnen

$$F_i = \frac{2i+1}{4i} \cdot \frac{q}{C}$$

$$\lambda_i = F_i \frac{2i-3}{4(i-1)} \cdot \frac{q}{C}$$

$$\text{oder } \lambda_i = \frac{(2i+1)(2i-3)}{16i(i-1)} \left(\frac{q}{C}\right)^2$$

$$\gamma_i = \frac{1}{1-\lambda_{i+1}\gamma_{i+1}}$$

$$p_i^{(3)} = F_i \gamma_i$$

wo $F_i$ von dem grössten Werthe von $i$ bis zu $i = 1$, und $\lambda_i$ von demselben bis zu $i = 2$ berechnet werden muss. Es wird dann

$$\alpha_i^{(3)} = \alpha_0^{(3)} p_1^{(3)} \cdot p_2^{(3)} \ldots p_i^{(3)}$$

$\alpha_0^{(3)}$ wird, wie im vor. Art. gezeigt wurde, aus $\alpha_0^{(1)}$ berechnet, welche letztgenannte Grösse also vorweg berechnet werden muss. Im Kettenbruch

$$\gamma_i = \cfrac{\sec^2\frac{1}{2}\chi}{1 - \cfrac{p_i}{1 - \cfrac{q_i}{1 - \text{etc.}}}}$$

werden für $n = 3$ die Ausdrücke der einzelnen Glieder die folgenden:

$$p_i = -\frac{3 \cdot 1}{4i(i+1)} \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\chi\,; \quad q_i = \frac{(2i+3)(2i-1)}{4(i+1)(i+2)} \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\chi$$

$$r_i = \frac{5 \cdot 1}{4(i+2)(i+3)} \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\chi\,; \quad s_i = \frac{(2i+5)(2i+1)}{4(i+3)(i+4)} \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\chi$$

$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

und es ist wie oben $\sin\chi = \frac{q}{C}$. (*

Die constanten Coefficienten der vorstehenden Ausdrücke für $F_i$ und $\lambda_i$ führe ich hier bis zu $i = 30$ an. Setzt man für $n = 3$

(* Wenn die Reihe der zu berechnenden $\alpha_i^{(3)}$ lang ist, so kann man durch diesen Kettenbruch mehrere $\gamma_i$ zur Controle rechnen.

$$F_i = \theta_i \frac{q}{C}\,;\ \lambda_i = \mu_i \left(\frac{q}{C}\right)^2$$

so sind für die nebenstehenden Werthe des Index $i$ die Logarithmen dieser Coefficienten die folgenden:

| $i$ | $\log \theta_i$ | $\log \mu_i$ | $i$ | $\log \theta_i$ | $\log \mu_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 9.7061486 | 9.3975655 | 15 | 9.7132104 | 9.3963862 |
| 29 | 9.7063940 | 9.3975387 | 14 | 9.7142100 | 9.3961466 |
| 28 | 9.7066568 | 9.3975090 | 13 | 9.7153604 | 9.3958470 |
| 27 | 9.7069389 | 9.3974758 | 12 | 9.7166988 | 9.3954654 |
| 26 | 9.7072452 | 9.3974386 | 11 | 9.7182752 | 9.3949688 |
| 25 | 9.7075702 | 9.3973968 | 10 | 9.7201593 | 9.3943052 |
| 24 | 9.7079249 | 9.3973425 | 9 | 9.7224511 | 9.3933914 |
| 23 | 9.7083100 | 9.3972958 | 8 | 9.7252989 | 9.3920843 |
| 22 | 9.7087298 | 9.3972344 | 7 | 9.7289332 | 9.3901147 |
| 21 | 9.7091892 | 9.3971638 | 6 | 9.7337321 | 9.3869446 |
| 20 | 9.7096939 | 9.3970820 | 5 | 9.7403627 | 9.3813407 |
| 19 | 9.7102510 | 9.3969866 | 4 | 9.7501225 | 9.3699113 |
| 18 | 9.7108692 | 9.3968743 | 3 | 9.7659168 | 9.3399481 |
| 17 | 9.7115591 | 9.3967409 | 2 | 9.7958800 | 9.1938200 |
| 16 | 9.7123340 | 9.3965807 | 1 | 9.8750613 | |

Bei vielen dieser Coefficienten reicht man gewöhnlich mit Logarithmen von fünf oder vier Decimalen aus.

63.

Setzt man für einen Augenblick

$$z = c^{(\varepsilon'-Q)\sqrt{-1}}$$

wo $c$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bedeutet, so wird bekanntlich

$$2\cos i\,(\varepsilon'-Q) = z^i + \frac{1}{z^i}$$

Es wird also

$$(a)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ A = C - \tfrac{1}{2}q\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

und die unendliche Reihe wird

$$A^{-\frac{n}{2}} = \Sigma\,\alpha_i^{(n)}\,z^i$$

wo die Summirung von $i = -\infty$ bis $i = +\infty$ ausgedehnt werden muss. Durch die Differentiation bekommt man aus diesen Gleichungen

$$(a')\ \ldots\ \frac{d\,.\,A^{-\frac{n}{2}}}{dz} = \frac{nq}{4}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)A^{-\frac{n+2}{2}} = \Sigma\,i\,\alpha_i^{(n)}\,z^{i-1}$$

oder

$$\frac{nq}{4}\Sigma\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\alpha_i^{(n+2)}z^i = \frac{nq}{4}\Sigma\alpha_{i-1}^{(n+2)}z^{i-1} - \frac{nq}{4}\Sigma\alpha_{i+1}^{(n+2)}z^{i-1} = \Sigma i\,\alpha_i^{(n)}z^{i-1}$$

hieraus folgt sogleich

$$\alpha_i^{(n)} = \frac{nq}{4i}\left\{\alpha_{i-1}^{(n+2)} - \alpha_{i+1}^{(n+2)}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (132)$$

und wenn man $n = 1$ setzt,

$$\alpha_i^{(1)} = \frac{q}{4i}\left\{\alpha_{i-1}^{(3)} - \alpha_{i+1}^{(3)}\right\}$$

Durch diese Gleichung kann man leicht und sicher von den $\alpha_i^{(3)}$ zu den $\alpha_i^{(1)}$ übergehen, mit der Ausnahme jedoch, dass sie $\alpha_0^{(1)}$ gar nicht giebt, dieser Coefficient muss daher jedenfalls durch (126) oder (127) berechnet werden. Ich lasse übrigens nicht unerwähnt, dass die Umkehrung der Gleichung (128), verbunden mit der Gleichung $\alpha_1^{(3)} = \alpha_0^{(3)}\,p_1^{(3)}$,

$$\alpha_0^{(1)} = C\alpha_0^{(3)} - q\alpha_1^{(3)}$$

und überhaupt

$$\alpha_0^{(n)} = C\alpha_0^{(n+2)} - q\alpha_1^{(n+2)}$$

giebt, woraus $\alpha_0^{(1)}$ berechnet werden kann, wenn $\alpha_0^{(3)}$ gegeben ist, wozu unter Umständen der Ausdruck (131) dienen kann. Das oben beschriebene Verfahren ist indessen vorzuziehen.

Um Gleichungen zu erhalten, durch welche man die $\alpha_i^{(5)}$ aus den $\alpha_i^{(3)}$ berechnen kann, nehme ich die vorstehenden Gleichungen ($a$) und ($a'$) vor, die leicht in folgende umgewandelt werden können.

$$nA^{-\frac{n}{2}} = nCA^{-\frac{n+2}{2}} - \tfrac{1}{2}nq\left(z+\frac{1}{z}\right)A^{-\frac{n+2}{2}}$$

$$2z\frac{d.A^{-\frac{n}{2}}}{dz} = \tfrac{1}{2}nq\left(z-\frac{1}{z}\right)A^{-\frac{n+2}{2}}$$

Addirt und subtrahirt man diese, so erhält man

$$nA^{-\frac{n}{2}} + 2z\frac{d.A^{-\frac{n}{2}}}{dz} = nCA^{-\frac{n+2}{2}} - nq\frac{1}{z}\,A^{-\frac{n+2}{2}}$$

$$nA^{-\frac{n}{2}} - 2z\frac{d.A^{-\frac{n}{2}}}{dz} = nCA^{-\frac{n+2}{2}} - nq\,z\,A^{-\frac{n+2}{2}}$$

und wenn man hierauf die Reihen

$$A^{-\frac{n}{2}} = \Sigma\alpha_i^{(n)}z^i;\; A^{-\frac{n+2}{2}} = \Sigma\alpha_i^{(n+2)}z^i$$

$$z\frac{d.A^{-\frac{n}{2}}}{dz} = \Sigma i\alpha_i^{(n)} z^i$$

eben so anwendet wie oben, so wird

$$(n+2i)\,\alpha_i^{(n)} = nC\alpha_i^{(n+2)} - nq\alpha_{i+1}^{(n+2)}$$
$$(n-2i)\,\alpha_i^{(n)} = nC\alpha_i^{(n+2)} - nq\alpha_{i-1}^{(n+2)}$$

oder wenn man in der zweiten dieser $i$ in $i+1$ verwandelt,

$$(n-2i-2)\,\alpha_{i+1}^{(n)} = nC\alpha_{i+1}^{(n+2)} - nq\alpha_i^{(n+2)}$$

Eliminirt man aus dieser und der ersten vorstehenden wechselsweise $\alpha_i^{(n+2)}$ und $\alpha_{i+1}^{(n+2)}$, so bekommt man

$$\alpha_i^{(n+2)} = \frac{(2i+n)\,C}{n\,(C^2-q^2)}\,\alpha_i^{(n)} - \frac{(2i-n+2)\,q}{n\,(C^2-q^2)}\,\alpha_{i+1}^{(n)}$$
$$\alpha_i^{(n+2)} = \frac{(2i+n-2)\,q}{n\,(C^2-q^2)}\,\alpha_{i-1}^{(n)} - \frac{(2i-n)\,C}{n\,(C^2-q^2)}\,\alpha_i^{(n)}$$

die beide zu dem beabsichtigten Zwecke dienen konnen, und von welchen die erste die vortheilhaftere ist. Schreibt man in dieser $i-1$ statt $i$, multiplicirt sie mit $\frac{q}{C}$ und zieht sie von der zweiten ab, so bekommt man

$$\alpha_i^{(n+2)} = \frac{q}{C}\,\alpha_{i-1}^{(n+2)} - \frac{2i-n}{nC}\,\alpha_i^{(n)}$$

die die Coefficienten $\alpha_i^{(n+2)}$ giebt, wenn von denselben $\alpha_0^{(n+2)}$ ausserdem gegeben ist. Durch blose Umstellung erhält man aus (132)

$$\alpha_i^{(n+2)} = \alpha_{i-2}^{(n+2)} - \frac{4\,(i-1)}{nq}\,\alpha_{i-1}^{(n)}$$

welche zu demselben Zwecke dient, aber verlangt, dass $\alpha_0^{(n+2)}$ und $\alpha_1^{(n+2)}$ durch anderweitige Ausdrücke gegeben seien. Diese bekommt man jedenfalls durch die zweite der obigen Gleichungen wie folgt,

$$\alpha_0^{(n+2)} = \frac{C}{C^2-q^2}\,\alpha^{(n)} + \frac{(n-2)\,q}{n\,(C^2-q^2)}\,\alpha_1^{(n)}$$
$$\alpha_1^{(n+2)} = \frac{q}{C^2-q^2}\,\alpha_0^{(n)} + \frac{(n-2)\,C}{n\,(C^2-q^2)}\,\alpha_1^{(n)}$$

die man durch folgende Umstellung vereinfachen kann,

$$\alpha_0^{(n+2)} + \alpha_1^{(n+2)} = \frac{\alpha_0^{(n)} + \frac{n-2}{n}\,\alpha_1^{(n)}}{C-q}$$
$$\alpha_0^{(n+2)} - \alpha_1^{(n+2)} = \frac{\alpha_0^{(n)} - \frac{n-2}{n}\,\alpha_1^{(n)}}{C+q}$$

bei deren Anwendung man den Umstand benutzen kann, dass $C-q$ und

$C + q$ schon von der Berechnung von $\alpha_0^{(1)}$ vorhanden sind. Für $n = 3$ werden diese Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0^{(5)} + \alpha_1^{(5)} &= \frac{\alpha_0^{(3)} + \frac{1}{3}\alpha_1^{(3)}}{C-q} \\ \alpha_0^{(5)} - \alpha_1^{(5)} &= \frac{\alpha_0^{(3)} - \frac{1}{3}\alpha_1^{(3)}}{C+q} \\ \alpha_i^{(5)} &= \alpha_{i-2}^{(5)} - \frac{4\,(i-1)}{3q}\,\alpha_{i-1}^{(3)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (133)$$

und für $n = 5$,

$$\begin{aligned} \alpha_0^{(7)} + \alpha_1^{(7)} &= \frac{\alpha_0^{(5)} + \frac{3}{5}\alpha_1^{(5)}}{C-q} \\ \alpha_0^{(7)} - \alpha_1^{(7)} &= \frac{\alpha_0^{(5)} - \frac{3}{5}\alpha_1^{(5)}}{C+q} \\ \alpha_i^{(7)} &= \alpha_{i-2}^{(7)} - \frac{4\,(i-1)}{5q}\,\alpha_{i-1}^{(5)} \end{aligned}$$

Diese Formeln dienen für den Fall, dass man die Ermittelung der $\alpha_i^{(5)}$ nicht direct durch die $p_i^{(5)}$ und die übrigen dabei in Betracht kommenden Ausdrücke berechnen will. Will man aber dieses Verfahren anwenden, so ergiebt sich $\alpha_0^{(5)}$ durch (129) oder (130).

## 64.

Das vorstehende Verfahren lässt sich ohne Veränderung auch auf den Factor $B$ von $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$ anwenden, wenn man in allen Formeln 1 statt $C$ und $q_1$ statt $q$ schreibt. Multiplicirt man nach diesen Entwickelungen die beiden Factoren $A^{-\frac{n}{2}}$ und $B^{-\frac{n}{2}}$ mit einander, so hat man die Entwickelung von $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^n$ in Bezug auf $\varepsilon'$ erhalten. Es ist jedoch von entschiedenem Vortheil, diese Multiplication aufzuschieben, und erst dann vorzunehmen, wenn auch die Entwickelungen in Bezug auf $\varepsilon$ erhalten worden sind. Diese müssen, wie schon oben angeführt ist, durch mechanische Quadraturen erlangt werden, und man muss daher in Bezug auf $\varepsilon$ den Umkreis in eine angemessene Anzahl von gleichen Theilen theilen, für jeden diesen Theilpunkten entsprechenden numerischen Werth von $\varepsilon$ erst die numerischen Werthe von $q$, $q_1$, $C$ und $Q$ rechnen, und dann aus den drei ersten dieser Grössen die $\alpha_i^{(n)}$, oder mit bestimmteren Worten die $\alpha_i^{(1)}$, $\alpha_i^{(3)}$ und, wenn auf das Quadrat der Massen Rücksicht genommen werden soll, auch die $\alpha_i^{(5)}$. Unterscheiden wir

jetzt diese verschiedenen numerischen Werthe von $\varepsilon$, nennen irgend einen beliebigen derselben $\varepsilon_x$, versehen alle mittelst dieses Werthes von $\varepsilon$ berechneten Grössen mit dem Index $x$, und setzen erst

$$(134)\quad \begin{cases} Y^c_{0,x} = \alpha^{(n)}_{0,x} \\ Y^c_{1,x} = \alpha^{(n)}_{1,x} \cos(Q_x - \varepsilon_x)\,; & Y^s_{1,x} = \alpha^{(n)}_{1,x} \sin(Q_x - \varepsilon_x) \\ Y^c_{2,x} = \alpha^{(n)}_{2,x} \cos 2(Q_x - \varepsilon_x)\,; & Y^s_{2,x} = \alpha^{(n)}_{2,x} \sin 2(Q_x - \varepsilon_x) \\ Y^c_{3,x} = \alpha^{(n)}_{3,x} \cos 3(Q_x - \varepsilon_x)\,; & Y^s_{3,x} = \alpha^{(n)}_{3,x} \sin 3(Q_x - \varepsilon_x) \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{cases}$$

dann wird

$$A_x^{-\frac{n}{2}} = Y^c_{0,x} + 2Y^c_{1,x}\cos(\varepsilon'-\varepsilon) + 2Y^c_{2,x}\cos 2(\varepsilon'-\varepsilon) + 2Y^c_{3,x}\cos 3(\varepsilon'-\varepsilon) + \ldots$$
$$+ 2Y^s_{1,x}\sin(\varepsilon'-\varepsilon) + 2Y^s_{2,x}\sin 2(\varepsilon'-\varepsilon) + 2Y^s_{3,x}\sin 3(\varepsilon'-\varepsilon) + \ldots$$

und die mechanische Quadratur muss nach und nach auf die $Y^c_{0,x}$, auf die $Y^c_{1,x}$, etc. und auf die $Y^s_{1,x}$, etc. angewandt werden. Es scheint, als dürfte man in den vorstehenden Ausdrücken $\varepsilon$ und bez. $\varepsilon_x$ gleich Null machen, allein dieses ist nicht der Fall, denn man kann, wenn man dieses thut, in gewissen Fällen durch die Anwendung der mechanischen Quadratur auf diese Grössen ganz andere Coefficienten bekommen wie die, die man haben will. Die Einführung von $\varepsilon$ und bez. $\varepsilon_x$ in die vorstehenden Ausdrücke gewährt ausserdem noch Vortheile. Die $Q_x$ bewegen sich durch den ganzen Umkreis, während die Bögen $Q_x - \varepsilon_x$ nahe die constanten Bögen $W + P$ oder $W_1 + P$ der Ausdrücke (106) zum Mittelwerth haben, und sich nur von einem gewissen Maximum bis zu einem gewissen Minimum ausdehnen, welche Grenzwerthe sich oftmals nur ein paar Grade vom Mittelwerth entfernen. Die daraus folgenden Werthe von $Y^c_{i,x}$ und $Y^s_{i,x}$ sind daher für die verschiedenen Werthe von $x$, die vorkommen, geringen Schwankungen unterworfen, und alle Quadraturen gestalten sich gleichförmiger und regelmässiger.

## 65.

Die Anzahl der Theile, in welche in jedem besondern Falle der Umkreis zu theilen ist, kann im Voraus durch eine nie trügende Regel nicht mit Bestimmtheit angegeben werden, man muss sich nur davor hüten, dass man diese Anzahl nicht zu klein nimmt. Ein wenig Übung

und Erfahrung in dieser Sache giebt aber schon den Überblick, der nöthig ist, um die passende Anzahl zu finden, um so mehr da man, wenn nicht die Formeln zu weitläuftig werden sollen, keine grosse Auswahl hat. Am einfachsten werden die Formeln, wenn man den Umkreis durch eine Zahl theilt, die eine Potenz von 2 ist, hierauf folgen bei möglichst nahe gleichen Werthen die Theiler, die aus dem Product einer Potenz von 2 in die Zahl 3 bestehen, u. s. w. Der Theiler, der in der vorliegenden Aufgabe am häufigsten der zweckmässigste ist, ist die Zahl 16. es können jedoch Fälle vorkommen, wo man mit der Zahl 12 ausreicht, auch sind Fälle vorhanden, wo die erstgenannte Zahl nicht ausreicht, und man daher eine grössere Zahl wählen muss. Man kann in diesen Fällen die Zahl 24, und wo diese nicht ausreicht, die Zahl 32 wählen.*) Ich will für diese vier Theilungen die Formeln hier anführen.

Die periodische Function überhaupt, deren Entwickelungscoefficienten man durch die mechanische Quadratur berechnen soll, will ich $Y$ nennen, und die Entwickelungscoefficienten selbst mit $c_\nu$ und $s_\nu$ bezeichnen, so genommen, dass nach der Entwickelung

$$\begin{aligned} Y = \tfrac{1}{2} c_0 + c_1 \cos\varepsilon + c_2 \cos 2\varepsilon + c_3 \cos 3\varepsilon + \ldots \\ + s_1 \sin\varepsilon + s_2 \sin 2\varepsilon + s_3 \sin 3\varepsilon + \ldots \end{aligned}$$

werde, mithin negative Werthe von $\varepsilon$ ausgeschlossen sind.

1) Wenn man den Umkreis in 12 Theile theilt, so muss man für $\varepsilon_x$ nach und nach

$$\varepsilon_0 = 0\,,\ \varepsilon_1 = 30^0,\ \varepsilon_2 = 60^0, \ldots \varepsilon_{11} = 330^0$$

annehmen, und die numerischen Werthe von $Y$, die zu diesen Annahmen gehören, berechnen. Bezeichnet man diese mit

$$Y_0,\ Y_1,\ Y_2, \ldots Y_{11}$$

so bekommt man hierauf die Coefficienten $c_\nu$ und $s_\nu$ durch folgende Ausdrücke. Sei

$$\begin{array}{ll} (0.6) = Y_0 + Y_6 & \left(\frac{0}{6}\right) = Y_0 - Y_6 \\ (1.7) = Y_1 + Y_7 & \left(\frac{1}{7}\right) = Y_1 - Y_7 \\ (2.8) = Y_2 + Y_8 & \left(\frac{2}{8}\right) = Y_2 - Y_8 \\ \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ (5.11) = Y_5 + Y_{11} & \left(\frac{5}{11}\right) = Y_5 - Y_{11} \end{array}$$

dann wird

*) Für die Jupiterstörungen der Pallas z. B. reicht die Zahl 32 aus.

$$3(c_0+2c_6) = (0.6) + (2.8) + (4.10)$$
$$3(c_0-2c_6) = (1.7) + (3.9) + (5.11)$$
$$3(c_2+c_4) = (0.6) - \{(2.8) + (4.10)\} \sin 30^0$$
$$3(c_2-c_4) = \{(1.7) + (5.11)\} \sin 30^0 - (3.9)$$
$$3(s_2+s_4) = \{(1.7) - (5.11)\} \cos 30^0$$
$$3(s_2-s_4) = \{(2.8) - (4.10)\} \cos 30^0$$

---

$$3(c_1+c_5) = \left(\tfrac{0}{6}\right) + \left\{\left(\tfrac{2}{8}\right) - \left(\tfrac{4}{10}\right)\right\} \sin 30^0$$
$$3(c_1-c_5) = \left\{\left(\tfrac{1}{7}\right) - \left(\tfrac{5}{11}\right)\right\} \cos 30^0$$
$$6\,c_3 = \left(\tfrac{0}{6}\right) - \left(\tfrac{2}{8}\right) + \left(\tfrac{4}{10}\right)$$
$$3(s_1+s_5) = \left\{\left(\tfrac{1}{7}\right) + \left(\tfrac{5}{11}\right)\right\} \sin 30^0 + \left(\tfrac{3}{9}\right)$$
$$3(s_1-s_5) = \left\{\left(\tfrac{2}{8}\right) + \left(\tfrac{4}{10}\right)\right\} \cos 30^0$$
$$6\,s_3 = \left(\tfrac{1}{7}\right) - \left(\tfrac{3}{9}\right) + \left(\tfrac{5}{11}\right)$$

2) Wenn man den Umkreis in 16 Theile theilt, so wird

$$\varepsilon_0 = 0\,,\ \varepsilon_1 = 22^0\,30'\,,\ \varepsilon_2 = 45^0, \ldots \varepsilon_{15} = 337^0\,30'$$

und die dazu gehörigen Werthe von $Y$ sind

$$Y_0,\ Y_1,\ Y_2, \ldots Y_{15}$$

Sei nun

$$(0.8) = Y_0 + Y_8 \qquad \left(\tfrac{0}{8}\right) = Y_0 - Y_8$$
$$(1.9) = Y_1 + Y_9 \qquad \left(\tfrac{1}{9}\right) = Y_1 - Y_9$$
$$(2.10) = Y_2 + Y_{10} \qquad \left(\tfrac{2}{10}\right) = Y_2 - Y_{10}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$(7.15) = Y_7 + Y_{15} \qquad \left(\tfrac{7}{15}\right) = Y_7 - Y_{15}$$

---

$$(0.4) = (0.8) + (4.12) \qquad (0.2) = (0.4) + (2.6)$$
$$(1.5) = (1.9) + (5.13) \qquad (1.3) = (1.5) + (3.7)$$
$$(2.6) = (2.10) + (6.14)$$
$$(3.7) = (3.11) + (7.15)$$

dann wird

$$4(c_0+2c_8) = (0.2)$$
$$4(c_0-2c_8) = (1.3)$$
$$4(c_2+c_6) = (0.8) - (4.12)$$
$$4(c_2-c_6) = \{[(1.9) - (5.13)] - [(3.11) - (7.15)]\} \cos 45^0$$
$$8c_4 = (0.4) - (2.6)$$
$$4(s_2+s_6) = \{[(1.9) - (5.13)] + [(3.11) - (7.15)]\} \cos 45^0$$
$$4(s_2-s_6) = (2.10) - (6.14)$$
$$8s_4 = (1.5) - (3.7)$$

---

$$4(c_1 + c_7) = (\tfrac{0}{8}) + \{(\tfrac{2}{10}) - (\tfrac{6}{14})\} \cos 45^0$$
$$4(c_1 - c_7) = \{(\tfrac{1}{9}) - (\tfrac{7}{15})\} \cos 22\tfrac{1}{2}^0 + \{(\tfrac{3}{11}) - (\tfrac{5}{13})\} \cos 67\tfrac{1}{2}^0$$
$$4(c_3 + c_5) = (\tfrac{0}{8}) - \{(\tfrac{2}{10}) - (\tfrac{6}{14})\} \cos 45^0$$
$$4(c_3 - c_5) = \{(\tfrac{1}{9}) - (\tfrac{7}{15})\} \sin 22\tfrac{1}{2}^0 - \{(\tfrac{3}{11}) - (\tfrac{5}{13})\} \sin 67\tfrac{1}{2}^0$$
$$4(s_1 + s_7) = \{(\tfrac{1}{9}) + (\tfrac{7}{15})\} \sin 22\tfrac{1}{2}^0 + \{(\tfrac{3}{11}) + (\tfrac{5}{13})\} \sin 67\tfrac{1}{2}^0$$
$$4(s_1 - s_7) = \{(\tfrac{2}{10}) + (\tfrac{6}{14})\} \cos 45^0 + (\tfrac{4}{12})$$
$$4(s_3 + s_5) = \{(\tfrac{1}{9}) + (\tfrac{7}{15})\} \cos 22\tfrac{1}{2}^0 - \{(\tfrac{3}{11}) + (\tfrac{5}{13})\} \cos 67\tfrac{1}{2}^0$$
$$4(s_3 - s_5) = \{(\tfrac{2}{10}) + (\tfrac{6}{14})\} \cos 45^0 - (\tfrac{4}{12})$$

3) Wenn man den Umkreis in 24 Theile theilt, so wird

$$\varepsilon_0 = 0, \ \varepsilon_1 = 15^0, \ \varepsilon_2 = 30^0, \ \ldots \ \varepsilon_{23} = 345^0$$

und die Werthe von $Y$ sind

$$Y_0, \ Y_1, \ Y_2, \ \ldots \ Y_{23}$$

Sei nun

$$(0.12) = Y_0 + Y_{12} \quad (0.6) = (0.12) + (6.18) \quad (\tfrac{0}{6}) = (0.12) - (6.18)$$
$$(1.13) = Y_1 + Y_{13} \quad (1.7) = (1.13) + (7.19) \quad (\tfrac{1}{7}) = (1.13) - (7.19)$$
$$(2.14) = Y_2 + Y_{14} \quad (2.8) = (2.14) + (8.20) \quad (\tfrac{2}{8}) = (2.14) - (8.20)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$(11.23) = Y_{11} + Y_{23} \quad (5.11) = (5.17) + (11.23) \quad (\tfrac{5}{11}) = (5.17) - (11.23)$$

dann wird

$$6(c_0 + 2c_{12}) = (0.6) + (2.8) + (4.10)$$
$$6(c_0 - 2c_{12}) = (1.7) + (3.9) + (5.11)$$
$$6(c_2 + c_{10}) = (\tfrac{0}{6}) + \{(\tfrac{2}{8}) - (\tfrac{4}{10})\} \sin 30^0$$
$$6(c_2 - c_{10}) = \{(\tfrac{1}{7}) - (\tfrac{5}{11})\} \cos 30^0$$
$$6(c_4 + c_8) = (0.6) - \{(2.8) + (4.10)\} \sin 30^0$$
$$6(c_4 - c_8) = \{(1.7) + (5.11)\} \sin 30^0 - (3.9)$$
$$12 c_6 = (\tfrac{0}{6}) - (\tfrac{2}{8}) + (\tfrac{4}{10})$$
$$6(s_2 + s_{10}) = \{(\tfrac{1}{7}) + (\tfrac{5}{11})\} \sin 30^0 + (\tfrac{3}{9})$$
$$6(s_2 - s_{10}) = \{(\tfrac{2}{8}) + (\tfrac{4}{10})\} \cos 30^0$$
$$6(s_4 + s_8) = \{(1.7) - (5.11)\} \cos 30^0$$
$$6(s_4 - s_8) = \{(2.8) - (4.10)\} \cos 30^0$$
$$12 s_6 = (\tfrac{1}{7}) - (\tfrac{3}{9}) + (\tfrac{5}{11})$$

Sei ferner

$$(\tfrac{0}{12}) = Y_0 - Y_{12}$$
$$(\tfrac{1}{13}) = Y_1 - Y_{13}$$
$$(\tfrac{2}{14}) = Y_2 - Y_{14}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$(\tfrac{11}{23}) = Y_{11} - Y_{23}$$

dann wird

$$6(c_1+c_{11})=\binom{0}{12}+\left\{\binom{2}{14}-\binom{10}{22}\right\}\cos 30^0+\left\{\binom{4}{16}-\binom{8}{20}\right\}\cos 60^0$$
$$6(c_1-c_{11})=\left\{\binom{1}{13}-\binom{11}{23}\right\}\cos 15^0+\left\{\binom{3}{15}-\binom{9}{21}\right\}\cos 45^0+\left\{\binom{5}{17}-\binom{7}{19}\right\}\cos 75^0$$
$$6(c_3+c_9)=\binom{0}{12}-\binom{4}{16}+\binom{8}{20}$$
$$6(c_3-c_9)=\left\{\binom{1}{13}-\binom{11}{23}-\left[\binom{3}{15}-\binom{9}{21}\right]-\left[\binom{5}{17}-\binom{7}{19}\right]\right\}\cos 45^0$$
$$6(c_5+c_7)=\binom{0}{12}-\left\{\binom{2}{14}-\binom{10}{22}\right\}\cos 30^0+\left\{\binom{4}{16}-\binom{8}{20}\right\}\cos 60^0$$
$$6(c_5-c_7)=\left\{\binom{1}{13}-\binom{11}{23}\right\}\sin 15^0-\left\{\binom{3}{15}-\binom{9}{21}\right\}\sin 45^0+\left\{\binom{5}{17}-\binom{7}{19}\right\}\sin 75^0$$
$$6(s_1+s_{11})=\left\{\binom{1}{13}+\binom{11}{23}\right\}\sin 15^0+\left\{\binom{3}{15}+\binom{9}{21}\right\}\sin 45^0+\left\{\binom{5}{17}+\binom{7}{19}\right\}\sin 75^0$$
$$6(s_1-s_{11})=\left\{\binom{2}{14}+\binom{10}{22}\right\}\sin 30^0+\left\{\binom{4}{16}+\binom{8}{20}\right\}\sin 60^0+\binom{6}{18}$$
$$6(s_3+s_9)=\left\{\binom{1}{13}+\binom{11}{23}+\binom{3}{15}+\binom{9}{21}-\left[\binom{5}{17}+\binom{7}{19}\right]\right\}\cos 45^0$$
$$6(s_3-s_9)=\binom{2}{14}-\binom{6}{18}+\binom{10}{22}$$
$$6(s_5+s_7)=\left\{\binom{1}{13}+\binom{11}{23}\right\}\cos 15^0-\left\{\binom{3}{15}+\binom{9}{21}\right\}\cos 45^0+\left\{\binom{5}{17}+\binom{7}{19}\right\}\cos 75^0$$
$$6(s_5-s_7)=\left\{\binom{2}{14}+\binom{10}{22}\right\}\sin 30^0-\left\{\binom{4}{16}+\binom{8}{20}\right\}\sin 60^0+\binom{6}{18}$$

4) Wenn man den Umkreis in 32 Theile theilt, so wird

$$\varepsilon_0=0,\ \varepsilon_1=11^0 15',\ \varepsilon_2=22^0 30',\ \varepsilon_3=33^0 45',\ \ldots\ \varepsilon_{31}=348^0 45'$$

und die Werthe von $Y$ sind

$$Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ \ldots\ Y_{31}$$

Sei jetzt

| | | |
|---|---|---|
| $(0.16)=Y_0+Y_{16}$ | $(0.8)=(0.16)+(8.24)$ | $(0.4)=(0.8)+(4.12)$ |
| $(1.17)=Y_1+Y_{17}$ | $(1.9)=(1.17)+(9.25)$ | $(1.5)=(1.9)+(5.13)$ |
| $(2.18)=Y_2+Y_{18}$ | $(2.10)=(2.18)+(10.26)$ | $(2.6)=(2.10)+(6.14)$ |
| $\vdots \quad \vdots$ | $\vdots \quad \vdots$ | $(3.7)=(3.11)+(7.15)$ |
| | | $(0.2)=(0.4)+(2.6)$ |
| $(15.31)=Y_{15}+Y_{31}$ | $(7.15)=(7.23)+(15.31)$ | $(1.3)=(1.5)+(3.7)$ |
| | $\binom{0}{8}=(0.16)-(8.24)$ | $\binom{0}{4}=(0.8)-(4.12)$ |
| | $\binom{1}{9}=(1.17)-(9.25)$ | $\binom{1}{5}=(1.9)-(5.13)$ |
| | $\vdots \quad \vdots$ | $\binom{2}{6}=(2.10)-(6.14)$ |
| | $\binom{7}{15}=(7.23)-(15.31)$ | $\binom{3}{7}=(3.11)-(7.15)$ |

dann wird

$$8(c_0+2c_{16}=(0.2)+(1.3)$$
$$8(c_0-2c_{16}=(0.2)-(1.3)$$
$$8(c_2+c_{14})=\binom{0}{8}+\left\{\binom{2}{10}-\binom{6}{14}\right\}\cos 45^0$$
$$8(c_2-c_{14})=\left\{\binom{1}{9}-\binom{7}{15}\right\}\cos 22\tfrac{1}{2}^0+\left\{\binom{3}{11}-\binom{5}{13}\right\}\cos 67\tfrac{1}{2}^0$$
$$8(c_4+c_{12})=\binom{0}{4}$$
$$8(c_4-c_{12})=\left\{\binom{1}{5}-\binom{3}{7}\right\}\cos 45^0$$

$$8(c_6+c_{10}) = (\tfrac{0}{8}) - \{(\tfrac{2}{10}) - (\tfrac{6}{14})\} \cos 45^0$$
$$8(c_6-c_{10}) = \{(\tfrac{1}{9}) - (\tfrac{7}{15})\} \sin 22\tfrac{1}{2}^0 - \{(\tfrac{3}{11}) - (\tfrac{5}{13})\} \sin 67\tfrac{1}{2}^0$$
$$16\, c_8 \quad = (0.4) - (2.6)$$
$$8(s_2+s_{14}) = \{(\tfrac{1}{9}) + (\tfrac{7}{15})\} \sin 22\tfrac{1}{2}^0 + \{(\tfrac{3}{11}) + (\tfrac{5}{13})\} \sin 67\tfrac{1}{2}^0$$
$$8(s_2-s_{14}) = \{(\tfrac{2}{10}) - (\tfrac{6}{14})\} \cos 45^0 + (\tfrac{4}{12})$$
$$8(s_4+s_{12}) = \{(\tfrac{1}{5}) + (\tfrac{3}{7})\} \cos 45^0$$
$$8(s_4-s_{12}) = (\tfrac{2}{6})$$
$$8(s_6+s_{10}) = \{(\tfrac{1}{9}) + (\tfrac{7}{15})\} \cos 22\tfrac{1}{2}^0 - \{(\tfrac{3}{11}) + (\tfrac{5}{13})\} \cos 67\tfrac{1}{2}^0$$
$$8(s_6-s_{10}) = \{(\tfrac{2}{10}) - (\tfrac{6}{14})\} \cos 45^0 - (\tfrac{4}{12})$$

Sei ferner

$$(\tfrac{0}{16}) = Y_0 - Y_{16}$$
$$(\tfrac{1}{17}) = Y_1 - Y_{17}$$
$$(\tfrac{2}{18}) = Y_2 - Y_{18}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$(\tfrac{15}{31}) = Y_{15} - Y_{31}$$

und hiemit

$$A = \{(\tfrac{1}{17}) - (\tfrac{15}{31})\} \cos 11\tfrac{1}{4}^0 + \{(\tfrac{7}{23}) - (\tfrac{9}{25})\} \cos 78\tfrac{3}{4}^0$$
$$B = \{(\tfrac{1}{17}) - (\tfrac{15}{31})\} \sin 11\tfrac{1}{4}^0 - \{(\tfrac{7}{23}) - (\tfrac{9}{25})\} \sin 78\tfrac{3}{4}^0$$
$$A' = \{(\tfrac{2}{18}) - (\tfrac{14}{30})\} \cos 22\tfrac{1}{2}^0 + \{(\tfrac{6}{22}) - (\tfrac{10}{26})\} \cos 67\tfrac{1}{2}^0$$
$$B' = \{(\tfrac{2}{18}) - (\tfrac{14}{30})\} \sin 22\tfrac{1}{2}^0 - \{(\tfrac{6}{22}) - (\tfrac{10}{26})\} \sin 67\tfrac{1}{2}^0$$
$$A'' = \{(\tfrac{3}{19}) - (\tfrac{13}{29})\} \cos 33\tfrac{3}{4}^0 + \{(\tfrac{5}{21}) - (\tfrac{11}{27})\} \cos 56\tfrac{1}{4}^0$$
$$B'' = \{(\tfrac{3}{19}) - (\tfrac{13}{29})\} \sin 33\tfrac{3}{4}^0 - \{(\tfrac{5}{21}) - (\tfrac{11}{27})\} \sin 56\tfrac{1}{4}^0$$
$$A''' = (\tfrac{0}{16}) + \{(\tfrac{4}{20}) - (\tfrac{12}{28})\} \cos 45^0$$
$$B''' = (\tfrac{0}{16}) - \{(\tfrac{4}{20}) - (\tfrac{12}{28})\} \cos 45^0$$

---

$$C = \{(\tfrac{1}{17}) + (\tfrac{15}{31})\} \sin 11\tfrac{1}{4}^0 + \{(\tfrac{7}{23}) + (\tfrac{9}{25})\} \sin 78\tfrac{3}{4}^0$$
$$D = \{(\tfrac{1}{17}) + (\tfrac{15}{31})\} \cos 11\tfrac{1}{4}^0 - \{(\tfrac{7}{23}) + (\tfrac{9}{25})\} \cos 78\tfrac{3}{4}^0$$
$$C' = \{(\tfrac{2}{18}) + (\tfrac{14}{30})\} \sin 22\tfrac{1}{2}^0 + \{(\tfrac{6}{22}) + (\tfrac{10}{26})\} \sin 67\tfrac{1}{2}^0$$
$$D' = \{(\tfrac{2}{18}) + (\tfrac{14}{30})\} \cos 22\tfrac{1}{2}^0 - \{(\tfrac{6}{22}) + (\tfrac{10}{26})\} \cos 67\tfrac{1}{2}^0$$
$$C'' = \{(\tfrac{3}{19}) + (\tfrac{13}{29})\} \sin 33\tfrac{3}{4}^0 + \{(\tfrac{5}{21}) + (\tfrac{11}{27})\} \sin 56\tfrac{1}{4}^0$$
$$D'' = \{(\tfrac{3}{19}) + (\tfrac{13}{29})\} \cos 33\tfrac{3}{4}^0 - \{(\tfrac{5}{21}) + (\tfrac{11}{27})\} \cos 56\tfrac{1}{4}^0$$
$$C''' = \{(\tfrac{4}{20}) + (\tfrac{12}{28})\} \cos 45^0 + (\tfrac{8}{24})$$
$$D''' = \{(\tfrac{4}{20}) + (\tfrac{12}{28})\} \cos 45^0 - (\tfrac{8}{24})$$

dann wird

$$8(c_1+c_{15}) = A''' + A'$$
$$8(c_1-c_{15}) = A + A''$$
$$8(c_3+c_{13}) = B''' + B'$$
$$8(c_3-c_{13}) = \{A - A'' + B + B''\} \cos 45^0$$

$$8(c_5+c_{11}) = B''' - B'$$
$$8(c_5-c_{11}) = \{A - A'' - (B+B'')\} \cos 45^0$$
$$8(c_7+c_9) = A''' - A'$$
$$8(c_7-c_9) = B - B''$$

---

$$8(s_1+s_{15}) = C + C''$$
$$8(s_1-s_{15}) = C''' + C'$$
$$8(s_3+s_{13}) = \{D + D'' - (C - C'')\} \cos 45^0$$
$$8(s_3-s_{13}) = D' + D'''$$
$$8(s_5+s_{11}) = \{D + D'' + C - C''\} \cos 45^0$$
$$8(s_5-s_{11}) = D' - D'''$$
$$8(s_7+s_9) = D - D''$$
$$8(s_7-s_9) = -C''' + C'$$

Die angesetzten Coefficienten sind alle, die man in jedem dieser Fälle bekommen kann, und die Art, wie ich die Formeln gestellt habe, nemlich so, dass man aus jedem Paar derselben die Summe und die Differenz nehmen muss, um die Entwickelungscoefficienten selbst zu bekommen, trägt zur Übersichtlichkeit bei. Ich bemerke noch, dass $\sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$ ist, welches aber keinen erheblichen Vortheil gewährt. Eine wesentliche Bemerkung ist aber die, dass man durch die mechanische Quadratur diese Entwickelungscoefficienten nicht strenge bekommt, sondern wenn die Anzahl der Theile, in welche man den Umkreis getheilt hat, mit $n$ bezeichnet wird,

$$(135) \quad \ldots\ldots \begin{cases} c_\nu + c_{n-\nu} + c_{n+\nu} + c_{2n-\nu} + \ldots \\ \text{statt } c_\nu, \text{ und} \\ s_\nu - s_{n-\nu} + s_{n+\nu} - s_{2n-\nu} \pm \ldots \end{cases}$$

statt $s_\nu$. Man muss daher immer den Theiler so gross annehmen, dass die folgenden Glieder dieser Ausdrücke in Bezug auf das erste als verschwindend betrachtet werden können.

Es ist leicht, sich bei der Anwendung dieser Methode Controlen für die Richtigkeit der numerischen Rechnung zu verschaffen. Häufig kann man schon aus den numerischen Werthen, die die $c_\nu$ und $s_\nu$ für die grösstmöglichsten Werthe von $\nu$ bekommen, auf die Richtigkeit der ausgeführten numerischen Rechnung einen Schluss machen, aber ausserdem kann man diese dadurch prüfen, dass man aus den erhaltenen numerischen Werthen der $c_\nu$ und $s_\nu$ einen oder mehrere der zu Grunde gelegten Werthe von $Y_x$ berechnet. Dieses geschieht durch die Formel

$$Y_x = \tfrac{1}{2}c_0 + c_1 \cos\varepsilon_x + c_2 \cos 2\varepsilon_x + c_3 \cos 3\varepsilon_x + \dots$$
$$+ s_1 \sin\varepsilon_x + s_2 \sin 2\varepsilon_x + s_3 \sin 3\varepsilon_x + \dots$$

von welcher man die einfacheren Fälle wählen kann.

66.

Die Anwendung dieser Methode auf die oben mit $Y^c_{0,x}$, $Y^c_{1,x}$, etc. $Y^s_{1,x}$, etc. bezeichneten Gruppen von numerischen Werthen verwandelt jede derselben in eine nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von $\varepsilon$ fortschreitende Reihe. Setzen wir für die durch die Zahlen 0, 1, 2, etc. ausgedrückten Indices allgemein $i$, so entsteht aus den numerischen Werthen von

$$Y^c_{i,0},\ Y^c_{i,1},\ Y^c_{i,2},\ \text{etc.}$$

wo 0, 1, 2, etc. dem Index $x$ entsprechen, die Reihe

$$Y^c_i = \tfrac{1}{2}C^c_{i,0} + C^c_{i,1}\cos\varepsilon + C^c_{i,2}\cos 2\varepsilon + \dots$$
$$+ C^s_{i,1}\sin\varepsilon + C^s_{i,2}\sin 2\varepsilon + \dots$$
$$= \Sigma C^c_{i,\nu}\cos\nu\varepsilon + \Sigma C^s_{i,\nu}\sin\nu\varepsilon$$

und aus den numerischen Werthen von

$$Y^s_{i,0},\ Y^s_{i,1},\ Y^s_{i,2},\ \text{etc.}$$

die Reihe

$$Y^s_i = \tfrac{1}{2}S^c_{i,0} + S^c_{i,1}\cos\varepsilon + S^c_{i,2}\cos 2\varepsilon + \dots$$
$$+ S^s_{i,1}\sin\varepsilon + S^s_{i,2}\sin 2\varepsilon + \dots$$
$$= \Sigma S^c_{i,\nu}\cos\nu\varepsilon + \Sigma S^s_{i,\nu}\sin\nu\varepsilon$$

Da nun hiemit allgemein, wenn man für $i$ die Zahlen 0, 1, 2, etc. setzt,

$$A^{-\frac{n}{2}} = Y^c_0 + 2Y^c_1\cos(\varepsilon'-\varepsilon) + 2Y^c_2\cos 2(\varepsilon'-\varepsilon) + \dots$$
$$+ 2Y^s_1\sin(\varepsilon'-\varepsilon) + 2Y^s_2\sin 2(\varepsilon'-\varepsilon) + \dots$$

wird, so ergiebt sich leicht durch die Substitution der vorstehenden Ausdrücke für $Y^c_i$ und $Y^s_i$,

$$A^{-\frac{n}{2}} = \Sigma\Sigma\left\{C^c_{i,\nu} \mp S^s_{i,\nu}\right\}\cos[(i\mp\nu)\varepsilon - i\varepsilon'] \mp \Sigma\Sigma\left\{C^s_{i,\nu} \pm S^c_{i,\nu}\right\}\sin[(i\mp\nu) - i\varepsilon'] \quad (136)$$

Dieser Ausdruck ist so gestellt, dass der Index $i$ nur von $i = 0$ bis

$i = +\infty$ ausgedehnt werden darf, und für $i = 0$ nur die unteren Zeichen angewandt werden dürfen, also in diesem Falle keine negativen Vielfachen von $\varepsilon$ vorkommen. Für alle oben bezeichneten Werthe von $i$, die von $i = 0$ verschieden sind, erstreckt sich selbstverständlich $i \mp \nu$ von $-\infty$ bis $+\infty$. Vom constanten Gliede giebt dieser Ausdruck, so wie in den vorstehenden Ausdrücken von $Y_i^c$ und $Y_i^s$ angenommen ist, den doppelten Werth $C_{0.0}^c$, und es wird sich weiter unten zeigen, dass es für die ferneren Rechnungen dienlich ist, diesen unverändert anzusetzen, statt die Division mit 2 auszuführen.

67.

Der Modul $q$ hängt von dem Minimum der Entfernung des störenden Planeten vom gestörten ab, und je kleiner dieses Minimum ist, desto mehr nähert sich das Verhältniss von $q$ zu $C$ der Eins. Der Modul $q_1$ hingegen ist, gleichwie $\gamma_2$, von der Ordnung des Quadrats der Excentricität des störenden Planeten, und daher eine sehr kleine Grösse. Aus diesem Grunde hat der Factor $B$ oftmals so wenig Einfluss, dass man ihn gradezu gleich Eins setzen darf, und in den Fällen, wo dieses nicht geschehen kann, reicht man mit der Berücksichtigung der ersten Potenz von $q_1$ aus, und auch die daher rührenden Glieder sind nur in wenigen Gliedern von $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^n$ merklich. Es wird daher mit wohl immer ausreichender Genauigkeit

$$B^{-\frac{n}{2}} = 1 + n\,\frac{q_1}{2}\cos(\varepsilon' + Q)$$

Setzt man nun

$$V_\varkappa = \tfrac{1}{4} q_{1\varkappa} \cos(Q_\varkappa - \varepsilon_\varkappa)\,,\quad V'_\varkappa = \tfrac{1}{4} q_{1\varkappa} \sin(Q_\varkappa - \varepsilon_\varkappa)$$

so wird

$$B_\varkappa^{-1} = 1 + 2V_\varkappa \cos(\varepsilon + \varepsilon') - 2V'_\varkappa \sin(\varepsilon + \varepsilon')$$

Nachdem man wieder für alle Werthe von $\varkappa$, das ist für alle Theilpunkte des Umkreises, die man überhaupt in dieser Rechnung angenommen hat, die numerischen Werthe von $V_\varkappa$ und $V'_\varkappa$ berechnet hat, giebt die mechanische Quadratur

$$\begin{aligned} V = \tfrac{1}{2}D_0 + D_1\cos\varepsilon + D_2\cos 2\varepsilon + \ldots \\ + D'_1\sin\varepsilon + D'_2\sin 2\varepsilon + \ldots \end{aligned}$$

$$V' = \tfrac{1}{2}E_0 + E_1 \cos\varepsilon + E_2 \cos 2\varepsilon + \dots$$
$$+ E'_1 \sin\varepsilon + E'_2 \sin 2\varepsilon + \dots$$

wo die angesetzten Coefficienten mehr wie ausreichend sind, und hiemit wird

$$\begin{aligned} B^{-\frac{1}{2}} = 1 &+ (D_2 - E'_2) \cos(\varepsilon - \varepsilon') &&+ (E_2 + D'_2) \sin(\varepsilon - \varepsilon') \\ &+ (D_1 - E'_1) \cos(-\varepsilon') &&+ (E_1 + D'_1) \sin(-\varepsilon') \\ &+ D_0 \quad \cos(-\varepsilon - \varepsilon') &&+ E_0 \quad \sin(-\varepsilon - \varepsilon') \\ &+ (D_1 + E'_1) \cos(-2\varepsilon - \varepsilon') &&+ (E_1 - D'_1) \sin(-2\varepsilon - \varepsilon') \\ &+ (D_2 + E'_2) \cos(-3\varepsilon - \varepsilon') &&+ (E_2 - D'_2) \sin(-3\varepsilon - \varepsilon') \end{aligned}$$

Aus diesem Ausdruck ergiebt sich der für $B^{-\frac{3}{2}}$, wenn man alle Coefficienten, das erste Glied ausgenommen, mit 3, und der für $B^{-\frac{5}{2}}$, wenn man dieselben mit 5 multiplicirt.

Die Multiplication von $A^{-\frac{n}{2}}$ mit $B^{-\frac{n}{2}}$ ist nun leicht mechanisch auszuführen, so wie ich diese Art der Multiplication von Reihen mit einander in meiner Berliner Preisschrift vom Jahre 1830 zuerst erklärt und angewandt habe. Dasselbe gilt von den später auszuführenden Multiplicationen von $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ und $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5$ mit den im Art. 40 bezeichneten Factoren, wodurch die Differentialquotienten der Störungsfunction erhalten werden, die man in den nachfolgenden Rechnungen braucht.

Ich erwähne noch, dass es dienlich ist, nicht $A^{-\frac{n}{2}}$ selbst, sondern sogleich das Product $\mu A^{-\frac{n}{2}}$ zu berechnen, wenn wie im Art. 39 $\mu$ das in Secunden ausgedrückte Verhältniss der Massen bezeichnet, oder

$$\mu = \frac{m'}{1+m}\, 206265''$$

ist. Man braucht zu dem Ende nur $\alpha_0^{(1)}$ gleich anfänglich mit $\mu$ zu multipliciren, worauf sich dieser Factor von selbst auf alle Coefficienten von $A^{-\frac{n}{2}}$ überträgt.

## 68.

Die im Vorhergehenden vorgetragene Methode ist einer wesentlichen Abänderung fähig, die in manchen Fällen mit Nutzen angewandt werden kann. Setzt man

$$D = \gamma_0 + \tfrac{1}{2}\gamma_2$$

wo $\gamma_0$ und $\gamma_2$ dieselbe Bedeutung haben wie im Art. 52 u. f., und sub-

stituirt für $\gamma_1$ und $\beta_0$ ihre Ausdrücke durch $f$ und $F$, so geht der Ausdruck (103) über in

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = D - f\cos(\varepsilon' - F) + \tfrac{1}{2}\gamma_2 \cos 2\varepsilon'$$

Da nun $\gamma_2$ so klein ist, dass man mit der ersten Potenz davon ausreicht, so bekommt man aus dem vorstehenden Ausdruck mit hinreichender Genauigkeit

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right) = \frac{1}{\{D - f\cos(\varepsilon' - F)\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{1}{4}\gamma_2 \cos 2\varepsilon'}{\{D - f\cos(\varepsilon' - F)\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 = \frac{1}{\{D - f\cos(\varepsilon' - F)\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{3}{4}\gamma_2 \cos 2\varepsilon'}{\{D - f\cos(\varepsilon' - F)\}^{\frac{5}{2}}}$$

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5 = \frac{1}{\{D - f\cos(\varepsilon' - F)\}^{\frac{5}{2}}} - \frac{\frac{5}{4}\gamma_2 \cos 2\varepsilon'}{\{D - f\cos(\varepsilon' - F)\}^{\frac{7}{2}}}$$

Wenn die Störungen zweiter Ordnung in Bezug auf die Massen berechnet werden sollen, so muss man jedenfalls die Entwickelung von

$$\{D - f\cos(\varepsilon' - F)\}^{-\frac{5}{2}}$$

ausser der der Potenzen $-\frac{3}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ dieser Grösse ausführen. Man erhält daher die vollständigen Data, um durch die vorstehenden Ausdrücke die Entwickelung von $\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ und $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ mit aller wünschenswerthen Genauigkeit zu erhalten; ausserdem ist die Multiplication mit $\gamma_2 \cos 2\varepsilon'$ äusserst leicht auszuführen, und kann nur wenig merkliches geben. Um die $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5$ mit derselben Genauigkeit zu erhalten, müsste man freilich auch die Entwickelung der Potenz $-\frac{7}{2}$ der oben angeführten Grösse haben, allein in Betracht dessen, dass man $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5$ mit weniger Genauigkeit zu haben braucht, wie die beiden andern Potenzen von $\left(\frac{a}{\Delta}\right)$, kann man oft in dem Ausdruck dafür das zweite Glied ohne Gefahr merklich zu fehlen weglassen, und setzen

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5 = \frac{1}{\{D - f\cos(\varepsilon' - F)\}^{\frac{5}{2}}}$$

Diese Formeln ersparen die Verwandelung des Ausdrucks (103) in Factoren, und gewähren aus diesem Grunde eine etwas kürzere Rechnung. Wenn man hingegen die Störungen der zweiten Ordnung in Bezug auf die Massen nicht zu berechnen hat, und daher die Potenz $-\frac{5}{2}$ der obigen Grösse nicht ohnehin haben muss, so ist die vorhergehende Methode vorzuziehen, indem die Rechnungen, welche für die Zerlegung von (103)

in Factoren erforderlich sind, geringeren Umfang haben, wie die zur Entwickelung von

$$\{D - f\cos(\varepsilon' - F)\}^{-\frac{1}{2}}$$

erforderlichen. Die Entwickelung der angeführten Potenzen dieser Grösse überhaupt geschieht ohne Veränderung durch die in den vor. Artt. entwickelte Methode, indem man $D$ statt $C$, $f$ statt $q$ und $F$ statt $Q$ schreibt.

69.

Nachdem die im Vorhergehenden erklärten Entwickelungen ausgeführt worden sind, erhält man die bez. Potenzen von $\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ durch Reihen, die gleich wie (136) nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen der excentrischen Anomalien fortschreiten. Bezeichnen wir diese Reihen allgemein mit dem Buchstaben $F$ und die Coefficienten derselben mit $(i,i',c)$ und $(i,i',s)$, wo $i$ und $i'$ ganze Zahlen sind, von welchen $i'$ nie negative Werthe annimmt, so hat man erhalten,

$$F = \Sigma\Sigma(i,i',c)\cos(i\varepsilon - i'\varepsilon') + \Sigma\Sigma(i,i',s)\sin(i\varepsilon - i'\varepsilon') \qquad (137)$$

und um die Ausführung der weiter unten folgenden Integrationen möglichst einfach zu machen, und dabei die Convergenz, die diese Reihen darbieten, nicht zu verringern, muss diese Form zuerst auf die folgende

$$F = \Sigma\Sigma((i,i',c))\cos(i\varepsilon - i'g') + \Sigma\Sigma((i,i',s))\sin(i\varepsilon - i'g') \qquad (138)$$

gebracht werden, in welcher $g'$ die mittlere Anomalie des störenden Planeten bedeutet.

Die Formeln, welche zu dieser Verwandelung dienen, werden am einfachsten, wenn man die imaginären Exponentialfunctionen einführt, sei daher $h$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, und

$$y = h^{\varepsilon\sqrt{-1}}\,;\quad y' = h^{\varepsilon'\sqrt{-1}}\,;\quad z' = h^{g'\sqrt{-1}}$$

Nimmt man nun an, dass in (137) und (138) gleich wie in den Reihen des Art. 66 statt des constanten Gliedes selbst, der zweifache Betrag desselben angesetzt worden ist, so wird aus (137)

$$F = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\{(i,i',c) - \sqrt{-1}.(i,i',s)\}\,y^i y'^{-i'}$$

und aus (138)

$$F = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\{((i,i',c)) - \sqrt{-1}.((i,i',s))\}\,y^{i'} z'^{-i'}$$

wo beide Summen von $-\infty$ bis $+\infty$ ausgedehnt werden müssen, und

$$(-i,-i',c) = (i,i',c)\ ;\quad (-i,-i',s) = -(i,i',s)$$
$$((-i,-i',c)) = ((i,i',c));\quad ((-i,-i',s)) = -((i,i',s))$$

angenommen werden muss. Nennt man nun allgemein $J_l^{(m)}$ die bekannte, übrigens weiter unten näher zu bezeichnende Transcendente, und setzt

$$P_k^{(i)} = \frac{i}{k}\, J_{k\lambda'}^{(k-i)}$$

wo $\lambda'$ die halbe Excentricität des störenden Planeten bedeutet, oder

$$\lambda' = \tfrac{1}{2}e'$$

und $k$ und $i$ ganze Zahlen sind, von welchen jedoch $k$ den Werth Null nicht annehmen darf; setzt man ferner für $k = 0$

$$P_0^{(1)} = P_0^{(-1)} = -\lambda'$$

und für alle Werthe von $i$ die von 1 und $-1$ verschieden sind

$$P_0^{(i)} = 0$$

so ist zufolge der »Entwickelung des Products einer Potenz etc.« betitelten Abhandlung

$$(139) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y'^{i'} = \Sigma\, P_k^{(i')} z'^k$$

wo die Summe sich von $k = -\infty$ bis $k = +\infty$ erstreckt. Substituirt man diesen Ausdruck für $y'^{i'}$ in den obigen ersten Ausdruck für $F$ und vergleicht die so entstehenden Glieder mit denen des zweiten Ausdrucks für $F$, so bekommt man sogleich

$$((i,i',c)) = (i,i',c)\,P_{-i'}^{(-i')} + (i,i'+1,c)\,P_{-i'}^{(-i'-1)} + (i,i'+2,c)\,P_{-i'}^{(-i'-2)} + \text{etc.}$$
$$+ (i,i'-1,c)\,P_{-i'}^{(-i'+1)} + (i,i'-2,c)\,P_{-i'}^{(-i'+2)} + \text{etc.}$$

und eben so

$$((i,i',s)) = (i,i',s)\,P_{-i'}^{(-i')} + (i,i'+1,s)\,P_{-i'}^{(-i'-1)} + (i,i'+2,s)\,P_{-i'}^{(-i'-2)} + \text{etc.}$$
$$+ (i,i'-1,s)\,P_{-i'}^{(-i'+1)} + (i,i'-2,s)\,P_{-i'}^{(-i'+2)} + \text{etc.}$$

die ohne Ausnahme gelten, wenn sie in ihrer strengen Bedeutung genommen werden.

Die Anwendung dieser Ausdrücke geschieht am einfachsten auf die folgende Art. Man schreibe die Logarithmen von $(i,i',c)$ und $(i,i',s)$ abtheilungsweise in Bezug auf $i'$ hin, das heisst zuerst die, in welchen $i' = 1$ in Eine Zeile, dann, indem man für die Logarithmen der Producte

mit den $P$ gehörigen Platz lässt, die, in welchen $i' = 2$, u. s. w. Zu diesen Logarithmen addire man die Logarithmen der $P$ Coefficienten, die man zu diesem Zweck vorher auf den untern Rand eines Streifen Papiers schreiben muss. Wie weit man hiebei gehen muss, lässt sich während dieser Additionen sofort beurtheilen, da man die Grösse der Producte hiefür hinreichend genau aus den Logarithmen derselben sogleich erkennt. Die zu den Logarithmen dieser Producte gehörigen Zahlen werden nun nach Angabe der obigen Formeln unter einander gestellt und addirt.

Es wurde oben angenommen, dass in der Form (137) der Index $i'$ keine negative Werthe bekommen solle, und es soll dieselbe Bedingung in der Form (138) statt finden. Nun kann sich aber sehr wohl ereignen, dass in dem Ausdruck (139) für die kleinsten Werthe von $i'$ (für $i' = 1$ namentlich) Coefficienten merklich werden, die positiven Werthen von $k$ angehören, und also in der Form (138) Glieder mit negativen Werthen von $i'$ hervorbringen, diese müssen nach oder während dieser Rechnung durch Hülfe der Gleichungen

$$((-i, -i', c)) = ((i, i', c)) \,; \quad ((-i, -i', s)) = -((i, i', s))$$

in solche verwandelt werden, in welchen $i'$ positiv ist, und den übrigen derselben Abtheilung hinzugefügt werden.

Die bei dieser Verwandelung entstehenden Glieder, in welchen $i' = 0$ ist, verdienen eine besondere Betrachtung. Zufolge des Vorhergehenden sind $y'$ und $y'^{-1}$ die einzigen Potenzen von $y'$ in deren Ausdrücken (139) ein constantes Glied enthalten ist, also die einzigen, die in (138) Glieder, für welche $i' = 0$ ist, hervorbringen können. Die Coefficienten $((i,0,c))$ und $((i,0,s))$ entstehen daher blos aus den Coefficienten der Glieder $(i,0,c)\,y^i$, $(i,0,s)\,y^i$ und $(i,1,c)\,y^i y'^{-1}$, $(i,1,s)\,y^i y'^{-1}$, neben welchen letzteren aber auch die reciproken Glieder $(i,1,c)\,y^{-i} y'$ und $-(i,1,s)\,y^{-i} y'$ in Betracht gezogen werden müssen. Man findet hiemit leicht, dass

$$\begin{aligned}
((0.0,c)) &= (0.0,c) - 2\lambda'\,(0,1,c) \\
((1,0,c)) &= (1.0,c) - \lambda'\,(1,1,c) - \lambda'\,(-1,1,c) \\
((2,0,c)) &= (2.0,c) - \lambda'\,(2,1,c) - \lambda'\,(-2,1,c) \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$((1,0,s)) = (1,0,s) - \lambda'(1,1,s) + \lambda'(-1,1,s)$$
$$((2,0,s)) = (2,0,s) - \lambda'(2,1,s) + \lambda'(-2,1,s)$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

welche mit den obigen allgemeinen Formeln übereinstimmen.

## 70.

Um keine Lücke zu lassen, muss ich hier noch die Berechnung der $P$ Coefficienten erläutern. Bedenkt man, dass

$$J_l^{(-m)} = (-1)^m J_l^{(m)}$$
$$J_{-l}^{(m)} = (-1)^m J_l^{(m)}$$
$$J_{-l}^{(-m)} = J_l^{(m)}$$

*) ist, so folgen leicht aus dem allgemeinen Ausdruck (139) die folgenden speciellen

$$y'^{-1} = -\lambda' + J_{\lambda'}^{(0)} z'^{-1} + \tfrac{1}{2} J_{2\lambda'}^{(1)} z'^{-2} + \tfrac{1}{3} J_{3\lambda'}^{(2)} z'^{-3} + \tfrac{1}{4} J_{4\lambda'}^{(3)} z'^{-4} + \ldots$$
$$- J_{\lambda'}^{(2)} z' - \tfrac{1}{2} J_{2\lambda'}^{(3)} z'^2 - \tfrac{1}{3} J_{3\lambda'}^{(4)} z'^3 - \ldots$$
$$y'^{-2} = -\tfrac{2}{1} J_{\lambda'}^{(1)} z'^{-1} + \tfrac{2}{2} J_{2\lambda'}^{(0)} z'^{-2} + \tfrac{2}{3} J_{3\lambda'}^{(1)} z'^{-3} + \tfrac{2}{4} J_{4\lambda'}^{(2)} z'^{-4} + \ldots$$
$$- \tfrac{2}{1} J_{\lambda'}^{(3)} z' - \tfrac{2}{2} J_{2\lambda'}^{(4)} z'^2 - \ldots$$
$$y'^{-3} = \tfrac{3}{1} J_{\lambda'}^{(2)} z'^{-1} - \tfrac{3}{2} J_{2\lambda'}^{(1)} z'^{-2} + \tfrac{3}{3} J_{3\lambda'}^{(0)} z'^{-3} + \tfrac{3}{4} J_{4\lambda'}^{(1)} z'^{-4} + \ldots$$
$$- \tfrac{3}{1} J_{\lambda'}^{(4)} z' - \tfrac{3}{2} J_{2\lambda'}^{(5)} z'^2 - \ldots$$
$$y'^{-4} = -\tfrac{4}{1} J_{\lambda'}^{(3)} z'^{-1} + \tfrac{4}{2} J_{2\lambda'}^{(2)} z'^{-2} - \tfrac{4}{3} J_{3\lambda'}^{(1)} z'^{-3} + \tfrac{4}{4} J_{4\lambda'}^{(0)} z'^{-4} + \tfrac{4}{5} J_{5\lambda'}^{(1)} z'^{-5} + \ldots$$
$$- \tfrac{4}{1} J_{\lambda'}^{(5)} z' - \tfrac{4}{2} J_{2\lambda'}^{(6)} z' - \ldots$$

etc.

die fortgesetzt werden können, so weit man will. Aus diesen erkennt man zufolge (139) sogleich die speciellen Werthe der $P$ Coefficienten. Zur Berechnung der $J_l^{(m)}$ Functionen dient vor Allem der Kettenbruch

$$p_m = \cfrac{1}{\cfrac{m}{l} - \cfrac{1}{\cfrac{m+1}{l} - \cfrac{1}{\cfrac{m+2}{l} - \text{etc.}}}}$$

dessen Glieder zur Null convergiren, oder vielmehr die Gleichung, aus

*) Entwickelung des Products einer Potenz etc. § IV.

welcher dieser Kettenbruch entsteht, nemlich

$$p_m = \frac{1}{r_m - p_{m+1}}$$

oder, welches in der Anwendung bequemer ist,

$$\frac{1}{p_m} = r_m - p_{m+1}$$

wo

$$r_m = \frac{m}{l}$$

ist, und in welcher Gleichung man mit einem so grossen Werthe von $m$ anfangen muss, dass man für die erste Anwendung derselben $p_{m+1} = 0$ setzen darf. Der Werth von $m$, welcher dieser Bedingung gnügt, ist in der vorliegenden Aufgabe nur einige wenige Einheiten gross. Hat man hieraus die Reihe der $P_m$ berechnet, so wird

$$J_l^{(m)} = J_l^{(0)} p_1 \, p_2 \cdots p_m$$

und es ist hiefür

$$J_l^{(0)} = 1 - \frac{l^2}{1^2} + \frac{l^4}{1^2.2^2} - \frac{l^6}{1^2.2^2.3^2} \pm \cdots$$

Dem Vorhergehenden zufolge muss hier nach und nach $l = \lambda'$, $= 2\lambda'$, $= 3\lambda'$, $=$ etc. gesetzt werden. Ich führe noch schliesslich den Ausdruck für $J_l^{(m)}$ durch eine stets convergirende Reihe an, für den Fall, dass man sich derselben zur Controle bedienen wolle, nemlich

$$J_l^{(m)} = \frac{l^m}{1.2\ldots m} \left\{ 1 - \frac{l^2}{1.m+1} + \frac{l^4}{1.2\, m+1.m+2} - \frac{l^6}{1.2.3.m+1.m+2.m+3} \pm \text{etc.} \right\}$$

in welcher $m$ und $l$ stets positiv genommen werden müssen, und $m$ immer eine ganze Zahl ist.

71.

Ehe ich weiter gehe, darf ich nicht unterlassen, eine zweite Abänderung anzugeben, die man mit der hier auseinander gesetzten Entwickelungsmethode zuweilen mit Vortheil vornehmen kann.

Die bequeme Anwendung derselben und die Kürze der Rechnung, auf die sie führt, beruht hauptsächlich auf dem Umstand, dass der Coefficient $\gamma_2$ des Ausdrucks (103) und damit auch der Modul $q_1$ eine sehr kleine Grösse ist, und in der Fassung, die ich dieser Methode im Vorhergehenden gegeben habe, tritt dieser Umstand immer ein, da die Excentricitäten aller störenden Planeten, die wir kennen, klein sind. Wenn aber auch die Excentricität des gestörten Planeten klein ist, so kann

man die Methode umkehren, das heisst alle im Vorhergehenden auf den störenden Planeten bezogenen Grössen auf den gestörten und umgekehrt beziehen. Man wird demzufolge den Ausdruck (125) zur ferneren Rechnung, und dagegen den Ausdruck (103) nur zur Controle anwenden; man wird entweder durch die Formeln der Artt. 57 oder 58 den Ausdruck (125) in Factoren zerlegen, oder darauf das Verfahren des Art. 68 anwenden, und übrigens die Entwickelungen so ausführen können, wie im Vorhergehenden angegeben ist.

Wenn man nun keine weitere Abänderung vornehmen wollte, so wäre diese gleichgültig, ja sogar nachtheilig, wenn die Excentricität des gestörten Planeten irgend wie grösser ist, wie die des störenden. Aber nach dieser Abänderung muss man den Umkreis in Bezug auf den störenden Planeten in eine gewisse Anzahl von gleichen Theilen theilen, und da die zu entwickelnden Functionen durch die mittlere Anomalie dieses Planeten ausgedrückt werden müssen, so kann man sogleich diese in gleiche Theile theilen, und vermittelst der Gleichung

$$g' = \varepsilon' - e' \sin \varepsilon'$$

gleich anfänglich die Werthe von $\varepsilon'$ berechnen, die in den Ausdrücken des Art. 60 angewandt werden müssen. Man erhält dadurch sofort die Form (138), und ist der in den beiden vor. Artt. erklärten Verwandelung der Form (137) in die Form (138) überhoben. Ich erwähne indess ausdrücklich, dass diese Abänderung nicht zweckmässig ist, wenn die Excentricität des gestörten Planeten $e$ einiger Maassen grösser ist wie das Product $\alpha e'$.

## 72.

Wenn man die Functionen

$$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right);\ \mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3;\ \mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5$$

auf die Form (138) gebracht hat, dann müssen die Multiplicationen vorgenommen werden, die die im Art. 39 aufgestellten Ausdrücke der Differentialquotienten von $\Omega$ erfordern Es muss also zuerst die Entwickelung der dazu nöthigen Factoren vorgenommen werden, und hiefür ist sogleich

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = (1 + \tfrac{1}{2}e^2) - 2e\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}e^2\cos 2\varepsilon$$

Für die Entwickelung von $\left(\frac{r'}{a'}\right)^2$ in eine nach den Cosinussen der Viel-

fachen der mittleren Anomalie $g'$ fortschreitende Reihe bemerke ich, dass

$$\frac{d.r'^2}{a'^2\,dg'} = 2e'\,\frac{r'\sin f'}{a'\cos\varphi'} = 2e'\sin\varepsilon'$$

ist, die Reihen

$$\begin{aligned} y' = -\lambda' &+ J^{(0)}_{\lambda'}\,z' + \tfrac{1}{2}J^{(0)}_{2\lambda'}\,z'^2 + \tfrac{1}{3}J^{(2)}_{3\lambda'}\,z'^3 + \ldots \\ &- J^{(2)}_{\lambda'}\,z'^{-1} - \tfrac{1}{2}J^{(3)}_{2\lambda'}\,z'^{-2} - \tfrac{1}{3}J^{(4)}_{3\lambda'}\,z'^{-3} - \ldots \\ y'^{-1} = -\lambda' &+ J^{(0)}_{\lambda'}\,z'^{-1} + \tfrac{1}{2}J^{(1)}_{2\lambda'}\,z'^{-2} + \tfrac{1}{3}J^{(2)}_{3\lambda'}\,z'^{-3} + \ldots \\ &- J^{(2)}_{\lambda'}\,z' - \tfrac{1}{2}J^{(3)}_{2\lambda'}\,z'^2 - \tfrac{1}{3}J^{(4)}_{3\lambda'}\,z'^3 - \ldots \end{aligned}$$

geben aber durch die Subtraction und den Übergang zum Reellen

$$\sin\varepsilon' = \left\{J^{(0)}_{\lambda'} + J^{(2)}_{\lambda'}\right\}\sin g' + \tfrac{1}{2}\left\{J^{(1)}_{2\lambda'} + J^{(3)}_{2\lambda'}\right\}\sin 2g' + \tfrac{1}{3}\left\{J^{(2)}_{3\lambda'} + J^{(4)}_{3\lambda'}\right\}\sin 3g' + \ldots$$

wo die $J$ Functionen dieselben sind, die bei der im Art. 69 erklärten Verwandelung gebraucht wurden. Hiemit ergiebt sich sogleich

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 = c - \frac{2e'}{1}\left\{J^{(0)}_{\lambda'} + J^{(2)}_{\lambda'}\right\}\cos g' - \frac{2e'}{4}\left\{J^{(1)}_{2\lambda'} + J^{(3)}_{2\lambda'}\right\}\cos 2g' - \frac{2e'}{9}\left\{J^{(2)}_{3\lambda'} + J^{(4)}_{3\lambda'}\right\}\cos 3g' - \ldots$$

wo $c$ die der Integration hinzugefügte willkührliche Constante ist, die durch folgende Betrachtungen bestimmt werden kann. Da in den Ausdrücken für $y'^2$ und $y'^{-2}$ durch $z'$ zufolge des Art. 69 kein constantes Glied enthalten ist, so enthält auch der Ausdruck von $\cos 2\varepsilon'$ durch $\cos ig'$ kein constantes Glied, die vorstehenden Ausdrücke von $y'$ und $y'^{-1}$ zeigen aber, dass $-\lambda'$ oder $-\frac{1}{2}e'$ das constante Glied in dem Ausdruck für $\cos\varepsilon'$ ist. Hiemit giebt die Gleichung

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 = 1 + \tfrac{1}{2}e'^2 - 2e'\cos\varepsilon' + \tfrac{1}{2}e'^2\cos 2\varepsilon'$$

wenn man blos auf die constanten Glieder Rücksicht nimmt,

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 = 1 + \tfrac{3}{2}e'^2$$

wodurch die Constante $c$ bestimmt ist. Durch Hülfe der bekannten Relation

$$J^{(i+1)}_{\lambda} + J^{(i-1)}_{\lambda} = \frac{i}{\lambda}\,J^{(i)}_{\lambda}$$

vereinfacht sich der obige Ausdruck und geht in folgenden über

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 = 1 + \tfrac{3}{2}e'^2 - \tfrac{4}{1}J^{(1)}_{\lambda'}\cos g' - \tfrac{4}{4}J^{(2)}_{2\lambda'}\cos 2g' - \tfrac{4}{9}J^{(3)}_{3\lambda'}\cos 3g' \ldots$$

Wenn es sich nun nur um die Berechnung der Störungen der ersten Ordnung in Bezug auf die Massen handelt, so kann man, um $r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ zu erhalten, $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ sogleich mit

$$\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2=\alpha^2(1+\tfrac{3}{2}e'^2)-(1+\tfrac{1}{2}e^2)+2e\cos\varepsilon-\tfrac{1}{2}e^2\cos 2\varepsilon$$
$$-\tfrac{1}{1}\alpha^2 J^{(1)}_{\lambda'}\cos g'-\tfrac{1}{4}\alpha^2 J^{(2)}_{2\lambda'}\cos 2g'-\text{etc.}$$

multipliciren, will man aber auch die Störungen der zweiten Ordnung in Bezug auf die Massen berechnen, so muss man mit $\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2$ und $\left(\frac{r}{a}\right)^2$ einzeln multipliciren, und also die bezüglichen Glieder des vorstehenden Ausdrucks getrennt anwenden, da für den Ausdruck von $r^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right)$ das Product $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2$ gebraucht wird.

Der obige Ausdruck für $\sin\varepsilon'$ giebt ferner

$$\frac{r'\sin f'}{a'\cos\varphi'}=\left\{J^{(0)}_{\lambda'}+J^{(2)}_{\lambda'}\right\}\sin g'+\tfrac{1}{2}\left\{J^{(1)}_{2\lambda'}+J^{(3)}_{2\lambda'}\right\}\sin 2g'+\tfrac{1}{3}\left\{J^{(2)}_{3\lambda'}+J^{(4)}_{3\lambda'}\right\}\sin 3g'+\ldots$$

und durch Addition und Übergang zum Reellen geben die Reihen für $y'$ und $y'^{-1}$ den Ausdruck für $\cos\varepsilon'$, woraus in Verbindung mit $\frac{r'}{a'}\cos f'$ $=\cos\varepsilon'-e'$ der folgende hervorgeht

$$\frac{r'}{a'}\cos f'=-\tfrac{3}{2}e'+\left\{J^{(0)}_{\lambda'}-J^{(2)}_{\lambda'}\right\}\cos g'+\tfrac{1}{2}\left\{J^{(1)}_{2\lambda'}-J^{(3)}_{2\lambda'}\right\}\cos 2g'+\tfrac{1}{3}\left\{J^{(2)}_{3\lambda'}-J^{(4)}_{3\lambda'}\right\}\cos 3g'+\ldots$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$c_1=\alpha\sin J\cos\varphi'\cos\Pi'\,;\quad c_2=\alpha\sin J\sin\Pi'$$

so wird

$$\begin{aligned}\alpha\sin J\left(\frac{r}{a'}\right)\sin(f'+\Pi')= &\left\{J^{(0)}_{\lambda'}+J^{(2)}_{\lambda'}\right\}c_1\sin g'+\tfrac{1}{2}\left\{J^{(1)}_{2\lambda'}+J^{(3)}_{2\lambda'}\right\}c_1\sin 2g'\\ &+\tfrac{1}{3}\left\{J^{(2)}_{3\lambda'}+J^{(4)}_{3\lambda'}\right\}c_1\sin 3g'+\ldots\\ -\tfrac{3}{2}e'c_2+&\left\{J^{(0)}_{\lambda'}-J^{(2)}_{\lambda'}\right\}c_2\cos g'+\tfrac{1}{2}\left\{J^{(1)}_{2\lambda'}-J^{(3)}_{2\lambda'}\right\}c_2\cos 2g'\\ &+\tfrac{1}{3}\left\{J^{(2)}_{3\lambda'}-J^{(4)}_{3\lambda'}\right\}c_2\cos 3g'+\ldots\end{aligned}$$

der Factor, mit welchem $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ in dem Ausdruck für $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ multiplicirt werden muss. Fügt man diesen den Factor

$$\begin{aligned}\alpha\sin J\left(\frac{r}{a}\right)\sin(f+\Pi)= &\quad c_3\sin\varepsilon\\ -ec_4 &+c_4\cos\varepsilon\end{aligned}$$

wo

$$c_3=\alpha\sin J\cos\varphi\cos\Pi\,;\quad c_4=\alpha\sin J\sin\Pi$$

ist, hinzu, so sind überhaupt alle Factoren, die hier gebraucht werden, gegeben. Für die Differentialquotienten zweiter Ordnung von $\Omega$, die für die Berechnung der Störungen der zweiten Ordnung in Bezug auf die Massen nach Art. 39 gebraucht werden, braucht man von diesen Facto-

ren die folgenden Quadrate und Producte

$$\left\{a^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}\cdot\left\{a^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}$$
$$\left\{a^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}\,.\;\alpha\sin J\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+\Pi')$$
$$\alpha\sin J\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+\Pi')\,.\;\alpha\sin J\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+\Pi')$$
$$\left\{a^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}\,.\;\alpha\sin J\left(\frac{r}{a}\right)\sin(f+\Pi)$$
$$\alpha\sin J\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+\Pi')\,.\;\alpha\sin J\left(\frac{r}{a}\right)\sin(f+\Pi)$$

die man auch analytisch entwickeln könnte, so wie bei den Factoren selbst eben geschehen ist, allein es ist kürzer, dieselben durch mechanische Multiplication zu berechnen, nachdem die numerischen Werthe der Coefficienten der Factoren, aus welchen sie bestehen, durch die vorstehenden Formeln berechnet worden sind.

Die Producte dieser Factoren mit $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ und $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5$ werden wieder am einfachsten und sichersten durch die mechanische Multiplication erhalten.

## 73.

Für die Erlangung der Entwickelungen der bez. Differentialquotienten von $\Omega$ sind noch die Glieder zu betrachten, die von $\Delta$ unabhängig sind. Die Entwickelung dieser ist einfach. Wir haben zuerst

$$(H)=\frac{\mu}{a^3}\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)H$$

wo

$$H=\cos(f+\Pi)\cos(f'+\Pi')+\cos J\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')$$

ist. Führen wir hier dieselben Constanten $k$, $K$, $k_1$ und $K_1$ ein, die durch die Gleichungen (102) gegeben sind, und setzen ausserdem

$$h=\frac{\mu}{a^3}\,k\cos(\Pi-K)\qquad;\; h'=\frac{\mu}{a^3}\cos\varphi\cos\varphi'\,k_1\cos(\Pi-K_1)$$
$$l=\frac{\mu}{a^3}\cos\varphi\;k\sin(\Pi-K)\,;\; l'=\frac{\mu}{a^3}\cos\varphi'\;k_1\sin(\Pi-K_1)$$

so wird, wenn man auch die excentrische Anomalie $\varepsilon$ einführt,

$$(H)=h\cos\varepsilon\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\cos f'-eh\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\cos f'-l\sin\varepsilon\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\cos f'$$
$$+\,l'\cos\varepsilon\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\frac{\sin f'}{\cos\varphi'}-el'\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\frac{\sin f'}{\cos\varphi'}+h'\sin\varepsilon\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\frac{\sin f'}{\cos\varphi'}$$

Setzt man nun

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \cos f' = \gamma_1 \cos g' + \gamma_2 \cos 2g' + \gamma_3 \cos 3g' + \ldots$$
$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \frac{\sin f'}{\cos \varphi'} = \delta_1 \sin g' + \delta_2 \sin 2g' + \delta_3 \sin 3g' + \ldots$$

so wird sogleich

$$\begin{aligned}
(H) = {} & \tfrac{1}{2}(h\gamma_1 - h'\delta_1)\cos(-\varepsilon - g') + \tfrac{1}{2}(l\gamma_1 - l'\delta_1)\sin(-\varepsilon - g') \\
& - eh\gamma_1 \cos(-g') \qquad\qquad + el'\delta_1 \sin(-g') \\
& + \tfrac{1}{2}(h\gamma_1 + h'\delta_1)\cos(\varepsilon - g') \quad - \tfrac{1}{2}(l\gamma_1 + l'\delta_1)\sin(\varepsilon - g') \\
& + \tfrac{1}{2}(h\gamma_2 - h'\delta_2)\cos(-\varepsilon - 2g') + \tfrac{1}{2}(l\gamma_2 - l'\delta_2)\sin(-\varepsilon - 2g') \\
& - eh\gamma_2 \cos(-2g') \qquad\qquad + el'\delta_2 \sin(-2g') \\
& + \tfrac{1}{2}(h\gamma_2 + h'\delta_2)\cos(\varepsilon - 2g') \quad - \tfrac{1}{2}(l\gamma_2 + l'\delta_2)\sin(\varepsilon - 2g') \\
& + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Es ist ferner

$$(J) = \frac{\mu}{a^3} \sin J \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \sin(f' + \Pi')$$

Setzt man daher

$$b = -\frac{\mu}{a^3} \cos\varphi' \sin J \cos \Pi' \,;\; b' = \frac{\mu}{a^3} \sin J \sin \Pi'$$

so wird sogleich

$$\begin{aligned}
(J) = {} & b\delta_1 \sin(-g') + b'\gamma_1 \cos(-g') \\
& + b\delta_2 \sin(-2g') + b'\gamma_2 \cos(-2g') \\
& + b\delta_3 \sin(-3g') + b'\gamma_3 \cos(-3g') \\
& + \text{etc.} \qquad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

für welche nur noch die Ausdrücke der $\gamma$ und $\delta$ zu ermitteln sind Aber aus den Gleichungen für die elliptische Bewegung

$$0 = \frac{d^2 x'}{dt^2} + \frac{x'}{r'^3} k^2 (1 + m') \,;\; 0 = \frac{d^2 y'}{dt^2} + \frac{y'}{r'^3} k^2 (1 + m')$$

folgt sogleich, dass

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \cos f' = -\frac{d^2 . r' \cos f'}{a' dg'^2} = -\frac{d^2 . \cos\varepsilon'}{dg'^2}$$
$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \frac{\sin f'}{\cos\varphi'} = -\frac{d^2 . r' \sin f'}{a' \cos\varphi' dg'^2} = -\frac{d^2 . \sin\varepsilon'}{dg'^2}$$

und vermittelst der oben schon abgeleiteten Ausdrücke von $\cos\varepsilon'$ und $\sin\varepsilon'$ durch $\cos ig'$ und $\sin ig'$ erhält man hiemit sogleich

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= J^{(0)}_{\lambda'} - J^{(2)}_{\lambda'} \,, & \delta_1 &= J^{(0)}_{\lambda'} + J^{(2)}_{\lambda'} \\
\gamma_2 &= 2\left\{J^{(1)}_{2\lambda'} - J^{(3)}_{2\lambda'}\right\} \,, & \delta_2 &= 2\left\{J^{(1)}_{2\lambda'} + J^{(3)}_{2\lambda'}\right\} \\
\gamma_3 &= 3\left\{J^{(2)}_{3\lambda'} - J^{(4)}_{3\lambda'}\right\} \,, & \delta_3 &= 3\left\{J^{(2)}_{3\lambda'} + J^{(4)}_{3\lambda'}\right\} \\
& \text{etc.} & & \text{etc.}
\end{aligned}$$

Die beiden Functionen $(H)$ und $(J)$ werden für die Störungen erster Ordnung in Bezug auf die Massen gebraucht, und ausserdem werden für die Störungen zweiter Ordnung noch die auch im Art. 39 bezeichneten Functionen $(J)'$ und $(J)''$ gebraucht, die von $\left(\frac{a'}{r'}\right)^3$ abhängen. Die Entwickelung dieser Function nach $\cos ig'$ kann nicht durch endliche Ausdrücke der $J$ Functionen erlangt werden, sondern hängt von den Coefficienten der Mittelpunktsgleichung, oder von anderen Transcendenten ab. Die wenigen Glieder, die hier von dieser Entwickelung gebraucht werden, können aber mit hinreichender Genauigkeit nach den Potenzen von $e'$ geordnet angewandt werden, und man findet leicht

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 = \eta_0 + 2\eta_1 \cos g' + 2\eta_2 \cos 2g' + 2\eta_3 \cos 3g' + 2\eta_4 \cos 4g' + \ldots$$

wo

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= \frac{1}{\cos^3 \varphi'}\\
\eta_1 &= \frac{3}{2}\,e' + \frac{27}{16}\,e'^3 + \ldots\\
\eta_2 &= \frac{9}{4}\,e'^2 + \frac{7}{4}\,e'^4 + \ldots\\
\eta_3 &= \frac{53}{16}\,e'^3 + \ldots\\
\eta_4 &= \frac{231}{48}\,e'^4 + \ldots\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

die mehr wie hinreichend sind. Setzt man nun

$$\begin{aligned}
l &= \frac{\mu}{a^3}\cos\varphi \sin J \cos H\,; & l_1 &= \frac{\mu}{a^3}\sin J \sin H\,;\\
l_2 &= -\,2el_1 & ;\; l_3 &= 2\,\frac{\mu}{a^3}\cos J
\end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned}
(J)' = & & & l_2\,\eta_0\\
&+ l\eta_0 \sin\varepsilon & &+ l_1\,\eta_0 \cos\varepsilon\\
&- l\eta_1 \sin(-\varepsilon-g') & &+ l_1\,\eta_1 \cos(-\varepsilon-g')\\
& & &+ l_2\,\eta_1 \cos(-g')\\
&+ l\eta_1 \sin(\varepsilon-g') & &+ l_1\,\eta_1 \cos(\varepsilon-g')\\
&- l\eta_2 \sin(-\varepsilon-2g') & &+ l_1\,\eta_2 \cos(-\varepsilon-2g')\\
& & &+ l_2\,\eta_2 \cos(-2g')\\
&+ l\eta_2 \sin(\varepsilon-2g') & &+ l_1\,\eta_2 \cos(\varepsilon-2g')\\
&+ \text{etc.} & &+ \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(J)'' = & \; l_3 \eta_0 \\ & + l_3 \eta_1 \cos(-g') \\ & + l_3 \eta_2 \cos(-2g') \\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

wo wieder statt der constanten Glieder selbst das Doppelte derselben angesetzt worden ist. Hiemit sind diese Entwickelungen ausgeführt.

## 74.

Hiemit ist die Entwickelung der Störungsfunction und ihrer Differentialquotienten auf die Form (138) hingebracht, und man könnte diese Form schliesslich beibehalten, denn in den »Schriften der Sternwarte Seeberg etc.« habe ich gezeigt, wie man die auf diese Form gebrachten Differentialgleichungen integriren kann. Später habe ich jedoch eine verwandte Form gefunden, deren Behandlung noch etwas einfacher ist, und deren Anwendung die durch die Form (138) gewährte bedeutende Convergenz eher noch vergrössert wie vermindert. Diese ist die folgende:

$$(140) \quad \ldots \quad \begin{aligned} F = & \; \Sigma\Sigma' \, [i,i',c] \cos\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c'-\mu c)\} \\ & + \Sigma\Sigma' \, [i,i',s] \sin\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c'-\mu c)\} \end{aligned}$$

wo $[i,i',c]$ und $[i,i',s]$ die Coefficienten, $\mu$ das Verhältniss der mittleren Bewegungen, $c$ die mittlere Anomalie des gestörten, und $c'$ die des störenden Planeten für den Zeitpunkt $t = 0$ bedeuten. Es ist daher am dienlichsten, die Störungsfunction und ihre Differentialquotienten von der Form (138) auf die Form (140) hinzuführen. Diese Verwandelung lässt sich leicht auf die folgende Art bewerkstelligen. Nennt man überhaupt $g$ die mittlere Anomalie des gestörten Planeten, so ist

$$g = nt + c = \varepsilon - e \sin \varepsilon$$

Setzt man daher

$$\mu = \frac{n'}{n}$$

wo $n$ und $n'$ die beiden mittleren Bewegungen sind, so folgt hieraus leicht für die mittlere Anomalie des störenden Planeten der folgende Ausdruck

$$g' = n't + c' = c' - \mu c + \mu\varepsilon - \mu e \sin \varepsilon$$

und wenn man zu den imaginären Exponentialfunctionen übergeht, und

$$y = h^{\epsilon\sqrt{-1}}\,;\ \pi = h^{(c'-\mu c)\sqrt{-1}}\,;\ z' = h^{g'\sqrt{-1}}\,;\ \lambda = \tfrac{1}{2}\mu e$$

setzt, wo wieder $h$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bedeutet

$$z'^{-i'} = \pi^{-i'}\, y^{-i'\mu}\, h^{2i'\lambda\sin\epsilon\sqrt{-1}} \quad \ldots\ldots\ldots (141)$$

Es ist aber $2\sqrt{-1}.\sin\epsilon = y - \frac{1}{y}$, und wie ich früher gezeigt habe

$$h^{i'\lambda\left(y-\frac{1}{y}\right)} = J^{(0)}_{i'\lambda} + J^{(1)}_{i'\lambda}\, y + J^{(2)}_{i'\lambda}\, y^2 + \ldots$$
$$- J^{(1)}_{i'\lambda}\frac{1}{y} + J^{(2)}_{i'\lambda}\frac{1}{y^2} \mp \ldots$$

und es wird daher

$$z'^{-i'} = \pi^{-i'} J^{(0)}_{i'\lambda}\, y^{-i'\mu} + \pi^{-i'} J^{(1)}_{i'\lambda}\, y^{1-i'\mu} + \pi^{-i'} J^{(2)}_{i'\lambda}\, y^{2-i'\mu} + \ldots$$
$$- \pi^{-i'} J^{(1)}_{i'\lambda}\, y^{-1-i'\mu} + \pi^{-i'} J^{(2)}_{i'\lambda}\, y^{-2-i'\mu} \mp \ldots$$

Die Einführung der imaginären Exponentialfunctionen in (138) und (140) giebt

$$F = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma'\{((i,i',c)) - \sqrt{-1}.((i,i',s))\}\, y^{i} z'^{-i'}$$
$$F = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma'\{[i,i',c] - \sqrt{-1}.[i,i',s]\}\, \pi^{-i'} y^{i-i'\mu}$$

Substituirt man hierin den vorstehenden Ausdruck für $z'^{-i'}$ und vergleicht die einzelnen Glieder, so ergiebt sich sogleich

$$[i,i',c] = ((i,i',c))\, J^{(0)}_{i'\lambda} + ((i-1,i',c))\, J^{(1)}_{i'\lambda} + ((i-2,i',c))\, J^{(2)}_{i'\lambda} + \ldots$$
$$- ((i+1,i',s))\, J^{(1)}_{i'\lambda} + ((i+2,i',s))\, J^{(2)}_{i'\lambda} \mp \ldots$$

und eben so

$$[i,i',s] = ((i,i',s))\, J^{(0)}_{i'\lambda} + ((i-1,i',s))\, J^{(1)}_{i'\lambda} + ((i-2,i',s))\, J^{(2)}_{i'\lambda} + \ldots$$
$$- ((i+1,i',s))\, J^{(1)}_{i'\lambda} + ((i+2,i',s))\, J^{(2)}_{i'\lambda} \mp \ldots$$

Man erkennt leicht, dass die Glieder, in welchen $i' = 0$ ist, von dieser Verwandelung unberührt bleiben müssen. Die Rechnung nach den vorstehenden Formeln wird auf ähnliche Weise ausgeführt, wie die im Art. 69 erklärte.

## 75.

Im § 5 hat man gesehen, dass partielle Differentiationen der Störungsfunction und einiger ihrer Differentialquotienten erforderlich sind, die so genommen werden müssen, dass $\epsilon$ veränderlich, hingegen $g'$ unveränderlich sei. Nachdem die Form (140) hergestellt worden ist, kann

man diese Differentiationen nicht unmittelbar dadurch, dass man geradezu $\varepsilon$ veränderlich setzt, ausführen, indem $g'$ mit in $(i - i'\mu)\,\varepsilon$ enthalten ist. Es ist aber demungeachtet leicht, das verlangte Differential zu erhalten. Nehmen wir die durch die imaginären Exponentialfunctionen ausgedrückten Formen (138) und (140) vor, nemlich

$$F = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma'\{((i,i',c)) - \sqrt{-1}\,.\,((i,i',s))\}\,y^{i} z'^{-i'}$$

$$F = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma'\{[i,i',c] - \sqrt{-1}\,.\,[i,i',s]\}\,\pi^{-i'} y^{i-i'\mu}$$

Da $d\varepsilon = \frac{dy}{y\sqrt{-1}}$ ist, so wird

$$\left(\frac{dF}{d\varepsilon}\right) = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma'\{((i,i',c)) - \sqrt{-1}\,.\,((i,i',s))\}\,iy^{i} z'^{-i'}\sqrt{-1}$$

die zu ermittelnde, und durch die Coefficienten $[i,i',c]$ und $[i,i',s]$ auszudrückende Function. Die beiden vorstehenden Ausdrücke für $F$ geben die folgende Gleichung

$$\Sigma'\{((i,i',c)) - \sqrt{-1}\,((i,i',s))\}\,y^{i} z'^{-i'} = \Sigma'\{[i,i',c] - \sqrt{-1}\,.\,[i,i',s]\}\,\pi^{-i'} y^{i-i'\mu}$$

wo die Summation in Bezug auf $i$ nur wesentlich in Betracht kommt, da bei der Verwandelung der einen Form in die andere $i'$ unberührt bleibt. Das vollständige Differential dieser Gleichung ist

$$\Sigma'\{((i,i',c)) - \sqrt{-1}\,.\,((i,i',s))\}\left\{i\frac{dy}{y} - i'\frac{dz'}{z'}\right\} y^{i} z'^{-i'}$$
$$= \Sigma'\{[i,i',c] - \sqrt{-1}\,.\,[i,i',s]\}\,\pi^{-i'}(i-i'\mu)\,y^{i-i'\mu}\frac{dy}{y}$$

woraus man

$$\begin{aligned}\Sigma'\{((i,i',c)) - \sqrt{-1}\,.\,((i,i',s))\}\,iy^{i} z'^{-i'} &= \Sigma'\{[i,i',c] - \sqrt{-1}\,.\,[i,i',s]\}\,\pi^{-i'}(i-i'\mu)\,y^{i-i'\mu} \\ &+ \Sigma'\{((i,i',c)) - \sqrt{-1}\,.\,((i,i',s))\}\,i'y^{i} z'^{-i'}\frac{ydz'}{z'dy} \\ &= \Sigma'\{[i,i',c] - \sqrt{-1}\,.\,[i,i',s]\}\,\pi^{-i'}(i-i'\mu)\,y^{i-i\mu} \\ &+ \Sigma'\{[i,i',c] - \sqrt{-1}\,.\,[i,i',s]\}\,i'\pi^{-i'} y^{i-i'\mu}\frac{ydz'}{z'dy}\end{aligned}$$

erhält, deren linke Seite der verlangten Function proportional ist. Die Gleichung (141) giebt nun

$$z' = \pi y^{\mu} h^{-\lambda\left(y-\frac{1}{y}\right)}$$

woraus durch die Differentiation

$$\begin{aligned}\frac{dz'}{dy} &= \mu\pi y^{\mu-1} h^{-\lambda\left(y-\frac{1}{y}\right)} - \lambda\left(1+\frac{1}{y^2}\right)\pi y^{\mu} h^{-\lambda\left(y-\frac{1}{y}\right)} \\ &= \left\{\mu - \lambda\left(y+\frac{1}{y}\right)\right\}\frac{z'}{y}\end{aligned}$$

folgt, und die Substitution dieses Ausdrucks für $\frac{dz'}{dy}$ in die vorstehende Gleichung giebt

$$\Sigma\{((i,i',c)) - \sqrt{-1}.((i,i',s))\} i y^i z'^{-i'} = \Sigma\{[i,i',c] - \sqrt{-1}.[i,i',s]\}\left\{i - i'\lambda\left(y + \frac{1}{y}\right)\right\}\pi^{-i'} y^{i-i'\mu}$$
$$= \Sigma\{i[i,i',c] - i'\lambda[i+1,i',c] - i'\lambda[i-1,i',c]\}\pi^{-i'} y^{i-i'\mu}$$
$$- \sqrt{-1}.\Sigma\{i[i,i',s] - i'\lambda[i+1,i',s] - i'\lambda[i-1,i',s]\}\pi^{-i'} y^{i-i'\mu}$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Geht man zum Reellen zurück, so ergiebt sich hieraus folgender Satz:

»Wenn irgend eine Function von der Form

$$F = \Sigma\Sigma\,[i,i',c]\cos\{(i - i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c' - c\mu)\}$$
$$+ \Sigma\Sigma\,[i,i',s]\,\sin\{(i - i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c' - c\mu)\}$$

gegeben ist, die durch die Verwandelung der Form

$$F = \Sigma\Sigma((i,i',c))\cos(i\varepsilon - i'g') + \Sigma\Sigma((i,i',s))\sin(i\varepsilon - i'g')$$

entstanden ist, wo $\varepsilon$ die excentrische Anomalie irgend eines, und $g'$ die mittlere Anomalie irgend eines andern Planeten bedeuten, so bekommt man den partiellen Differentialquotienten der letztgenannten Form nach $\varepsilon$, das ist in der gewöhnlichen Beziehung $\left(\frac{dF}{d\varepsilon}\right)$, durch folgenden Ausdruck in der erstgenannten, gegebenen Form

$$\left(\frac{dF}{d\varepsilon}\right) = -\Sigma\Sigma\{i[i,i',c] - i'\lambda[i+1,i',c] - i'\lambda[i-1,i',c]\}\sin\{(i - i'\mu)\varepsilon - i'(c' - c\mu)\}$$
$$+ \Sigma\Sigma\{i[i,i',s] - i'\lambda[i+1,i',s] - i'\lambda[i-1,i',s]\}\cos\{(i - i'\mu)\varepsilon - i'(c' - c\mu)\}$$

welcher der numerischen Rechnung leicht unterworfen werden kann.«

## 76.

Es zeigt sich ferner aus dem § 5, dass man auch den partiellen Differentialquotienten einiger Differentialquotienten der Störungsfunction nach $g'$ nehmen muss, und diese erhält man unmittelbar durch Differentiation der Form (140) nach $c'$, weil $c'$ statt $g'$ eingetreten ist, und hier keine Vermischung mit anderen Grössen statt gefunden hat. Es ist daher nicht nur

$$\left(\frac{dF}{dg'}\right) = \Sigma\Sigma i'\,((i,i'c))\sin(i\varepsilon - i'g') - \Sigma\Sigma i'\,((i,i',s))\cos(i\varepsilon - i'g')$$

sondern auch

$$\left(\frac{dF}{dg'}\right) = \Sigma\Sigma i'\,[i,i',c]\,\sin\{(i - i'\mu)\varepsilon - i'\,(c' - c\mu)\}$$
$$- \Sigma\Sigma i'\,[i,i',s]\cos\{(i - i'\mu)\varepsilon - i'\,(c' - c\mu)\}$$

und wird also durch die allgemeinen Regeln der Differentiation erhalten.

## § 7. Anwendung der im Vorhergehenden erklärten Reihenentwickelungen auf die vom Jupiter bewirkten Störungen der Egeria.

77.

Ehe ich in den theoretischen Entwickelungen weiter gehe, werde ich die im Vorhergehenden erklärten Entwickelungen auf die Egeria, in soweit die Störungen dieses Planeten vom Jupiter herrühren, anwenden, und mehrere Einzelnheiten dieser Rechnung anführen. Die folgenden, osculirenden Elemente der Egeria, die dieser Rechnung zu Grunde gelegt worden sind, habe ich aus Gould's *»The astronomical Journal«* Nr. 35 entnommen.

Mittlere Anomalie $c = 19^\circ 31' 43''.6$ für 1851, Dec. 5,0 m. Z. Greenwich
Länge des Perihels $\pi = 119\ 12\ 12.4$ } m. Äquinox von 1851,0
Knotenlänge $\theta = 43\ 17\ 9.1$ }
Excentricitätswinkel $\varphi = 4\ 52\ 7.4$
Neigung g. d. Ecliptik $i = 16\ 33\ 6.7$
M. tägl. sid. Bewegung $n = 858''.3861$

woraus

die halbe gr. Achse $a = \text{num}(\log = 0.4108826)$

Ich habe freilich keinen Grund dafür finden können, dass diesen Elementen das grösstmögliche Gewicht zukäme, allein für die hinreichend genaue Berechnung der Störungen brauchen die angewandten Elemente nicht die möglichst richtigen zu sein, da die Fehler der Elemente um Vieles verkleinert in die Störungen übergehen; übrigens werde ich in der Fortsetzung dieser Abhandlung Formeln entwickeln, wodurch man den Einfluss allzu grosser Fehler in den angewandten Elementen berücksichtigen kann. Die Jupiterelemente für die oben angegebene Zeit und das angeführte Äquinox haben mir Bouvard's Tafeln wie folgt gegeben.

$$\pi' = 11^\circ\ 55'\ 56''$$
$$\theta' = 98\ 54\ 40$$
$$e' = 0.0482417,\quad \varphi' = 2^\circ\ 45'\ 54''.43$$
$$i' = 1^\circ\ 18'\ 40''.0$$
$$n' = 299''.1286$$
$$\log a' = 0.7162344$$

und ausserdem habe ich

$$m' = \frac{1}{1053,92}$$

angenommen.

Ich bemerke hiebei, dass es keineswegs nothwendig ist, dass diese beiden Systeme von Elementen für einen und denselben Zeitpunkt gelten. Sie dürfen vielmehr zwei Zeitpunkten angehören, die eine Reihe von zehn und mehr Jahren von einander entfernt sind, nur muss man dafür Sorge tragen, dass die bez. Elemente auf dasselbe Äquinox und auf dieselbe Ecliptik oder denselben Äquator reducirt werden. Entweder hat die Ungleichzeitigkeit der beiden Systeme von Elementen keinen merklichen Einfluss auf die Störungen, oder man kann denselben auf sehr einfache Weise bei der Berechnung der Störungen der zweiten Ordnung in Bezug auf die Massen berücksichtigen.

78.

Als erste Vorbereitung zu der Berechnung der Störungen eines Planeten pflege ich immer die Werthe der Divisoren zu berechnen, die die Formeln bei der Integration derselben erhalten, da diese Divisoren einen grossen Einfluss auf die Grösse der Störungscoefficienten haben, und man durch ihre Kenntniss in den Stand gesetzt wird, die Abtheilungen im Voraus anzugeben, in welchen die grössten Störungscoefficienten erwartet werden dürfen. Die Fortsetzung dieser Abhandlung wird zeigen, dass vermöge der Form (140), die den Entwickelungen gegeben worden ist, bei den Integrationen die Grösse $i - i'\mu$ und das Quadrat davon als Divisoren eintreten, wenn wie oben $\mu = \frac{n'}{n}$ ist. Diese Form der Divisoren ist nicht nur für die Rechnung die einfachste, sondern sie hat auch vor der sonst gebrauchten Form $in - i'n'$ den Vorzug, dass man aus der blosen Berechnung der Vielfachen $i'\mu$ von $\mu$ sogleich die kleinsten Divisoren erkennen kann, denn da $i$ eine ganze Zahl ist, so muss stets ein kleiner Divisor eintreten, wenn $i'\mu$ nahe einer ganzen Zahl gleich ist. Die völlige Gleichheit von $i'\mu$ mit einer ganzen Zahl würde eine Commensurabilität der Bewegungen des gestörten und des störenden Planeten anzeigen, und in manchen Fällen — nicht immer — eine andere Behandlung des Problems der drei Körper erfordern. Diesen Fall schliesse ich hier noch aus. Die obigen numerischen Werthe von $n$ und $n'$ geben

$$\log \mu = 9.5421752$$

und hieraus folgt

$$\mu = 0{,}3484778$$
$$2\mu = 0{,}6969556$$
$$3\mu = 1{,}0454334$$
$$4\mu = 1{,}3939112$$
$$5\mu = 1{,}7423898$$
$$6\mu = 2{,}0908668$$
$$7\mu = 2{,}4393446$$
$$8\mu = 2.78782$$
$$9\mu = 3.13630$$
$$10\mu = 3.48478$$
$$11\mu = 3.83326$$

Diese Zahlenwerthe zeigen, dass der kleinste Divisor bei dem Argument $(1-3\mu)\,\varepsilon$ vorkommt, und dass

$$1-3\mu = -\,0{,}0454334$$

wird, es sind also bei den Argumenten, die diesen Divisor erhalten, die grössten Störungscoefficienten zu erwarten, und man muss in den Entwickelungen die Coefficienten dieser Argumente mit mehreren Decimalen wie die übrigen berechnen. Es wird sich in der Folge zeigen, dass irgend ein Divisor $i - i'\mu$ vorzugsweise bei folgenden drei Argumenten vorkommt, bei

$$(i-1-i'\mu)\,\varepsilon,\ (i-i'\mu)\,\varepsilon \text{ und } (i+1-i'\mu)\,\varepsilon$$

und es sind also hier die Coefficienten der Argumente $(0-3\mu)\,\varepsilon$, $(1-3\mu)\,\varepsilon$ und $(2-3\mu)\,\varepsilon$, deren Coefficienten genauer berechnet werden müssen wie die übrigen. Das Doppelte dieses Divisors tritt natürlich bei $2-6\mu$, das Dreifache bei $3-9\mu$ u. s. w. ein, aber erstlich sind die Vielfachen des Divisors grösser wie der Divisor selbst, und zweitens gehören diese Vielfachen Gliedern an, die von höherer Ordnung in Bezug auf Excentricitäten und Neigungen sind, und in den convergirenden Reihen, in welche alle im Vorhergehenden betrachteten Grössen entwickelt werden, eine höhere Stelle einnehmen, und deshalb kleiner sind wie die erst genannten Glieder, die den kleinen Divisor selbst bekommen: es können aus diesen Gründen die Vielfachen des kleinen Divisors nur weit kleinere Störungscoefficienten hervorbringen, wie dieser Divisor selbst.

Man sieht aus den obigen numerischen Werthen, dass bis $11\mu$ keine neuen kleinen Divisoren vorkommen, und sollten bei grösseren

Vielfachen selbst solche vorkommen, die einer Commensurabilität gleich zu achten wären, so können diese keine Wirkung auf die Methode haben. Denn es lässt sich zeigen, dass nur eine Commensurabilität der Bewegungen, die auf Argumente fällt, die den grössten Gliedern der Störungsfunction zugehören, eine andere Behandlung der Aufgabe nothwendig macht. Da $\mu$ ein Decimalbruch ohne Ende ist, so lassen sich in jedem Falle Werthe von $i$ und $i'$ angeben, die die Grösse $i-i'\mu$ kleiner als jede gegebene Grösse machen, und man kann auf diese Art jedes Mal eine Commensurabilität scheinbar herbeiführen. Man findet überhaupt die Werthe von $i$ und $i'$, die den successive immer kleiner werdenden, abwechselnd positiven und negativen, überhaupt kleinsten Werthen von $i - i'\mu$ angehören, dadurch, dass man die Zahl $\mu$ in einen Kettenbruch verwandelt, und diesen successive summirt.

In unserm Beispiel wird

$$\mu = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{32 + \text{etc.}}}}}}}$$

und hieraus bekommt man die folgenden Werthe

$$\begin{aligned} 1 - 2\mu &= + 0.3030 \\ 1 - 3\mu &= - 0.0454 \\ 7 - 20\mu &= + 0.0304 \\ 8 - 23\mu &= - 0.0150 \\ 23 - 66\mu &= + 0.000465 \\ 744 - 2135\mu &= - 0.000104 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

die man beliebig fortsetzen kann, wenn man $\mu$ mit mehr Decimalen berechnet, wie oben geschehen ist. Ich bemerke noch, dass der hier zu Grunde gelegte Werth von $\mu$ auf einem osculirenden Werthe von $n$ beruht, und dass man um den wahren Werth der vorstehenden Grössen zu erhalten, den im ferneren Verlaufe der Rechnung zu ermittelnden mittleren Werth von $n$ anwenden muss.

## 79.

Aus den obigen Elementen der Egeria und des Jupiters wurden nun durch die Ausdrücke (50) und (49) berechnet,

$$\Psi = 300^\circ\ 33'\ 59''2$$
$$\Phi = -3\ \ 57\ \ 56.0$$
$$J = 15\ \ 50\ \ 51.2$$
$$\Pi = 79\ \ 52\ \ 59.3$$
$$\Pi' = -27\ \ 32\ \ 43.2$$

hiemit durch (102) und durch $\log a = 0.3053518$

$$K = -26^\circ\ 38'\ 42''6;\ \log k = 9.9965091$$
$$K_1 = -28\ \ 27\ \ 56.5;\ \log k_1 = 9.9868816$$

und darauf durch (104), (106) und (108)

$$P = 57^\circ 15'\ 21''04;\ \log p = 0,8369880$$
$$V = 107\ \ 47\ \ \ 9.86;\ \log v = 0.6042645$$
$$W = 49\ \ 16\ \ 44.79;\ \log w = 0.5929998$$
$$W_1 = 51\ \ \ 2\ \ 50.47;\ \log w_1 = 0.6010663$$
$$R = 5.066164$$

womit die Vorbereitungen für die Berechnung der Coefficienten von (103) beendigt sind. Es ergab sich von diesen zuerst durch (110)

$$\log \gamma_2 = 7,97755$$

für die übrigen wurde der Umkreis in 16 Theile getheilt, und die diesen Theilungen entsprechenden Werthe durch (107) und (109) gerechnet, die ich in der folgenden Tafel zusammengestellt habe. Da ich mich dies Mal bei den folgenden Rechnungen der Methode des Art. 68 bedient habe, so wurde aus $\gamma_0$ der dort mit $D$ bezeichnete Coefficient berechnet.

| $\varepsilon$ | $D$ | $\log f$ | $F - \varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 0° 0' | 4.872281 | 0.5393608 | 100° 48' 55''35 |
| 22 30 | 4.817660 | 0.5231269 | 104 56 46.19 |
| 45 0 | 4.803918 | 0.5250275 | 109 27 57.59 |
| 67 30 | 4.834251 | 0.5419232 | 112 57 31.04 |
| 90 0 | 4.905146 | 0.5655337 | 114 49 2.30 |
| 112 30 | 5.006266 | 0.5889305 | 115 14 13.51 |
| 135 0 | 5.121760 | 0.6089595 | 114 41 42.51 |
| 157 30 | 5.232940 | 0.6252504 | 113 34 13.24 |
| 180 0 | 5.321777 | 0.6383737 | 112 1 16.19 |
| 202 30 | 5.374287 | 0.6483650 | 110 2 29.94 |
| 225 0 | 5.382936 | 0.6541052 | 107 36 20.92 |
| 247 30 | 5.347508 | 0.6536079 | 104 48 25.84 |

| $\varepsilon$ | $D$ | $\log f$ | $F-\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 270° 0' | 5.274503 | 0.6448363 | 101° 55' 58".25 |
| 292 30 | 5.175493 | 0.6266485 | 99 28 14.10 |
| 315 0 | 5.065093 | 0.5998057 | 98 3 53.02 |
| 337 30 | 4.959007 | 0.5681461 | 98 23 11.81 |

Zur Controle dieser numerischen Werthe wurde die Methode des Art. 60 angewandt. Da ich, wie erwähnt, bei den folgenden Rechnungen die Methode des Art. 68 angewandt habe, so wurde die Zerlegung des Ausdrucks (103) in Factoren hier nicht angewandt, es zeigte jedoch die Folge, dass es in gegenwärtigem Falle etwas kürzer gewesen wäre, die Factorenzerlegung anzuwenden.

## 80.

Die vorstehenden Werthe von $D$ und $f$ dienten nun zuerst, um durch die (126), (128) und die Ausdrücke des Art. 62, nachdem darin $D$ statt $C$, und $f$ statt $q$ substituirt worden war, die Producte der Entwickelungscoefficienten $\alpha_i^{(3)}$ von

$$\left\{D - f\cos(\varepsilon' - F)\right\}^{-\frac{3}{2}}$$

mit $\frac{3}{8}\alpha^2 m'.206265''$ zu berechnen, deren Werthe die folgende Tafel giebt, in welcher ich zur Abkürzung

$$\varepsilon = (0)\ ,\quad \varepsilon = (1)\ ,\quad \varepsilon = (2)\ ,\ \text{etc.}$$

bez. statt $\varepsilon = 0^0\ 0'$, $\varepsilon = 22^0\ 30'$, $\varepsilon = 45^0$, etc.

geschrieben habe.

| $\varepsilon$ | $\log \beta_0^{(3)}$ | $\log \beta_1^{(3)}$ | $\log \beta_2^{(3)}$ | $\log \beta_3^{(3)}$ | $\log \beta_4^{(3)}$ | $\log \beta_5^{(3)}$ | $\log \beta_6^{(3)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (0) | 1.2568572 | 1.0247421 | 0.7318004 | 0.4138022 | 0.082038 | 9.74155 | 9.39503 |
| (1) | 1.2432071 | 0.9972054 | 0.6891173 | 0.3556137 | 0.008191 | 9.65196 | 9.28966 |
| (2) | 1.2506682 | 1.0084938 | 0.7045703 | 0.3753271 | 0.032205 | 9.68030 | 9.32233 |
| (3) | 1.2739348 | 1.0492103 | 0.7643719 | 0.4546816 | 0.131312 | 9.79926 | 9.46121 |
| (4) | 1.3034221 | 1.1004834 | 0.8397208 | 0.5547718 | 0.256430 | 9.94956 | 9.63677 |
| (5) | 1.3289183 | 1.1447834 | 0.9050574 | 0.6418059 | 0.365449 | 0.08071 | 9.79015 |
| (6) | 1.3452162 | 1.1744883 | 0.9499279 | 0.7023714 | 0.441942 | 0.17326 | 9.89882 |
| (7) | 1.3550704 | 1.1937344 | 0.9798903 | 0.7434521 | 0.494321 | 0.23703 | 9.97404 |
| (8) | 1.3657698 | 1.2123895 | 1.0076888 | 0.7807619 | 0.541302 | 0.29377 | 0.04059 |
| (9) | 1.3825254 | 1.2370978 | 1.0416015 | 0.8242688 | 0.594578 | 0.33691 | 0.11364 |
| (10) | 1.4035521 | 1.2652282 | 1.0780116 | 0.8693290 | 0.648454 | 0.41969 | 0.18538 |
| (11) | 1.4188442 | 1.2838955 | 1.1006335 | 0.8960894 | 0.679436 | 0.45494 | 0.22493 |
| (12) | 1.4148526 | 1.2759171 | 1.0879854 | 0.8785549 | 0.656918 | 0.42738 | 0.19230 |
| (13) | 1.3854039 | 1.2325473 | 1.0284506 | 0.8021526 | 0.563332 | 0.31645 | 0.06392 |
| (14) | 1.3386925 | 1.1622071 | 0.9311457 | 0.6767943 | 0.409497 | 0.13389 | 9.85250 |
| (15) | 1.2911235 | 1.0854684 | 0.8216873 | 0.5336313 | 0.232145 | 9.92211 | 9.60614 |

| $i$ | $\log\beta_7^{(3)}$ | $\log\beta_8^{(3)}$ | $\log\beta_9^{(3)}$ | $\log\beta_{10}^{(3)}$ | $\log\beta_{11}^{(3)}$ | $\log\beta_{12}^{(3)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (0) | 9.04409 | 8.6898 | 8.3328 | 7.9736 | 7.6127 | 7.2503 |
| (1) | 8.91290 | 8.5427 | 8.1699 | 7.7949 | 7.4181 | 7.0398 |
| (2) | 8.95991 | 8.5941 | 8.2256 | 7.8550 | 7.4825 | 7.1085 |
| (3) | 9.11874 | 8.7729 | 8.4244 | 8.0738 | 7.7214 | 7.3674 |
| (4) | 9.31963 | 8.9992 | 8.6761 | 8.3508 | 8.0238 | 7.6954 |
| (5) | 9.49530 | 9.1972 | 8.8964 | 8.5936 | 8.2890 | 7.9829 |
| (6) | 9.62014 | 9.3382 | 9.0537 | 8.7671 | 8.4787 | 8.1889 |
| (7) | 9.70684 | 9.4364 | 9.1634 | 8.8884 | 8.6116 | 8.3333 |
| (8) | 9.78323 | 9.5227 | 9.2596 | 8.9944 | 8.7275 | 8.4592 |
| (9) | 9.86623 | 9.6157 | 9.3625 | 9.1074 | 8.8505 | 8.5922 |
| (10) | 9.94697 | 9.7054 | 9.4613 | 9.2152 | 8.9674 | 8.7182 |
| (11) | 9.99084 | 9.7536 | 9.5139 | 9.2721 | 9.0286 | 8.7837 |
| (12) | 9.95311 | 9.7108 | 9.4659 | 9.2190 | 8.9704 | 8.7204 |
| (13) | 9.80722 | 9.5473 | 9.2849 | 9.0204 | 8.7541 | 8.4864 |
| (14) | 9.56684 | 9.2779 | 8.9864 | 8.6928 | 8.3974 | 8.1006 |
| (15) | 9.28582 | 8.9622 | 8.6359 | 8.3075 | 7.9773 | 7.6456 |

Der Grund, weshalb ich

$$\beta_i^{(3)} = \tfrac{1}{8}\alpha^2 m'.206265''.\alpha_i^{(3)}$$

statt $\alpha_i^{(3)}$ berechnet habe, ist folgender. Die Multiplication mit der störenden Masse $m'$ und die Verwandelung in Secunden ist hiemit am einfachsten abgemacht, denn man braucht, wie schon im Art. 67 erwähnt ist, hiefür nur $\alpha_0^{(1)}$ mit $m'$ 206265″ unmittelbar zu multipliciren. Der Factor $\alpha^2$ ist auf ähnliche Weise dem $\alpha_0^{(3)}$ hinzugefügt worden, weil $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ mit $\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2$ nachher multiplicirt werden muss, und durch die Versetzung des Factors $\alpha^2$, welcher ohngefähr $= 4$ ist, von $\left(\frac{r'}{a'}\right)^2$ auf $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ bewirkt wird, dass letztere Grösse darauf nur mit Factoren zu multipliciren ist, die kleiner wie Eins sind, und daher die letzte Decimale sicherer erhalten wird. Die Division mit 8 endlich ist vorgenommen worden, um die nach der Anwendung der mechanischen Quadratur sonst erforderlich werdenden Divisionen mit 8 sich zu ersparen.

Durch die Formeln des Art. 63 wurden nun aus den vorstehenden Zahlenwerthen die folgenden, mit Ausnahme der $\beta_0^{(1)}$, berechnet, die vorher aus (126) erhalten worden waren.

| $\varepsilon$ | $\log \beta_0^{(1)}$ | $\log \beta_1^{(1)}$ | $\log \beta_2^{(1)}$ | $\log \beta_3^{(1)}$ | $\log \beta_4^{(1)}$ | $\log \beta_5^{(1)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (0) | 1.0999993 | 0.429483 | 9.928293 | 9.471141 | 9.03449 | 8.60972 |
| (1) | 1.0985952 | 0.411388 | 9.894016 | 9.420819 | 8.96816 | 8.52743 |
| (2) | 1.1002456 | 0.417614 | 9.904681 | 9.435889 | 8.98762 | 8.55127 |
| (3) | 1.1038866 | 0.442358 | 9.949861 | 9.501332 | 9.07327 | 8.65707 |
| (4) | 1.1077837 | 0.473232 | 0.006752 | 9.583990 | 9.18159 | 8.79099 |
| (5) | 1.1102938 | 0.499695 | 0.056202 | 9.656178 | 9.27641 | 8.90841 |
| (6) | 1.1108565 | 0.517786 | 0.091040 | 9.707559 | 9.34426 | 8.99267 |
| (7) | 1.1103782 | 0.529844 | 0.115033 | 9.743328 | 9.39173 | 9.05182 |
| (8) | 1.1104988 | 0.540779 | 0.136210 | 9.774619 | 9.43307 | 9.10318 |
| (9) | 1.1123738 | 0.553631 | 0.159470 | 9.808121 | 9.47676 | 9.15701 |
| (10) | 1.1158188 | 0.567064 | 0.182326 | 9.840252 | 9.51810 | 9.20754 |
| (11) | 1.1191321 | 0.575184 | 0.194971 | 9.857348 | 9.53962 | 9.23345 |
| (12) | 1.1199024 | 0.570281 | 0.184725 | 9.841848 | 9.51889 | 9.20755 |
| (13) | 1.1168076 | 0.547796 | 0.143916 | 9.782995 | 9.44212 | 9.11288 |
| (14) | 1.1108410 | 0.510194 | 0.076215 | 9.685594 | 9.31518 | 8.95651 |
| (15) | 1.1044781 | 0.466521 | 9.996763 | 9.570756 | 9.16513 | 8.77128 |

| $\varepsilon$ | $\log \beta_6^{(1)}$ | $\log \beta_7^{(1)}$ | $\log \beta_8^{(1)}$ | $\log \beta_9^{(1)}$ | $\log \beta_{10}^{(1)}$ | $\log \beta_{11}^{(1)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (0) | 8.49271 | 7.7812 | 7.3738 | 6.9694 | 6.5671 | 6.1678 |
| (1) | 8.09672 | 7.6690 | 7.2336 | 6.8133 | 6.3956 | 5.9799 |
| (2) | 8.12270 | 7.6996 | 7.2806 | 6.8646 | 6.4515 | 6.0399 |
| (3) | 8.24863 | 7.8455 | 7.4469 | 7.0610 | 6.6577 | 6.2664 |
| (4) | 8.40814 | 8.0307 | 7.6573 | 7.2871 | 6.9194 | 6.5536 |
| (5) | 8.54810 | 8.1932 | 7.8423 | 7.4947 | 7.1494 | 6.8062 |
| (6) | 8.64873 | 8.3102 | 7.9758 | 7 6445 | 7.3156 | 6.9887 |
| (7) | 8.71956 | 8.3926 | 8.0699 | 7.7500 | 7.4328 | 7.1175 |
| (8) | 8.78094 | 8.4641 | 8.1513 | 7.8416 | 7.5342 | 7.2287 |
| (9) | 8.84489 | 8.5381 | 8.2355 | 7 9356 | 7.6384 | 7.3436 |
| (10) | 8.90456 | 8.6069 | 8.3134 | 8.0228 | 7.7347 | 7.4487 |
| (11) | 8.93488 | 8.6416 | 8.3524 | 8.0662 | 7.7826 | 7.5012 |
| (12) | 8.90378 | 8.6053 | 8.3111 | 8.0196 | 7.7307 | 7.4441 |
| (13) | 8.79129 | 8.4750 | 8.1628 | 7.8537 | 7.5470 | 7.2428 |
| (14) | 8.60551 | 8.2599 | 7.9184 | 7.5798 | 7.2437 | 6.9103 |
| (15) | 8.38523 | 8.0045 | 7.6281 | 7.2548 | 6.8829 | 6.5153 |

| $i$ | $\beta_0^{(5)}$ | $\log\beta_1^{(5)}$ | $\log\beta_2^{(5)}$ | $\log\beta_3^{(5)}$ | $\log\beta_4^{(5)}$ | $\log\beta_5^{(5)}$ | $\log\beta_6^{(5)}$ | $\log\beta_7^{(5)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (0) | 34.805 | 1.44229 | 1.25935 | 1.03100 | 0.77422 | 0.49790 | 0.2076 | 9.9058 |
| (1) | 32.205 | 1.39967 | 1.20404 | 0.96161 | 0.69011 | 0.39863 | 0.0390 | 9.7760 |
| (2) | 33.365 | 1.41752 | 1.22539 | 0.98682 | 0.71933 | 0.43201 | 0.1306 | 9.8176 |
| (3) | 37.695 | 1.48156 | 1.30533 | 1.08451 | 0.83556 | 0.56738 | 0.2851 | 9.9921 |
| (4) | 44.180 | 1.56367 | 1.40711 | 1.20839 | 0.98281 | 0.73854 | 0.4808 | 0.2125 |
| (5) | 50.925 | 1.63618 | 1.49637 | 1.31675 | 1.11140 | 0.88807 | 0.6516 | 0.4048 |
| (6) | 56.131 | 1.68581 | 1.55781 | 1.39182 | 1.20101 | 0.99277 | 0.7717 | 0.5406 |
| (7) | 59.841 | 1.71859 | 1.59877 | 1.44232 | 1.26176 | 1.06412 | 0.8506 | 0.6338 |
| (8) | 63.831 | 1.75073 | 1.63779 | 1.48941 | 1.31757 | 1.12895 | 0.92804 | 0.7173 |
| (9) | 69.780 | 1.79343 | 1.68731 | 1.54701 | 1.38387 | 1.20450 | 1.01276 | 0.8118 |
| (10) | 77.432 | 1.84210 | 1.74202 | 1.60894 | 1.45360 | 1.28233 | 1.09910 | 0.9065 |
| (11) | 83.066 | 1.87422 | 1.77700 | 1.64735 | 1.49575 | 1.32838 | 1.14919 | 0.9607 |
| (12) | 80.698 | 1.85975 | 1.75915 | 1 62546 | 1.46946 | 1.29747 | 1.11351 | 0.9202 |
| (13) | 68.936 | 1.78441 | 1.67192 | 1.52409 | 1.35280 | 1.16480 | 0.96450 | 0.7544 |
| (14) | 53.912 | 1.66517 | 1.53211 | 1.36025 | 1.16322 | 0.94841 | 0.72074 | 0.4827 |
| (15) | 41.891 | 1.53896 | 1.37996 | 1.17849 | 0.94993 | 0.70269 | 0.44170 | 0.1703 |

| $i$ | $\beta_0^{(7)}$ | $\log\beta_1^{(7)}$ | $\log\beta_2^{(7)}$ | $\log\beta_3^{(7)}$ | $\log\beta_4^{(7)}$ | $\log\beta_5^{(7)}$ | $\log\beta_6^{(7)}$ | $\log\beta_7^{(7)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (0) | 19.33 | 1.2343 | 1.1116 | 0.9420 | 0.740 | 0.513 | 0.267 | 0.009 |
| (1) | 16.99 | 1.1729 | 1.0402 | 0.8585 | 0.641 | 0.401 | 0.140 | 9.869 |
| (2) | 17.96 | 1.1984 | 1.0686 | 0.8899 | 0.678 | 0.439 | 0.185 | 9.909 |
| (3) | 21.85 | 1.2900 | 1.1729 | 1.0094 | 0.814 | 0.594 | 0.358 | 0.104 |
| (4) | 28.24 | 1.4091 | 1.3069 | 1.1626 | 0.988 | 0.791 | 0.575 | 0.348 |
| (5) | 35.57 | 1.5153 | 1.4257 | 1.2974 | 1.140 | 0.962 | 0.767 | 0.560 |
| (6) | 41.76 | 1.5890 | 1.5080 | 1.3909 | 1.247 | 1.082 | 0.902 | 0.709 |
| (7) | 46.53 | 1.6387 | 1.5636 | 1.4543 | 1.319 | 1.164 | 0.994 | 0.817 |
| (8) | 50.8 | 1.6767 | 1.6068 | 1.4986 | 1.3694 | 1.210 | 1.042 | 0.838 |
| (9) | 59.6 | 1.7505 | 1.6851 | 1.5888 | 1.4687 | 1.330 | 1.177 | 1.013 |
| (10) | 70.0 | 1.8222 | 1.7610 | 1.6703 | 1.5568 | 1.425 | 1.279 | 1.123 |
| (11) | 77.9 | 1.8692 | 1.8103 | 1.7221 | 1.6122 | 1.484 | 1.343 | 1.190 |
| (12) | 74.1 | 1.8463 | 1.7851 | 1.6918 | 1.5800 | 1.444 | 1.302 | 1.137 |
| (13) | 57.7 | 1.7340 | 1.6645 | 1.5616 | 1.4352 | 1.288 | 1.127 | 0.952 |
| (14) | 39.05 | 1.5581 | 1.4735 | 1.3514 | 1.2019 | 1.031 | 0.845 | 0.644 |
| (15) | 26.09 | 1.3738 | 1.2697 | 1.1229 | 0.9455 | 0.745 | 0.528 | 0.295 |

Hier sind

$$\beta_i^{(1)} = \tfrac{1}{8}\, m'.\, 206265''.\, \alpha_i^{(1)}$$
$$\beta_i^{(5)} = \tfrac{1}{8}\alpha^4 m'.\, 206265''.\, \alpha_i^{(5)}$$
$$\beta_i^{(7)} = \tfrac{1}{8}\alpha^4 m'.\, 206265''.\, \alpha_i^{(7)}$$

und die $\beta_i^{(7)}$ sind berechnet worden, um vermittelst der Ausdrücke des Art. 68 die Entwickelung von $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5$ mit der gewünschten Genauigkeit erhalten zu können. Es ist für alle diese Werthe keine andere Controle

angewandt worden wie die, welche sich bei der Anwendung der mechanischen Quadratur aus dem Umstande ergiebt, dass $c_8$, in der Bedeutung des Art. 65, immer sehr klein werden muss. Diese Bedingung ist hier eine sichere Leitung zur Erkennung, ob merkliche Fehler in den vorhergehenden Rechnungen vorhanden sind, oder nicht. Ein paar Rechnungsfehler, die sich auf diese Art zu erkennen gaben, waren leicht aufgefunden und berichtigt.

81.

Die vorstehenden Werthe wurden nun nach Vorschrift der Ausdrücke (134) mit $\frac{\cos}{\sin} i(F_x - \varepsilon_x)$ multiplicirt, und die Producte durch die Art. 65 Abth. 2 aufgestellten Formeln mechanisch quadrirt, worauf nach den Formeln des Art. 68 die folgenden Werthe von $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$; $\mu\alpha^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ und $\mu\alpha^4\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5$, wo

$$\mu = m'\, 206265''$$

ist, daraus berechnet wurden. Art. 66 zufolge ist hier, gleichwie in den weiter unten folgenden Zahlenangaben, statt der constanten Glieder selbst das Doppelte derselben angesetzt worden.

| $\varepsilon$ $\varepsilon'$ | $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ | | $\mu\alpha^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ | | $\mu\alpha^4\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sin | cos | sin | cos | sin |
| 0, 0 | +205″8971 | | +348″8534 | | +887″85 | |
| 1, 0 | −1.27040 | −1″36054 | −21.43494 | −21″70035 | −123.76 | −130″47 |
| 2, 0 | −0.9872 | −0.3480 | −9.2257 | −1.9135 | −49.74 | −0.18 |
| 3, 0 | +0.0331 | +0.0721 | +0.752 | +1.507 | +7.08 | +12.80 |
| 4, 0 | +0.0136 | +0.0073 | +0.268 | +0.042 | +2.44 | −0.49 |
| 5, 0 | −0.0005 | −0.0026 | −0.014 | −0.069 | −0.24 | −0.76 |
| −5, −1 | +0.0002 | +0.0004 | 0.000 | +0.016 | | |
| −4, −1 | +0.0040 | −0.0002 | +0.095 | −0.003 | +0.98 | +0.08 |
| −3, −1 | −0.0124 | −0.0155 | −0.079 | −0.319 | +0.34 | −3.07 |
| −2, −1 | −0.1408 | −0.0240 | −2.348 | −0.483 | −17.88 | −4.66 |
| −1, −1 | +0.8692 | +1.2009 | +3.966 | +9.510 | +7.00 | +51.54 |
| 0, −1 | +6.8963 | +4.2700 | +43.504 | +25.276 | +203.66 | +110.00 |
| 1, −1 | −15.2845 | −48.7531 | −69.086 | −221.019 | −226.23 | −727.71 |
| 2, −1 | −0.4066 | +0.4276 | −8.951 | +13.858 | −66.09 | +103.36 |
| 3. −1 | −0.0273 | +0.6221 | +0.339 | +7.186 | +8.36 | +41.62 |
| 4, −1 | +0.0325 | −0.0258 | +0.816 | −0.714 | +7.73 | −7.33 |
| 5, −1 | +0.0028 | −0.0105 | −0.002 | −0.211 | −0.62 | −1.88 |
| 6, −1 | −0.0014 | +0.0008 | −0.034 | +0.022 | −0.55 | +0.30 |
| −4, −2 | +0.0006 | −0.0004 | +0.010 | −0.003 | | |
| −3, −2 | −0.0018 | −0.0053 | −0.030 | −0.113 | −0.16 | −1.13 |
| −2, −2 | −0.0164 | +0.0140 | −0.377 | +0.088 | −3.73 | −0.19 |
| −1, −2 | +0.0246 | +0.2226 | +0.156 | +2.953 | −0.26 | +20.95 |
| 0, −2 | +0.6984 | −0.4178 | +7.804 | −2.874 | +48.69 | −7.67 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, −2 | +1".4266 | −5".4954 | +11".172 | −46".605 | +49".67 | −231".59 |
| 2, −2 | −15.2828 | +10.6121 | −111.358 | +77.004 | −462.41 | +317.53 |
| 3, −2 | +0.1413 | +0.1742 | +7.830 | +3.291 | +72.68 | +26.48 |
| 4, −2 | +0.3367 | −0.0875 | +4.699 | −1.560 | +29.95 | −13.95 |
| 5, −2 | −0.0163 | −0.0133 | −0.542 | −0 376 | −6.15 | −3.92 |
| 6, −2 | −0.0070 | 0.0000 | −0.151 | +0.033 | −1.31 | +0.75 |
| 7, −2 | +0.0006 | +0.0007 | +0.025 | +0.024 | +.033 | +0.25 |
| −3, −3 | −0.0004 | −0.0008 | −0.005 | −0.025 | | |
| −2, −3 | −0.0052 | +0.0036 | −0.117 | +0.056 | −1.20 | +0.36 |
| −1, −3 | +0.0089 | +0.0211 | +0.090 | +0.450 | +0.21 | +1.33 |
| 0, −3 | +0.18475 | −0.06335 | +2.7360 | −0.7568 | +20.23 | −4.14 |
| 1, −3 | −0.16810 | −0.47530 | −1.7364 | −6.5197 | −7.18 | −45.33 |
| 2, −3 | −3.36971 | +0.16255 | −36.8447 | +2.3012 | −205.88 | +16.77 |
| 3, −3 | +5.9029 | +4.5984 | +58.975 | +46.257 | +295.67 | +234.29 |
| 4, −3 | +0.1003 | −0.0546 | +1.158 | −4.155 | +7.26 | −45.85 |
| 5, −3 | −0.0987 | −0.1559 | −1.810 | −2.628 | −15.39 | −18.51 |
| 6, −3 | −0.0049 | +0.0091 | −0.140 | +0.358 | −1.46 | +4.53 |
| 7, −3 | +0.0016 | +0.0043 | +0.048 | +0.097 | +0.69 | +0.88 |
| 8, −3 | +0.0005 | −0.0004 | +0.011 | −0.019 | +0.15 | −0.29 |
| −2, −4 | −0.0009 | +0.0006 | −0.030 | +0.010 | | |
| −1, −4 | +0.0039 | +0.0043 | +0.118 | +0.407 | +0.51 | +1.47 |
| 0, −4 | +0.0226 | −0.0080 | +0.482 | −0.125 | +4.66 | −0.83 |
| 1, −4 | −0.0677 | −0.1216 | −1.024 | −2.098 | −6.98 | −16.88 |
| 2, −4 | −0.3412 | +0.0963 | −5.408 | +1.453 | −10.73 | +9.65 |
| 3, −4 | +0.6458 | +1.7656 | +9.002 | +23.776 | +59.53 | +150.34 |
| 4, −4 | +1.1126 | −2.9465 | +14.399 | −37.559 | +87.14 | −222.68 |
| 5, −4 | −0.0315 | −0.0623 | −2.195 | −0.428 | −27.15 | +0.19 |
| 6, −4 | −0.0653 | +0.0746 | −1.235 | +1.523 | −9.42 | +13.59 |
| 7, −4 | +0.0051 | +0.0016 | +0.215 | +0.033 | +2.97 | +0.23 |
| 8, −4 | +0.0023 | −0.0016 | +0.054 | −0.048 | +0.51 | −0.63 |
| 9, −4 | −0.0003 | −0.0002 | −0.013 | −0.004 | −0.20 | −0.04 |
| −1, −5 | +0.0004 | +0.0010 | +0.016 | +0.029 | | |
| 0, −5 | +0.0038 | −0.0036 | +0.092 | −0.067 | +1.02 | −0.40 |
| 1, −5 | −0.0089 | −0.0197 | −0.179 | −0.444 | −1.53 | −4.43 |
| 2, −5 | −0.0718 | +0.0554 | −1.430 | +1.006 | −12.68 | +8.14 |
| 3, −5 | +0.0869 | +0.2313 | +1.616 | +4.156 | +13.13 | +33.69 |
| 4, −5 | +0.8037 | −0.6163 | +12.888 | −10.044 | +91.64 | −73.20 |
| 5, −5 | −1.3578 | −0.0844 | −21.102 | −1.458 | −144.88 | −11.34 |
| 6, −5 | −0.0366 | +0.0241 | −0.157 | +1.207 | +2.32 | +15.63 |
| 7, −5 | +0.0471 | +0.0210 | +1.079 | +0.445 | +10.32 | +3.54 |
| 8, −5 | +0.0004 | −0.0027 | −0.007 | −0.120 | −0.28 | −1.99 |
| 9, −5 | −0.0013 | −0.0010 | −0.041 | −0.026 | −0.50 | −0.24 |
| 10, −5 | 0.0000 | +0.0002 | −0.001 | +0.008 | 0.00 | −0.06 |
| 0, −6 | +0.0009 | −0.0008 | +0.026 | −0.049 | | |
| 1, −6 | −0.0026 | −0.0026 | −0.063 | −0.071 | −0.68 | −0.88 |
| 2, −6 | −0.0143 | +0.0094 | −0.349 | +0.215 | −3.64 | +2.01 |
| 3, −6 | +0.0403 | +0.0404 | +0.852 | +0.904 | +7.65 | +8.84 |
| 4, −6 | +0.1414 | −0.0828 | +2.852 | −1.743 | +24.88 | −15.70 |
| 5, −6 | −0.4346 | −0.3084 | −8.222 | −5.734 | −66.42 | −45.38 |
| 6, −6 | +0.4386 | +0.5815 | +2.446 | +10.694 | +18.08 | +83.79 |
| 7, −6 | +0.0187 | +0.0191 | +0.732 | +0.052 | +9.37 | −2.49 |
| 8, −6 | +0.0032 | −0.0263 | +0.051 | −0.690 | +0.13 | −7.15 |
| 9, −6 | −0.0015 | −0.0001 | −0.067 | +0.018 | −1.02 | +0.42 |
| 10, −6 | −0.0004 | +0.0009 | −0.009 | +0.029 | −0.09 | +0.42 |
| 11, −6 | +0.0001 | −0.0001 | +0.005 | −0.001 | +0.11 | −0.06 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, −7 | −0″0007 | −0″0007 | −0″018 | −0″020 | | |
| 2, −7 | −0.0019 | +0.0021 | −0.059 | +0.060 | −0″76 | +0″62 |
| 3, −7 | +0.0084 | +0.0090 | +0.217 | +0.242 | +2.29 | +2.66 |
| 4, −7 | +0.0225 | −0.0277 | +0.539 | −0.670 | +5.70 | −6.74 |
| 5, −7 | −0.0704 | −0.0720 | −1.644 | −1.701 | −15.89 | −16.00 |
| 6, −7 | −0.0858 | +0.2626 | −1.842 | +5.658 | −15.74 | +50.48 |
| 7, −7 | +0.2295 | −0.1337 | +4.886 | −2.777 | +43.19 | −23.69 |
| 8, −7 | +0.0082 | −0.0138 | −0.020 | −0.440 | −2.22 | −5.37 |
| 9, −7 | −0.0135 | +0.0027 | −0.386 | +0.083 | −4.31 | +1.13 |
| 10, −7 | +0.0001 | +0.0008 | +0.015 | +0.034 | +0.36 | +0.54 |
| 2, −8 | −0.0004 | +0.0006 | −0.015 | +0.018 | | |
| 3, −8 | +0.0021 | +0.0016 | +0.053 | +0.042 | | |
| 4, −8 | +0.0050 | −0.0069 | +0.146 | −0.192 | | |
| 5, −8 | −0.0186 | −0.0109 | −0.525 | −0.298 | | |
| 6, −8 | −0.0344 | +0.0527 | −0.849 | +1.350 | | |
| 7, −8 | +0.1420 | +0.0015 | +3.429 | +0.039 | | |
| 8, −8 | −0.0868 | −0.0812 | −2.058 | −1.978 | | |
| 9, −8 | −0.0088 | −0.0031 | −0.260 | +0.053 | | |
| 10, −8 | +0.0033 | +0.0062 | +0.105 | +0.193 | | |
| 11, −8 | +0.0004 | 0.0000 | +0.017 | −0.012 | | |
| 3, −9 | +0.0006 | +0.0003 | +0.016 | +0.010 | | |
| 4, −9 | +0.0010 | −0.0016 | +0.027 | −0.046 | | |
| 5, −9 | −0.0050 | −0.0024 | −0.154 | −0.076 | | |
| 6, −9 | −0.0050 | +0.0123 | −0.144 | +0.368 | | |
| 7, −9 | +0.0352 | +0.0117 | +0.987 | +0.311 | | |
| 8, −9 | −0.0202 | −0.0694 | −0.547 | −1.861 | | |
| 9, −9 | −0.0239 | +0.0479 | −0.669 | +1.277 | | |
| 10, −9 | 0.0000 | +0.0052 | +0.061 | +0.148 | | |
| 11, −9 | +0.0024 | −0.0025 | +0.085 | −0.086 | | |
| 4, −10 | +0.0002 | −0.0004 | +0.006 | −0.014 | | |
| 5, −10 | −0.0012 | −0.0006 | −0.042 | −0.019 | | |
| 6, −10 | −0.0010 | +0.0034 | −0.038 | +0.126 | | |
| 7, −10 | +0.0079 | +0.0017 | +0.288 | +0.052 | | |
| 8, −10 | +0.0011 | −0.0213 | +0.008 | −0.668 | | |
| 9, −10 | −0.0305 | +0.0200 | −0.905 | +0.596 | | |
| 10, −10 | +0.0238 | +0.0044 | +0.708 | +0.144 | | |
| 11, −10 | +0.0027 | −0.0008 | +0.079 | −0.054 | | |
| 5, −11 | −0.0003 | −0.0001 | −0.012 | −0.004 | | |
| 6, −11 | −0.0001 | +0.0009 | −0.008 | +0.033 | | |
| 7, −11 | +0.0024 | +0.0002 | +0.089 | +0.008 | | |
| 8, −11 | −0.0009 | −0.0055 | −0.005 | −0.190 | | |
| 9, −11 | −0.0120 | +0.0031 | −0.395 | +0.105 | | |
| 10, −11 | +0.0141 | +0.0117 | +0.457 | +0.380 | | |
| 11, −11 | −0.0011 | −0.0109 | −0.027 | −0.358 | | |
| 12, −11 | −0.0009 | −0.0013 | −0.011 | −0.038 | | |
| 6, −12 | | | 0.000 | +0.008 | | |
| 7, −12 | | | +0.024 | +0.002 | | |
| 8, −12 | | | −0.006 | −0.058 | | |
| 9, −12 | | | −0.119 | +0.029 | | |
| 10, −12 | | | +0.125 | +0.210 | | |
| 11, −12 | | | +0.126 | −0.297 | | |
| 12, −12 | | | −0.168 | +0.060 | | |
| 13, −12 | | | −0.016 | +0.029 | | |

Hiemit sind diese Functionen auf die Form (137), das ist

$$(i,i',c)\cos(i\varepsilon - i'\varepsilon') + (i,i',s)\sin(i\varepsilon - i'\varepsilon')$$

gebracht, wie in der Überschrift der ersten Columne angedeutet ist, und die nächste Arbeit besteht darin, sie auf die Form (138) zu bringen. Bevor ich diese Rechnungen erläutere, will ich von einer Abtheilung der vorstehenden Tafel die Rechnung, die sie aus den oben angeführten $\beta$ Coefficienten gegeben hat, so hinstellen, wie ich sie geführt habe. Ich wähle dazu die Abtheilung $i' = 1$ aus $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$.

| $\varepsilon=$(0) | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9.273337n | 9.411470n | 9.522716n | 9.591138n | 9.622966n | 9.629781n | 9.620958n | 9.601924n |
| 0.429488 | 0.411388 | 0.417614 | 0.442358 | 0.473232 | 0.499695 | 0.517786 | 0.529844 |
| 9.992216 | 9.985058 | 9.974438 | 9.964159 | 9.957919 | 9.956433 | 9.958346 | 9.962166 |
| 9.702820n | 9.822858n | 9.940330n | 0.033496n | 0.096198n | 0.129476n | 0.138744n | 0.131768n |
| 0.421699 | 0.396441 | 0.392052 | 0.406517 | 0.431151 | 0.456128 | 0.476132 | 0.492010 |
| $\varepsilon=$(8) | (9) | (10) | (11) | (12) | (13) | (14) | (15) |
| 9.573972n | 9.534917n | 9.480677n | 9.407504n | 9.315478n | 9.216274n | 9.147042n | 9.163912n |
| 0.540779 | 0.553631 | 0.567064 | 0.573184 | 0.570281 | 0.547796 | 0.510194 | 0.466521 |
| 9.967101 | 9.972871 | 9.979165 | 9.985332 | 9.990512 | 9.994040 | 9.995683 | 9.995330 |
| 0.114751n | 0.088548n | 0.047741n | 9.982688n | 9.885759n | 9.764070n | 9.657236n | 9.630433n |
| 0.507880 | 0.526502 | 0.546229 | 0.560516 | 0.560793 | 0.541836 | 0.505877 | 0.461851 |

Dieses ist die Rechnung nach den Ausdrücken (134). Die erste Zeile enthält die logg. von $\cos(F_x - \varepsilon_x)$, die zweite die von $\beta^{(1)}_{1,x}$ — statt $\alpha^{(1)}_{1,x}$ —, die dritte die von $\sin(F_x - \varepsilon_x)$, die vierte und fünfte geben bez. die logg. von

$$Y^c_{1,x} = \beta^{(1)}_{1,x}\cos(F_x - \varepsilon_x)$$

$$Y^s_{1,x} = \beta^{(1)}_{1,x}\sin(F_x - \varepsilon_x)$$

auf welche die mechanische Quadratur angewandt werden muss. Diese Rechnung stelle ich wie folgt:

$\cos(\varepsilon' - \varepsilon)$

−0.50443 −0.66506 −0.87173 −1.08018 −1.24795 −1.34734 −1.37640 −1.35447
−1.30242 −1.22616 −1.11620 −0.96092 −0.76870 −0.58086 −0.45419 −0.42701

−1.80687 −1.89122 −1.98793 −2.04110 { +0.20978 −0.13744 +0.03698
−2.01665 −1.92820 −1.83059 −1.78148 { +0.20973 −0.13734 −0.25962

−3.82352 −3.81942 { $c_4 = -0.00500$    $c_3$   $s_3$   +0.29660 −0.22264
−3.81852 −3.82258 { $s_4 = +0.00316$    +0.41951 −0.31478   9.47217 9.34761n
−7.64204    $c_6$   $s_5$   9.32466 9.49710n
−7.64200    +5   −10

$-15.28404 = c_0$
$-1 = 2c_n$    −0.47923   0.172766   0.066952   9.811052

+0.79797 +0.56110 +0.24447 −0.11926 −0.47925   0.138384   9.916437   9.393892
+0.82497 −0.92746 −0.92221 −0.76648   9.755606   9.776667
+1.48856 +1.16668 +0.64722   9.563908n 9.831063n 9.947306n
−0.36636 −0.67774 −0.88574   9.529523n 9.680548n 9.530146n
9.146748n 9.912921n

+1.62294 −0.02700 | +1.37525 | −0.14020 −0.33847
+1.62293 −0.02830 | +0.24768 | −0.81832 +0.33896
$c_1$   $c_2$ | +0.56965 | −0.95852 +0.00049
+3.24587 −0.05530 | −0.59795 | −0.95848 +0.00002

$c_7$   $c_8$    $s_1$   $s_2$
+1   +130    −1.91700 +0.00051
$s_7$   $s_8$
−4   +47

sin (ε′ − ε)

```
+2.64058  2.49139  2.46633  2.54986  2.69867  2.85843  2.99317  3.10463
 3.22018  3.36126  3.51745  3.63540  3.63742  3.48206  3.20536  2.89635
 5.86076  5.85265  5.98378  6.18496 {−0.47533  −0.21486  −0.43784
 6.33609  6.34049  6.49853  6.00098 {−0.47505  −0.21475  +0.18398
12.19685 12.19314 {c4 = +0.01434          c2         s2        −0.67182  −0 30336
12.18231 12.18594 {s4 = +0.00720      −0.95038   −0.42961      9.82725n  9.48267n
24.37916                                  c6         s6        9.67674n  9.33216n
24.37908                                −28        −11
+48.75824 = c0                                   0.032679n  9.923726n  9.664275n
       +8 = 2c8                   −0.89330       9.995294n  9.773211n  9.247115n
−0.57960 −0.86987 −1.05112 −1.08524 −0.93875     9.615519n              9.629890n
−0.39324 +0.20828 −0.21219 −0.62363              9.820589n  0.101510n  0.232709n
         −1.07815 −0.83893 −0.46161              9.786204n  9.950995n  9.815549n
         −0.66159 −1.26331 −1.70887              9.403429n              0.198324n
−1.17281 +0.01361 | −0.99608 |
−1.17273 +0.01388 | −0.17665 | −0.25318 −0.61123
    c1       c3   | −0.41239 | −1.57879 +0.65396
−2.34554 +0.02749 | +0.42647 | −1.83197 +0.04273
                               −1.83205 +0.04545
    c7       c5                    s1       s3
    −8      −27                −3.66402 +0.08818
                                   s7       s5
                                   +8     −272
```

Die beiden ersten Zeilen enthalten der Reihe nach die eben berechneten

$$Y^c_{1,0},\ Y^c_{1,1},\ \text{etc.}\ Y^c_{1,15}$$

$$\text{und bez. } Y^s_{1,0},\ Y^s_{1,1},\ \text{etc.}\ Y^s_{1,15}$$

hierauf folgen die Additionen und die Rechnung überhaupt, wodurch die $c$ und $s$ mit gradem Index erhalten werden. Dann kommt die Rechnung für die $c$ und $s$ mit ungradem Index, die mit der Subtraction der Zahlen der beiden ersten Zeilen anfängt. Die logg. von cos $22\frac{1}{2}{}^0$, sin $22\frac{1}{2}{}^0$ und cos $45^0$ wurden auf den unteren Rand eines Streifen Papiers geschrieben. Die Vergleichung dieser Rechnung mit den im Art. 65 Abth. 2 gegebenen Formeln wird leicht die Bedeutung jeder Zahl zu erkennen geben. Die Kleinheit der sich ergebenden Werthe von $c_8$, $c_7$, $s_7$, etc. und die Vergleichung dieser Werthe in den verschiedenen Abtheilungen dieser Rechnung lässt schon einen sehr sicheren Schluss auf ihre Richtigkeit zu; grössere Sicherheit erlangt man durch das am Ende des Art. 65 beschriebene Verfahren.

Die hier dem Art. 65 gemäss mit $c_0$, $c_1$, $s_1$, etc. bezeichneten Coefficienten sind dieselben, die im Art. 66 mit $C^c_{i,0}$, $C^c_{i,1}$, $C^s_{i,1}$, etc. bez. mit $S^c_{i,0}$, $S^c_{i,1}$, $S^s_{i,1}$, etc. bezeichnet worden sind, und diese stelle ich dem Ausdruck (136) gemäss wie folgt unter einander

| 1−1 | ∓1 | | ∓2 | | ∓3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| −15.2840 | +3.2459 | −1.9170 | +0.4195 | −0.3148 | −0.0553 | +0.0005 |
| −48.7582 | −3.6640 | +2.3455 | −0.4296 | +0.9504 | +0.0882 | −0.0275 |

| ∓4 | | ∓5 | | ∓6 | |
|---|---|---|---|---|---|
| −0.0050 | +0.0032 | +0.0013 | +0.0005 | +0.0001 | −0.0001 |
| +0.0072 | −0.0145 | −0.0027 | +0.0003 | −0.0001 | +0.0003 |

und bekomme hieraus durch Subtraction und Addition die folgenden

| $\varepsilon$ $\varepsilon'$ | cos | sin |
|---|---|---|
| −5,−1 | +0″0002 | +0″0004 |
| −4,−1 | +0.0040 | −0.0002 |
| −3,−1 | −0.0122 | −0.0177 |
| −2,−1 | −0.1435 | −0.0280 |
| −1,−1 | +0.8491 | +1.2652 |
| 0,−1 | +6.9099 | +4.2625 |
| 1,−1 | −15.2840 | −48.7582 |
| 2,−1 | −0.4181 | +0.4285 |
| 3,−1 | −0.0101 | +0.6356 |
| 4,−1 | +0.0329 | −0.0270 |
| 5,−1 | +0.0022 | −0.0113 |
| 6,−1 | −0.0014 | +0.0008 |

welches die Coefficienten von

$$\left\{D - f\cos(\varepsilon' - F)\right\}^{-1}$$

sind, und zu welchen nach Art. 68 die bez. Coefficienten des Products von

$$-\tfrac{1}{4}\gamma_2 \cos 2\varepsilon' \text{ mit } \left\{D - f\cos(\varepsilon' - F)\right\}^{-1}$$

addirt werden müssen. Es ist

$$\log \frac{\gamma_2}{8a^2} = 6.46376$$

und die logg. der bez. Coefficienten von $\mu a^2 \left\{D - f\cos(\varepsilon' - F)\right\}^{-1}$ sind in der ersten Zeile der folgenden Rechnung angesetzt.

| −2,−1 | | −1,−1 | | 0,−1 | | 1,−1 | | 2,−1 | | 3,−1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cos | sin | | | | | | | | | | |
| 0.382n | 9.756n | 0.576 | 1.006 | 1.6405 | 1.4010 | 1.8394n | 2.3446n | 0.961n | 1.143 | 9.778 | 0.869 |
| 6.846 | 6.220 | 7.040n | 7.470n | 8.1043n | 7.8648n | 8.3032 | 8.8084 | 7.425 | 7.607n | 6.242n | 7,333n |

| 0,−3 | | 1,−3 | | 2,−3 | | 3,−3 | | 4,−3 | | 5,−3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.465 | 9.821n | 0.288n | 0.855n | 1.567n | 0.380 | 1.771 | 1.666 | 0.097 | 0.626n | 0.288n | 0.422n |
| 6,929n | 6.285 | 6.752 | 7.319 | 8.031 | 6.844n | 8.235n | 8.130n | 6.561n | 7.090 | 6.752 | 6.886 |

Die logg. der zweiten Zeile sind die der einzelnen Producte mit dem oben genannten Factor, dessen Argument 0,−2 ist. Hieraus ergeben sich sogleich die folgenden Coefficienten des Products

| $i$ | $i'$ | cos | sin |
|---|---|---|---|
| −3, | −1 | −0.″0002 | +0.″0022 |
| −2, | −1 | +0.0027 | +0.0040 |
| −1, | −1 | +0.0201 | −0.0643 |
| 0, | −1 | −0.0136 | +0.0075 |
| 1, | −1 | −0.0005 | +0.0051 |
| 2, | −1 | +0.0115 | −0.0009 |
| 3, | −1 | −0.0172 | −0.0135 |
| 4, | −1 | −0.0004 | +0.0012 |
| 5, | −1 | +0.0006 | +0.0008 |

Addirt man diese zu den vorstehenden Coefficienten, so erhält man die von $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$, die in der obigen Tafel angesetzt sind. Man sieht, wie wenig dieses Product dem Hauptgliede hinzufügt, es kommen indess ein paar Coefficienten vor, die grösser sind wie die obigen. Der grösste Coefficient dieses Products ist jedoch nur $= 0.''1015$, und kommt im Argument $0, -2$ vor. In $\mu\alpha^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ werden diese Coefficienten grösser, der grösste derselben $= 0.''780$; in $\mu\alpha^4\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5$ ist der grösste derselben $= 4.''11$, aber in diesen Functionen sind die Coefficienten überhaupt grösser wie in $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$.

82.

Aus dem oben gegebenen Werthe von $e'$ folgt

$$\log \lambda' = 8.382393$$

und hiemit geben die Formeln des Art. 70 die folgenden Werthe der jetzt anzuwendenden $J$ Functionen, unter welchen ich jedoch statt der $J^{(0)}_{i\lambda'}$ die Differenz dieser Functionen mit Eins angesetzt habe, weil dieses in der hier von denselben zu machenden Anwendung Vortheile gewährt.

| $i$ | $\log(J^{(0)}_{i\lambda'}-1)$ | $\log\frac{1}{i}J^{(1)}_{i\lambda'}$ | $\log\frac{1}{i}J^{(2)}_{i\lambda'}$ | $\log\frac{1}{i}J^{(3)}_{i\lambda'}$ | $\log\frac{1}{i}J^{(4)}_{i\lambda'}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6.7648n | 8.38227 | 6.4637 | 4.369 | |
| 2 | 7.3666n | 8.38189 | 6.7645 | 4.971 | |
| 3 | 7.7185n | 8.38124 | 6.9401 | 5.323 | |
| 4 | 7.9679n | 8.38036 | 7.0646 | 5.572 | 3.955 |
| 5 | 8.1612n | 8.37920 | 7.1605 | 5.7653 | 4.245 |
| 6 | 8.3188n | 8.37783 | 7.2389 | 5.9230 | 4.482 |
| 7 | 8.4519n | 8.37618 | 7.3047 | 6.0561 | 4.682 |
| 8 | 8.5669n | 8.37428 | 7.3614 | 6.1712 | 4.855 |
| 9 | 8.6681n | 8.37212 | 7.4112 | 6.2724 | 5.008 |
| 10 | 8.7584n | 8.36970 | 7.4553 | 6.3627 | 5.144 |
| 11 | 8.8398n | 8.36701 | 7.4949 | 6.4441 | 5.267 |

und hieraus ergab sich die folgende Tafel der Logarithmen der Coefficienten von $z'^{-i'}$ in $y^i - z'^i$ nach Art. 70

| $i$ | $z'$ | $z'^0$ | $z'^{-1}$ | $z'^{-2}$ | $z'^{-3}$ | $z'^{-4}$ | $z'^{-5}$ | $z'^{-6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −1 | 6.4637n | 8.382393n | 6.7648n | 8 38189 | 6.9401 | 5.572 | 4.245 | |
| −2 | 4.670n | | 8.68330 | 7.3666n | 8.68227 | 7.3655 | 6.066 | 4.783 |
| | $z'^{-1}$ | $z'^{-2}$ | $z'^{-3}$ | $z'^{-4}$ | $z'^{-5}$ | $z'^{-6}$ | $z'^{-7}$ | $z'^{-8}$ |
| −3 | 6.9408 | 8.85904n | 7.7185n | 8.85748 | 7.6377 | 6.4001 | 5.159 | |
| −4 | 4.971n | 7.3663 | 8.98330n | 7.9679n | 8.98126 | 7.8409 | 6.568 | 5.457 |
| | $z'^{-2}$ | $z'^{-3}$ | $z'^{-4}$ | $z'^{-5}$ | $z'^{-6}$ | $z'^{-7}$ | $z'^{-8}$ | $z'^{-9}$ |
| −5 | 5.669n | 7.6391 | 9.07933n | 8.1612n | 9.07680 | 8.0037 | 6.8701 | 5.707 |
| | $z'^{-3}$ | $z'^{-4}$ | $z'^{-5}$ | $z'^{-6}$ | $z'^{-7}$ | $z'^{-8}$ | $z'^{-9}$ | $z'^{-10}$ |
| −6 | 6.1008n | 7.8427 | 9.15736n | 8.3188n | 9.15433 | 8.1396 | 7.0505 | 5.922 |
| −7 | | 6.417n | 8.0056 | 9.22293n | 8.4519n | 9.21938 | 8.2563 | 7.208 |
| | $z'^{-5}$ | $z'^{-6}$ | $z'^{-7}$ | $z'^{-8}$ | $z'^{-9}$ | $z'^{-10}$ | $z'^{-11}$ | |
| −8 | 6.668n | 8.1449 | 9.27927n | 8.5669n | 9.27521 | 8.3584 | 7.3472 | |
| −9 | 5.199 | 6.877n | 8.2590 | 9.3285n | 8.6681n | 9.3239 | 8.4492 | |
| −10 | | 5.483 | 7.0561n | 8.3614 | 9.3721n | 8.7584n | 9.3670 | |
| −11 | | | 5.724 | 7.213n | 8.4526 | 9.4114n | 8.8398n | |
| −12 | | | | 5.934 | 7.3516n | 8.5345 | 9.4462n | |

Hiemit und durch die Formeln des Art. 69 wurden die obigen Ausdrücke für $\mu\left(\frac{a}{\varDelta}\right)$, $\mu\alpha^2\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^3$ und $\mu\alpha^4\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^5$ auf die Form

$$((i,i',c))\cos(i\varepsilon - i'g') + ((i,i',s))\sin(i\varepsilon - i'g')$$

gebracht, und wie folgt gefunden.

| $\varepsilon$ $g'$ | $\mu\left(\frac{a}{\varDelta}\right)$ cos | $\mu\left(\frac{a}{\varDelta}\right)$ sin | $\mu\alpha^2\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^3$ cos | $\mu\alpha^2\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^3$ sin | $\mu\alpha^4\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^5$ cos | $\mu\alpha^4\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^5$ sin |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0, 0 | +205″.5643 | | +346″.7548 | | +878″.05 | |
| 1, 0 | −0.92269 | −0″.15560 | −19.86420 | −16″.43979 | −118.47 | −111″.68 |
| 2, 0 | −0.97401 | −0.35896 | −8.9532 | −2.2594 | −47.71 | −2.79 |
| 3, 0 | +0.0341 | +0.0567 | +0.746 | +1.325 | +6.86 | +11.72 |
| 4, 0 | +0.0127 | +0.0079 | +0.246 | +0.039 | +2.22 | −0.21 |
| 5, 0 | −0.0006 | −0.0023 | −0.014 | −0.064 | −0.22 | −0.71 |
| −5, −1 | +0.0002 | −0.0004 | 0.000 | +0.016 | | |
| −4, −1 | +0.0040 | −0.0002 | +0.095 | −0.003 | +0.98 | +0.08 |
| −3, −1 | −0.0124 | −0.0152 | −0.078 | −0.312 | +0.34 | −3.00 |
| −2, −1 | −0.1398 | −0.0246 | −2.326 | −0.483 | −17.65 | −4.62 |
| −1, −1 | +0.8722 | +1.1752 | +3.976 | +9.298 | +7.08 | +50.29 |
| 0, −1 | +6.8573 | +4.2988 | +43.092 | +25.405 | +201.16 | +110.34 |
| 1, −1 | −15.3448 | −48.4597 | −69.588 | −218.645 | −228.50 | −716.15 |
| 2, −1 | +0.3278 | −0.0823 | −3.607 | +10.138 | −43.92 | +88.00 |
| 3, −1 | −0.0289 | +0.6174 | +0.013 | +7.064 | +5.11 | +40.52 |
| 4, −1 | +0.0164 | −0.0216 | +0.590 | −0.643 | +6.29 | −6.70 |
| 5, −1 | +0.0033 | −0.0100 | +0.022 | −0.195 | −0.32 | −1.71 |
| 6, −1 | −0.0011 | +0.0008 | −0.027 | +0.020 | −0.48 | +0.26 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| −4, −2 | +0″.0006 | −0″.0004 | +0″.012 | −0″.003 | | |
| −3, −2 | −0.0021 | −0.0057 | −0.032 | −0.119 | −0″.15 | −1″.21 |
| −2, −2 | −0.0195 | +0.0132 | −0.425 | +0.072 | −4.06 | −0.32 |
| −1, −2 | +0.0450 | +0.2495 | +0.245 | +3.442 | −0.10 | +21.82 |
| 0, −2 | +0.8496 | −0.3093 | −8.637 | −2.203 | +52.02 | −4.70 |
| 1, −2 | +1.0669 | −6.6231 | +9.604 | −51.356 | +44.63 | −245.34 |
| 2, −2 | −15.0143 | +10.5862 | −108.665 | +77.045 | −448.44 | +318.09 |
| 3, −2 | −0.2849 | −0.1395 | +3.577 | +0.119 | +51.50 | +10.82 |
| 4, −2 | +0.3320 | −0.0908 | +4.657 | −1.359 | +29.68 | −11.29 |
| 5, −2 | −0.0091 | −0.0024 | −0.414 | −0.191 | −5.09 | −2.61 |
| 6, −2 | −0.0068 | −0.0005 | −0.144 | +0.011 | −1.27 | +0.45 |
| 7, −2 | +0.0005 | +0.0004 | +0.022 | +0.017 | +0.28 | +0.19 |
| −3, −3 | −0.0004 | −0.0011 | −0.006 | −0.030 | | |
| −2, −3 | −0.0055 | +0.0043 | −0.139 | +0.059 | −1.41 | +0.35 |
| −1, −3 | +0.0105 | +0.0323 | +0.090 | +0.588 | +0.15 | +5.22 |
| 0, −3 | +0.22104 | −0.07865 | +3.0890 | −0.8574 | +22.20 | −4.31 |
| 1, −3 | −0.10542 | −0.76754 | −1.1524 | −8.7204 | −4.60 | −55.28 |
| 2, −3 | −4.05529 | +0.66362 | −41.5037 | +5.8707 | −223.26 | +31.47 |
| 3, −3 | +5.8170 | +4.4149 | +58.184 | +43.909 | +291.93 | +220.05 |
| 4, −3 | +0.0124 | +0.2224 | +0.049 | −0.639 | +0.68 | −25.16 |
| 5, −3 | −0.1018 | −0.1500 | −1.706 | −2.596 | −13.64 | −18.67 |
| 6, −3 | +0.0009 | +0.0019 | −0.028 | +0.216 | −0.60 | +3.31 |
| 7, −3 | +0.0013 | +0.0042 | +0.033 | +0.097 | +0.46 | +0.88 |
| 8, −3 | +0.0003 | −0.0003 | +0.006 | −0.015 | +0.10 | −0.23 |
| −2, −4 | −0.0013 | +0.0009 | −0.039 | +0.014 | | |
| −1, −4 | +0.0045 | +0.0063 | +0.071 | +0.142 | −0.52 | +1.52 |
| 0, −4 | +0.0371 | −0.0129 | +0.684 | −0.177 | +6.06 | −1.09 |
| 1, −4 | −0.0754 | −0.1668 | −1.094 | −2.612 | −7.17 | −20.04 |
| 2, −4 | −0.6077 | +0.1251 | −8.099 | +1.666 | −54.77 | +10.54 |
| 3, −4 | +1.0551 | +2.0534 | +12.997 | +26.402 | +78.92 | +161.90 |
| 4, −4 | +1.0148 | −2.8199 | +12.831 | −36.320 | +76.10 | −215.29 |
| 5, −4 | +0.1214 | −0.0649 | +0.170 | −0.479 | −11.08 | −0.12 |
| 6, −4 | −0.0596 | +0.0757 | −1.198 | +1.464 | −9.58 | +12.19 |
| 7, −4 | −0.0004 | −0.0005 | +0.090 | −0.012 | +1.84 | −0.16 |
| 8, −4 | +0.0023 | −0.0015 | +0.056 | −0.040 | +0.56 | −0.45 |
| 9, −4 | −0.0001 | −0.0001 | −0.008 | −0.001 | −0.14 | −0.01 |
| −1, −5 | +0.0008 | +0.0015 | +0.027 | +0.041 | | |
| 0, −5 | +0.0069 | −0.0047 | +0.146 | −0.078 | +1.55 | −0.49 |
| 1, −5 | −0.0154 | −0.0339 | −0.272 | −0.659 | −2.11 | −6.04 |
| 2, −5 | −0.1178 | +0.0645 | −2.051 | +1.119 | −16.84 | +8.77 |
| 3, −5 | +0.1674 | +0.4108 | +2.592 | +6.447 | +18.85 | +47.38 |
| 4, −5 | +0.8790 | −0.8782 | +13.682 | −13.268 | +95.19 | −91.47 |
| 5, −5 | −1.2799 | −0.0463 | −19.850 | −0.682 | −136.07 | −4.87 |
| 6, −5 | −0.0631 | −0.0500 | −0.644 | −0.142 | −1.36 | +5.17 |
| 7, −5 | +0.0465 | +0.0168 | +1.026 | +0.407 | +9.55 | +3.63 |
| 8, −5 | +0.0003 | +0.0008 | −0.008 | −0.027 | −0.27 | −1.05 |
| 9, −5 | −0.0012 | −0.0010 | −0.035 | −0.028 | −0.39 | −0.29 |
| 10, −5 | +0.0001 | +0.0001 | 0.000 | +0.004 | +0.01 | −0.12 |
| 0, −6 | +0.0016 | −0.0013 | +0.040 | −0.028 | | |
| 1, −6 | −0.0042 | −0.0061 | −0.087 | −0.137 | −0.90 | −1.53 |
| 2, −6 | −0.0256 | +0.0163 | −0.550 | +0.332 | −5.25 | +2.90 |
| 3, −6 | +0.0544 | +0.0787 | +1.069 | +1.519 | +9.16 | +13.34 |
| 4, −6 | +0.2384 | −0.1705 | +4.344 | −3.058 | +34.94 | −24.53 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5, −6 | −0″5763 | −0″3004 | −10″347 | −5″512 | −79″87 | −43″11 |
| 6, −6 | +0.1448 | +0.5296 | +2.657 | +9.698 | +20.54 | +75.58 |
| 7, −6 | −0.0125 | +0.0436 | +0.078 | +0.568 | +3.18 | +1.95 |
| 8, −6 | +0.0006 | −0.0254 | +0.024 | −0.644 | +0.46 | −6.35 |
| 9, −6 | +0.0005 | −0.0007 | −0.011 | +0.002 | −0.35 | +0.19 |
| 10, −6 | −0.0004 | +0.0008 | −0.010 | +0.026 | −0.15 | +0.32 |
| 11, −6 | +0.0001 | −0.0001 | +0.005 | −0.004 | | |
| 1, −7 | −0.0012 | −0.0013 | −0.028 | −0.034 | | |
| 2, −7 | −0.0049 | +0.0040 | −0.120 | +0.097 | | |
| 3, −7 | +0.0147 | +0.0176 | +0.342 | +0.409 | | |
| 4, −7 | +0.0497 | −0.0450 | +1.039 | −0.982 | | |
| 5, −7 | −0.1107 | −0.1127 | −2.885 | −2.430 | | |
| 6, −7 | −0.0575 | +0.3286 | −1.256 | +6.786 | | |
| 7, −7 | +0.1992 | −0.1271 | +4.230 | −2.688 | | |
| 8, −7 | +0.0225 | −0.0030 | +0.370 | −0.163 | | |
| 9, −7 | −0.0121 | +0.0040 | −0.347 | +0.096 | | |
| 10. −7 | −0.0006 | −0.0002 | −0.006 | +0.017 | | |
| 2, −8 | −0.0010 | +0.0011 | −0.030 | +0.031 | | |
| 3, −8 | +0.0040 | +0.0038 | +0.097 | +0.093 | | |
| 4. −8 | +0.0109 | −0.0125 | +0.275 | −0.347 | | |
| 5, −8 | −0.0356 | −0.0262 | −0.876 | −0.632 | | |
| 6, −8 | −0.0443 | +0.0995 | −1.053 | +2.340 | | |
| 7, −8 | +0.1691 | −0.0229 | +3.920 | −0.486 | | |
| 8, −8 | −0.0778 | −0.0666 | −1.867 | −1.606 | | |
| 9, −8 | −0.0092 | −0.0123 | −0.192 | −0.194 | | |
| 10, −8 | +0.0037 | +0.0051 | +0.105 | +0.163 | | |
| 3, −9 | +0.0012 | +0.0008 | +0.030 | +0.023 | | |
| 4, −9 | +0.0025 | −0.0035 | +0.068 | −0.092 | | |
| 5, −9 | −0.0098 | −0.0058 | −0.277 | −0.161 | | |
| 6, −9 | −0.0013 | +0.0026 | −0.318 | +0.691 | | |
| 7, −9 | +0.0626 | +0.0086 | +1.614 | +0,241 | | |
| 8, −9 | −0.0358 | −0.0769 | −0.912 | −2.004 | | |
| 9, −9 | −0.0178 | +0.0405 | −0.492 | +1.091 | | |
| 10, −9 | −0.0016 | +0.0055 | −0.076 | +0.156 | | |
| 11, −9 | +0.0017 | −0.0025 | +0.064 | −0.081 | | |
| 4, −10 | +0.0006 | −0.0010 | +0.016 | −0.028 | | |
| 5, −10 | −0.0028 | −0.0015 | −0.085 | −0.043 | | |
| 6, −10 | −0.0030 | +0.0075 | −0.086 | +0.228 | | |
| 7, −10 | +0.0180 | +0.0037 | +0.543 | +0.109 | | |
| 8, −10 | −0.0050 | −0.0351 | −0.154 | −1.022 | | |
| 9, −10 | −0.0309 | +0.0282 | −0.903 | +0.807 | | |
| 10, −10 | +0.0189 | +0.0023 | +0.568 | +0.080 | | |
| 11, −10 | +0.0033 | +0.0015 | +0.103 | +0.013 | | |
| 5, −11 | | | −0.026 | −0.011 | | |
| 6, −11 | | | −0.022 | +0.071 | | |
| 7, −11 | | | +0.179 | +0.028 | | |
| 8, −11 | | | −0.021 | −0.343 | | |
| 9, −11 | | | −0.566 | +0.265 | | |
| 10, −11 | | | +0.557 | +0.355 | | |
| 11, −11 | | | −0.040 | −0.265 | | |
| 12, −11 | | | +0.009 | −0.052 | | |

Um zu zeigen, wie diese Rechnung am zweckmässigsten angelegt wird, werde ich einen Theil derselben anführen, um aber nicht zu viel Raum darauf zu verwenden, werde ich nur die Verwandelung von $\mu a'^2 \left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ für $i' = 0$, $i' = 1$, und $i' = 2$ anführen, und auch nur die für die Coefficienten der Cosinusse, indem hier diese unabhängig von denen der Sinusse und umgekehrt behandelt werden können.

| | −4, −1 | −3, −1 | −2, −1 | −1, −1 | 0, −1 | 1, −1 | 2, −1 | 3, −1 | 4, −1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8.978 | 8.898n | 0.8707n | 0.5984 | 1.63853 | 1.839390n | 0.9519n | 9.530 | 9.912 |
| +1 | — | — | 6.83 | 7.06n | 8.102n | 8.303 | 7.445 | — | — |
| 0 | 7.360n | 7.280 | 8.7531 | 8.9808n | 0.02092n | 0.221783 | 9.3343 | 7.912n | 8.294n |
| −1 | — | — | 7.135 | 7.369n | 8.403n | 8.604 | 7.716 | — | — |
| −2 | 7.360 | 7.280n | 8.753n | 8.980 | 0.0204 | 0.2213n | 9.3338n | 7.912 | 8.294 |

| | −3, −2 | −2, −2 | −1, −2 | 0, −2 | 1, −2 | 2, −2 | 3, −2 | 4, −2 | 5, −2 | 6, −2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8.477n | 9.576n | 9.498 | 0.8923 | 1.0480 | 2.0467n | 0.8938 | 0.6720 | 9.734n | 9.179n |
| −1 | 7.46 | 8.259 | 7.876n | 9.5756n | 9.7313n | 0.7300 | 9.5771n | 9.3553n | 8.417 | 7.862 |
| −2 | — | 6.9 | — | 8.259n | 8.414n | 9.413 | 8.260n | 8.038n | 7.09 | — |

| | −2, −3 | −1, −3 | 0, −3 | 1, −3 | 2, −3 | 3, −3 | 4, −3 | 5, −3 | 6, −3 | 7, −3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 9.068n | 8.954 | 0.4372 | 0.2395n | 1.3663n | 1.7708 | 0.064 | 0.238n | 9.446n | 8.681 |
| −1 | — | — | 7.37 | 7.481n | 8.507n | 8.742 | 7.00 | 7.20n | — | — |
| −2 | 7.927 | 7.818n | 9.2962n | 9.0985 | 0.4253 | 0.6298n | 8.923n | 9.417 | 8.005 | 7.540n |

| | 0, −4 | 1, −4 | 2, −4 | 3, −4 | 4, −4 | 5, −4 | 6, −4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 9.683 | 0.010n | 0.738n | 0.934 | 1.1584 | 0.842n | 0.092n |
| −2 | 7.05 | 7.377n | 8.100n | 8.321 | 8.525 | 7.709n | 7.459n |

| | 4, −5 | 5, −5 |
|---|---|---|
| | 1.1403 | 1.3243n |
| −2 | 6.79n | 6.99 |

Die erste Zeile enthält die Logarithmen der betreffenden Coefficienten von $\mu a^2 \left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ und die übrigen die der partiellen Producte. Die erste Columne links giebt die Exponenten von $z'$ an, welchen diese Producte angehören. Da ich dieses Beispiel nur bis $i' = 2$ fortsetze, so habe ich allenthalben mit den zu $z'^{-2}$ gehörigen Producten aufgehört, in der vollständigen Rechnung muss man selbstverständlich die Producte für die höheren Potenzen von $z'$ so weit mitberechnen, bis sie unmerklich werden. Die zu den obigen Producten gehörigen Zahlenwerthe werden nun wie folgt gestellt, und addirt.

| 0,0 | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| +348.8334 | −21.43494 | −9.2237 | +0.752 | +0.268 | −0.014 |
| −1.0493 | −0.09568 | +0.0566 | +2 | −2 | |
| −1.0493 | +1.66642 | +0.2139 | −8 | −20 | |
| +346.7348 | −19.86420 | −8.9532 | +0.746 | +0.246 | −0.014 |

| −5, −1 | −4, −1 | −3, −1 | −2, −1 | −1, −1 | 0, −1 | 1, −1 | 2, −1 | 3, −1 | 4, −1 | 5, −1 | 6, −1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.000 | +0.095 | −0.079 | −2.348 | +3.966 | +43.304 | −69.086 | −8.951 | +0.339 | +0.816 | −0.002 | −0.034 |
| | | | +3 | +20 | −13 | −1 | +1 | | | | |
| | | | +1 | −2 | −25 | +40 | +5 | | | | |
| | | +1 | +18 | −8 | −376 | −539 | +5.370 | −378 | −227 | +26 | +7 |
| | | | | | +2 | −2 | −32 | +52 | +1 | −2 | |
| 0.000 | +0.095 | −0.078 | −2.326 | +3.976 | +43.092 | −69.588 | −3.607 | +0.013 | +0.590 | +0.022 | −0.027 |

| −1, −2 | −3, −2 | −2, −2 | −1, −2 | 0, −2 | 1, −2 | 2, −2 | 3, −2 | 4, −2 | 5, −2 | 6, −2 | 7, −2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +0.010 | −0.030 | −0.377 | +0.156 | +7.804 | +11.172 | −111.358 | +7.830 | +4.699 | −0.542 | −0.151 | +0.025 |
| +2 | −2 | −57 | +96 | +1.048 | −1.665 | −216 | +8 | +20 | | | |
| | | +1 | | −18 | −26 | +259 | −18 | −11 | +1 | | |
| | | +8 | −7 | −198 | +125 | +2 663 | −4.264 | −84 | +131 | +10 | −3 |
| | | | | +1 | −2 | −13 | +21 | +34 | −5 | −3 | |
| | | | | | | | | −1 | +1 | | |
| +0.012 | −0.032 | −0.425 | +0.245 | +8.637 | +9.604 | −108.665 | +3.577 | +4.657 | −0.414 | −0.144 | +0.022 |

Diese Summen sind die in der vorstehenden Tafel befindlichen. Es tritt hier der Fall ein, der im Art. 69 erklärt worden ist, nemlich dass Glieder entstanden sind, in welchen $i'$ negativ ist. Dieses sind die Glieder, die in der ersten Abtheilung der vorstehenden Rechnung linker Hand den Index $+1$ haben, und aus den Coefficienten von $z'$ in $y'^{-1}$ entstanden sind. Diese Glieder habe ich in der letzten Zusammenstellung sogleich der ersten Abtheilung (für $i'=1$) nach der Gleichung

$$((-i, -i', c)) = ((i, i', c))$$

einverleibt.

Es ist ein Leichtes, die vorstehende Rechnung einer Controle zu unterwerfen. Man braucht zu dem Ende nur die Summen der Coefficienten einer jeden Abtheilung zu bilden, und diese derselben Rechnung zu unterwerfen, das Resultat dieser muss mit der Summe der Coefficienten einer jeden Abtheilung des Hauptresultats übereinstimmen. Man muss mit andern Worten $\varepsilon = 0$ setzen, und nach der Zusammenziehung, die daraus erfolgt, dieselbe Art der Berechnung wiederholen, die sehr kurz ist, weil man dabei nur mit wenigen Gliedern zu thun hat. Einige Glieder entziehen sich dieser Controle, und zwar die der ersten Abtheilung, welche mit $\sin\varepsilon$, $\sin 2\varepsilon$, etc. multiplicirt sind, allein davon sind so wenig, dass man leicht die sich darauf beziehende Rechnung direct wiederholen kann Dasselbe ist in Bezug auf die letzten Decimalen der Coefficienten zu bemerken, die mit mehr Decimalen wie allgemein angesetzt worden sind.

## 83.

Durch die Formeln des Art. 72 ergab sich die Entwickelung der Factoren, womit die Functionen des vor. Art. multiplicirt werden müssen, wie folgt.

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 = 1 + (7.54293) - 2\,(8.683296)\cos g' - 2\,(6.76445)\cos 2g' - 2\,(5.1466)\cos 3g'$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{\alpha^2} = (9.390857) - 2\,(8.318066)\cos\varepsilon + 2\,(6.6448)\cos 2\varepsilon$$

$$-\frac{\sin J}{\alpha}\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f' + \Pi') = -(7.65551) + 2(8.777023)\sin(-g') + 2(7.15921)\sin(-2g') + 2(5.7173)\sin(-3g')$$
$$+ 2(8.494591)\cos(-g') + 2(6.87669)\cos(-2g') + 2(5.4349)\cos(-3g')$$

wo die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen der Coefficienten sind. Hieraus ergiebt sich der Logarithmus des constanten Gliedes in $\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{a^2} = (9.87940)$.

Durch die mechanische Multiplication habe ich hieraus die übrigen Factoren, die gebraucht werden, wie folgt gefunden.

$$\frac{3}{4}\left\{\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \left(\frac{r}{a}\right)\frac{1}{a^2}\right\}^2 = (9.63802) + 2(8.3731)\cos\varepsilon - 2(6.246)\cos 2\varepsilon$$
$$-2(7.4775)\cos(\mp\varepsilon - g') - 2(8.7385)\cos(-g') + 2(7.0350)\cos(-2g')$$

$$-\left\{\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{1}{a^2}\right\}\frac{\sin J}{a}\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+\Pi') = -(7.8088) - 2(5.974)\cos\varepsilon$$
$$+2(7.0950)\sin(\mp\varepsilon - g') + 2(8.6560)\sin(-g') - 2(7.2536)\sin(-3g')$$
$$+2(6.8126)\cos(\mp\varepsilon - g') + 2(8.3770)\cos(-g') - 2(6.971)\cos(-3g')$$

$$3\frac{\sin^2 J}{a^2}\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\sin^2(f'+\Pi') = (8.4377) - 2(6.269)\cos(-g') - 2(7.8931)\cos(-2g') - 2(6.570)\cos(-3g')$$
$$-2(7.2095)\sin(-g') + 2(8.0498)\sin(-2g') + 2(6.732)\sin(-3g')$$

Ferner

$$\frac{\sin J}{a}\left(\frac{r}{a}\right)\sin(f+\Pi) = -(8.0529) + 2(8.0730)\sin\varepsilon$$
$$+2(8.8231)\cos\varepsilon$$

und hiemit

$$\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{1}{a^2}\right\}\frac{\sin J}{a}\left(\frac{r}{a}\right)\sin(f+\Pi) = -(7.9895) + 2(8.4289)\sin\varepsilon + 2(6.567)\sin 2\varepsilon$$
$$+2(8.8763)\cos\varepsilon + 2(7.3472)\cos 2\varepsilon$$
$$+2(6.932)\sin(-\varepsilon - g') \quad \text{———} \quad -2(6.932)\sin(\varepsilon - g')$$
$$-2(7.6825)\cos(-\varepsilon - g') + 2(6.912)\cos(-g') - 2(7.6825)\cos(\varepsilon - g')$$

$$-3\frac{\sin^2 J}{a^2}\left(\frac{r'}{a'}\right)\left(\frac{r}{a}\right)\sin(f'+\Pi')\sin(f+\Pi) = -2(6.9557)\cos\varepsilon$$
$$-2(6.2056)\sin\varepsilon$$
$$+2(7.923)\cos(-\varepsilon - g') - 2(7.024)\cos(-g') + 2(7.614)\cos(\varepsilon - g')$$
$$+2(8.035)\sin(-\varepsilon - g') - 2(7.307)\sin(-g') + 2(8.115)\sin(\varepsilon - g')$$

Nach den Formeln des Art. 73 wurden hierauf die Entwickelungscoefficienten der von $\Delta$ unabhängigen Glieder berechnet, wodurch sich die folgenden Werthe ergaben.

| $\varepsilon$ $g'$ | $(\Pi)$ | | $(J)$ | | $(J)'$ | | $(J)''$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sin | sin | cos | sin | cos | cos |
| 0, 0 | | | | | | −2″20 | +92″60 |
| 1, 0 | | | | | +2″30 | +12.94 | |
| −1, −1 | +0″5258 | +0″6546 | | | −0.17 | +0.94 | |
| 0, −1 | +1.1478 | +3.7434 | −11″596 | −6″052 | 0 | −0.16 | +6.70 |
| 1, −1 | −11.0499 | −14.7578 | | | +0.17 | +0.94 | |
| −1, −2 | +0.0508 | +0.0624 | | | −0.01 | +0.07 | |
| 0, −2 | +0.1107 | +0.3610 | −1.118 | −0.584 | 0 | −0.01 | +0.48 |
| 1, −2 | −1.3548 | −4.3159 | | | +0.01 | +0.07 | |
| −1, −3 | +0.0041 | +0.0051 | | | | | |
| 0, −3 | +0.00900 | +0.02937 | −0.0910 | −0.0475 | | | +0.03 |
| 1, −3 | −0.11022 | −0.35113 | | | | | |
| −1, −4 | +0.0003 | +0.0004 | | | | | |
| 0, −4 | +0.0007 | +0.0022 | −0.007 | −0.004 | | | |
| 1, −4 | −0.0084 | −0.0268 | | | | | |
| 0, −5 | +0.0001 | +0.0002 | | | | | |
| 1, −5 | −0.0006 | −0.0020 | | | | | |

Nachdem hierauf die Multiplicationen und Additionen nach Vorschrift der Ausdrücke des Art. 39 ausgeführt worden waren, ergaben sich die folgenden Werthe der Differentialquotienten der Störungsfunction.

| $\varepsilon$ $g'$ | $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ cos | sin | $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ sin | cos |
|---|---|---|---|---|
| 0, 0 | +26″0661 | | | +4″1704 |
| 1, 0 | −1.96590 | −0″55029 | −2″69831 | −14.55015 |
| 2, 0 | −3.0045 | −1.1089 | +0.6350 | +0.4613 |
| 3, 0 | +0.180 | +0.276 | +0.232 | +0.406 |
| 4, 0 | +0.078 | +0.048 | −0.057 | −0.016 |
| 5, 0 | −0.003 | −0.018 | −0.008 | −0.010 |
| −5, −1 | +0.002 | +0.005 | +0.001 | −0.004 |
| −4, −1 | +0.027 | −0.003 | +0.013 | +0.011 |
| −3, −1 | −0.065 | −0.081 | −0.002 | +0.104 |
| −2, −1 | −0.552 | −0.136 | −0.458 | −0.399 |
| −1, −1 | +1.478 | +2.062 | −0.574 | −1.785 |
| 0, −1 | +2.493 | +1.613 | +8.493 | +4.792 |
| 1, −1 | −3.978 | −11.830 | −2.888 | −2.110 |
| 2, −1 | +0.586 | −0.130 | −8.318 | +1.063 |
| 3, −1 | −0.118 | +2.649 | −0.207 | +0.171 |
| 4, −1 | +0.097 | −0.130 | −0.304 | +0.066 |
| 5, −1 | +0.024 | −0.069 | +0.017 | −0.025 |
| 6, −1 | −0.006 | +0.006 | +0.009 | −0.004 |
| −4, −2 | +0.001 | −0.002 | +0.006 | +0.003 |
| −3, −2 | −0.014 | −0.033 | −0.016 | +0.018 |
| −2, −2 | −0.089 | +0.062 | −0.155 | −0.056 |
| −1, −2 | +0.012 | +0.749 | +0.510 | −0.433 |
| 0, −2 | +1.644 | −2.153 | +2.552 | −0.487 |
| 1, −2 | +5.146 | −5.560 | −11.004 | +10.300 |
| 2, −2 | −32.425 | +22.971 | +2.417 | −1.181 |
| 3, −2 | −0.994 | −0.323 | −1.885 | +4.053 |
| 4, −2 | +1.636 | −0.447 | −0.047 | −0.043 |
| 5, −2 | −0.066 | −0.018 | +0.017 | −0.194 |
| 6, −2 | −0.055 | −0.003 | +0.011 | +0.012 |
| 7, −2 | +0.008 | +0.006 | +0.001 | +0.007 |
| −3, −3 | −0.003 | −0.008 | −0.006 | +0.006 |
| −2, −3 | −0.037 | +0.024 | −0.024 | −0.019 |
| −1, −3 | +0.045 | +0.113 | +0.119 | −0.179 |
| 0, −3 | +0.8200 | −0.3508 | +0.4135 | +0.3559 |
| 1, −3 | −0.8708 | −1.1599 | −1.2724 | +3.4503 |
| 2, −3 | −10.2828 | +0.3568 | −3.5812 | −7.9873 |
| 3, −3 | +18.299 | +13.839 | +0.071 | +1.829 |
| 4, −3 | +0.183 | +0.988 | −1.692 | −1.553 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5,—3 | —0″596 | —0″907 | —0″018 | —0″034 |
| 6,—3 | +0.004 | +0.020 | +0.109 | +0.045 |
| 7,—3 | +0.010 | +0.038 | —0.004 | +0.004 |
| 8,—3 | +0.002 | —0.004 | —0.004 | 0.000 |
| —2,—4 | —0.009 | +0.005 | —0.007 | —0.008 |
| —1,—4 | +0.028 | +0.033 | +0.023 | —0.034 |
| 0,—4 | +0.144 | —0.065 | +0.154 | +0.151 |
| 1,—4 | —0.417 | —0.629 | —0.369 | +0.533 |
| 2,—4 | —1.561 | +0.634 | —2.248 | —1.801 |
| 3,—4 | +2.978 | +7.399 | +4.785 | —0.397 |
| 4,—4 | +4.159 | —11.727 | —1.089 | —0.380 |
| 5,—4 | +0.645 | —0.436 | +0.996 | —0.576 |
| 6,—4 | —0.409 | +0.515 | +0.036 | —0.022 |
| 7,—4 | —0.004 | —0.003 | —0.043 | +0.052 |
| 8,—4 | +0.022 | —0.013 | —0.001 | —0.003 |
| 9,—4 | —0.002 | —0.001 | | |
| —1,—5 | +0.008 | +0.010 | +0.011 | —0.006 |
| 0,—5 | +0.031 | —0.029 | +0.035 | +0.033 |
| 1,—5 | —0.087 | —0.155 | —0.153 | +0.129 |
| 2,—5 | —0.475 | +0.405 | —0.455 | —0.387 |
| 3,—5 | +0.667 | +1.424 | +1.673 | —1.080 |
| 4,—5 | +4.154 | —3.576 | —0.665 | +2.466 |
| 5,—5 | —6.493 | —0.230 | +0.442 | —0.531 |
| 6,—5 | —0.446 | —0.301 | +0.127 | +0.551 |
| 7,—5 | +0.359 | +0.132 | +0.008 | +0.034 |
| 8,—5 | +0.005 | +0.010 | —0.020 | —0.033 |
| 9,—5 | —0.012 | —0.011 | +0.001 | 0.000 |
| 10,—5 | —0.001 | +0.001 | | |
| 0,—6 | +0.010 | —0.009 | +0.008 | +0.011 |
| 1,—6 | —0.028 | —0.029 | —0.039 | +0.030 |
| 2,—6 | —0.132 | +0.103 | —0.091 | —0.135 |
| 3,—6 | +0.345 | +0.336 | +0.379 | —0.304 |
| 4,—6 | +1.071 | —0.763 | +0.321 | +1.238 |
| 5,—6 | —2.999 | —1.804 | —1.086 | —0.769 |
| 6,—6 | +0.873 | +3.497 | +0.203 | +0.342 |
| 7,—6 | —0.062 | +0.344 | —0.271 | —0.019 |
| 8,—6 | +0.001 | —0.301 | —0.023 | +0.001 |
| 9,—6 | +0.005 | —0.007 | +0.021 | —0.004 |
| 10,—6 | —0.004 | +0.009 | +0.001 | +0.001 |
| 1,—7 | —0.010 | —0.008 | —0.009 | +0.006 |
| 2,—7 | —0.026 | +0.030 | —0.022 | —0.040 |
| 3,—7 | +0.103 | +0.097 | +0.117 | —0.059 |
| 4,—7 | +0.232 | —0.287 | +0.152 | +0.335 |
| 5,—7 | —0.749 | —0.655 | —0.776 | —0.058 |
| 6,—7 | —0.471 | +2.063 | +0.566 | —0.386 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7, −7 | +1″.398 | −0″.887 | −0″.215 | +0″.044 |
| 8, −7 | +0.215 | −0.035 | +0.043 | −0.121 |
| 9, −7 | −0.118 | +0.037 | +0.006 | −0.014 |
| 10, −7 | −0.008 | +0.003 | −0.001 | +0.011 |
| 2, −8 | −0.007 | +0.010 | −0.005 | −0.010 |
| 3, −8 | +0.028 | +0.019 | +0.036 | −0.012 |
| 4, −8 | +0.063 | −0.093 | +0.029 | +0.094 |
| 5, −8 | −0.244 | −0.142 | −0.253 | +0.041 |
| 6, −8 | −0.308 | +0.631 | +0.179 | −0.421 |
| 7, −8 | +1.229 | −0.106 | +0.082 | +0.340 |
| 8, −8 | −0.617 | −0.531 | +0.016 | −0.119 |
| 9, −8 | −0.068 | −0.113 | +0.048 | +0.035 |
| 10, −8 | +0.038 | +0.053 | +0.009 | +0.006 |
| 3, −9 | +0.009 | +0.005 | | |
| 4, −9 | +0.015 | −0.026 | | |
| 5, −9 | −0.081 | −0.036 | | |
| 6, −9 | −0.069 | +0.198 | | |
| 7, −9 | +0.458 | +0.083 | | |
| 8, −9 | −0.253 | −0.644 | | |
| 9, −9 | −0.162 | +0.357 | | |
| 10, −9 | −0.047 | +0.062 | | |
| 11, −9 | +0.020 | −0.028 | | |
| 4, −10 | +0.003 | −0.009 | | |
| 5, −10 | −0.025 | −0.009 | | |
| 6, −10 | −0.018 | +0.065 | | |
| 7, −10 | +0.150 | +0.025 | | |
| 8, −10 | −0.037 | −0.304 | | |
| 9, −10 | −0.297 | +0.249 | | |
| 10, −10 | +0.186 | +0.025 | | |
| 11, −10 | +0.045 | +0.015 | | |

| $\varepsilon \quad g'$ | $ar^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right) + ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ | | $a^2r\left(\frac{d^2\Omega}{drdZ}\right)$ | | $a^3\left(\frac{d^2\Omega}{dZ^2}\right)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sin | sin | cos | cos | sin |
| 0, 0 | +62″.31 | | | +11″.63 | −62″.30 | |
| 1, 0 | −3.64 | −1″.93 | −5″.63 | −28.86 | −0.15 | +2″.27 |
| 2, 0 | −11.91 | −4.48 | +2.24 | +1.65 | +7.98 | +3.01 |
| 3, 0 | +1.05 | +1.56 | +1.05 | +2.01 | −0.29 | −0.90 |
| 4, 0 | +0.55 | +0.41 | −0.41 | −0.15 | −0.37 | −0.24 |
| −3, −1 | −0.58 | −0.61 | −0.01 | +0.68 | +0.42 | +0.42 |
| −2, −1 | −2.56 | −0.67 | −2.04 | −1.58 | +1.89 | +0.16 |
| −1, −1 | +7.16 | +9.36 | −1.76 | −4.88 | −6.93 | −8.97 |
| 0, −1 | +6.26 | +4.35 | +23.78 | +13.53 | −5.78 | −1.62 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,−1 | −12″61 | −38″76 | −9″84 | −5″13 | +10″95 | +35″24 |
| 2,−1 | +0.51 | −1.03 | +23.60 | +2.75 | +1.46 | +1.31 |
| 3,−1 | −0.57 | +11.35 | −0.77 | +0.80 | +0.23 | −5.61 |
| 4,−1 | +0.67 | −0.88 | −1.73 | +0.39 | −0.38 | +0.29 |
| −2,−2 | −0.48 | +0.41 | −0.80 | −0.24 | +0.40 | −0.57 |
| −1,−2 | +0.13 | +3.69 | +2.04 | −1.64 | −0.61 | −2.82 |
| 0,−2 | +6.67 | −9.14 | +7.05 | −0.81 | −7.52 | +10.05 |
| 1,−2 | +11.29 | −14.23 | −22.56 | +20.31 | −0.13 | +6.17 |
| 2,−2 | −74.95 | +53.07 | +8.28 | −5.57 | +15.52 | −10.44 |
| 3,−2 | −4.09 | +0.10 | −7.13 | +15.41 | +1.22 | −1.52 |
| 4,−2 | +8.77 | −2.33 | −0.33 | −0.17 | −3.43 | +0.85 |
| 5,−2 | −0.47 | −0.14 | +0.12 | −1.34 | +0.12 | +0.16 |
| −1,−3 | +0.36 | +0.54 | +0.59 | −0.86 | −0.63 | −0.40 |
| 0,−3 | +3.93 | −1.57 | +1.34 | +1.98 | −3.33 | +1.86 |
| 1,−3 | −6.78 | −4.00 | −2.22 | +8.94 | +9.66 | +3.70 |
| 2,−3 | −28.01 | −2.24 | −10.05 | −23.60 | +4.25 | −1.12 |
| 3,−3 | +58.94 | +44.57 | +1.26 | +8.03 | −6.58 | −5.59 |
| 4,−3 | +1.85 | +4.73 | −7.98 | −7.35 | −1.43 | −0.65 |
| 5,−3 | −3.73 | −5.67 | −0.14 | −0.27 | +1.09 | +1.76 |
| 6,−3 | +0.01 | +0.10 | +0.84 | +0.41 | +0.07 | −0.05 |
| 0,−4 | +0.93 | −0.39 | +0.77 | +0.78 | −0.48 | +0.66 |
| 1,−4 | −2.39 | −3.34 | −1.67 | +1.56 | +2.86 | +2.70 |
| 2,−4 | −4.08 | +4.57 | −7.95 | −5.30 | +0.55 | −7.33 |
| 3,−4 | +8.23 | +27.48 | +18.59 | −1.19 | −1.28 | −2.25 |
| 4,−4 | +17.30 | −48.66 | −5.88 | −1.44 | −1.63 | +3.39 |
| 5,−4 | +3.52 | −3.16 | +5.36 | −3.23 | −0.12 | +1.12 |
| 6,−4 | −2.89 | +3.67 | +0.35 | −0.21 | +0.72 | −0.86 |
| 7,−4 | −0.01 | +0.01 | | | | |
| 1,−5 | −0.55 | −0.81 | | | | |
| 2,−5 | −2.41 | +2.87 | | | | |
| 3,−5 | +3.64 | +4.62 | | | | |
| 4,−5 | +19.85 | −14.64 | | | | |
| 5,−5 | −33.02 | −1.21 | | | | |
| 6,−5 | −3.34 | −1.94 | | | | |
| 7,−5 | +2.81 | +1.08 | | | | |
| 8,−5 | +0.06 | −0.08 | | | | |

| $\varepsilon$ $g'$ | $aa'\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ sin | cos | $aa'r\left(\frac{d^2\Omega}{drdZ}\right)$ sin | cos | $a^2a'\left(\frac{d^2\Omega}{dZdZ'}\right)$ cos | sin |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0, 0 | | −4.74 | | −19.21 | +52.60 | |
| 1, 0 | +1.94 | +9.76 | +7.69 | +36.88 | −2.67 | −5.61 |
| 2, 0 | −1.21 | −0.96 | −4.60 | −3.62 | −12.73 | −4.78 |
| 3, 0 | −0.41 | −0.55 | −1.34 | −3.25 | +0.67 | +1.71 |
| −2,−1 | +0.55 | +0.41 | +3.00 | +2.07 | −3.05 | −0.25 |
| −1,−1 | +1.18 | +2.03 | +3.66 | +7.87 | +9.40 | +12.64 |
| 0,−1 | −13.52 | −7.38 | −39.67 | −22.88 | +8.40 | +6.31 |
| 1,−1 | +5.21 | +2.29 | +18.77 | +8.53 | −26.96 | −86.20 |
| 2,−1 | −14.84 | −1.92 | −45.02 | −5.39 | −2.66 | −0.87 |
| 3,−1 | +0.50 | −0.33 | +2.23 | −1.76 | −0.59 | +9.87 |
| −1,−2 | −0.28 | +0.45 | −2.05 | +2.47 | +0.93 | +4.23 |
| 0,−2 | −3.30 | −0.08 | −11.55 | +0.26 | +8.00 | −9.73 |
| 1,−2 | +6.94 | −5.89 | +26.91 | −22.71 | +1.59 | −17.19 |
| 2,−2 | −4.21 | +2.72 | −15.41 | +11.97 | −40.03 | +27.56 |
| 3,−2 | +3.69 | −7.89 | +14.17 | −30.62 | −1.71 | +2.47 |
| 4,−2 | +0.06 | +0.16 | +0.50 | +0.82 | +6.30 | −1.69 |

Die Störungsfunction selbst habe ich hier nicht angeführt, da man um sie zu erhalten nur den angeführten Ausdruck von $(H)$ von $\mu a\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ abzuziehen braucht.

Wenn man die Function $\left\{\left(\frac{r'}{a}\right)^2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{1}{a}\right\}$ für Einen Factor rechnet, so sind eben so viele Producte wie Differentialquotienten zu berechnen, um letztere zu erhalten, also acht Producte. Von diesen sind die beiden, welche für $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ und $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ erforderlich sind, die mühsamsten, weil diese beiden genauer wie die übrigen, und in grösserer Ausdehnung berechnet werden müssen. Die beiden dahin gehörigen Producte haben mir im Ganzen zwei Tage Arbeit verursacht. Die übrigen sechs Producte verursachen im Verhältniss zu ihrer Anzahl wesentlich weniger Arbeit.

Die Controle dieser Producte wird eben so bewirkt, wie im Art. 82 erklärt worden ist, nemlich dadurch, dass man $\varepsilon = 0$ setzt, und mit der kleinen Anzahl von Gliedern, in welche sich dadurch die Factoren zusammen ziehen, dieselbe Multiplication wieder ausführt.

Ich habe, wie man sieht, die sechs zur Berechnung der Störungen der zweiten Ordnung erforderlichen Differentialquotienten der Störungsfunction in Hunderttheilen von Secunden berechnet. Da aber dieses

jedenfalls weit genauer wie nöthig ist, so habe ich in diesen nicht so viele Sorgfalt auf die letzte Decimale verwandt, wie in jenen.

Dieselben Differentialquotienten für dieselben Planeten habe ich vor einem Paar Jahren bereits auf ganz andere Art berechnet, und zwischen diesen und jenen Werthen derselben bis auf ein Paar kleine Unterschiede, die im Endresultat nur sehr wenig hervorbringen können, eine gewünschte Übereinstimmung gefunden. Nur in $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ findet ein etwas grösserer Unterschied in einigen Gliedern statt, welcher davon herrührt, dass ich in den älteren Rechnungen ein Glied übergangen hatte. Es können in den Breitenstörungen schliesslich Unterschiede von einem Paar Secunden daraus hervorgehen.

## 84.

Zur Beendigung der Vorbereitungen für die schliessliche Berechnung der Störungen ist erforderlich, dass die im vor. Art. in der Form

$$((i,i',c))\cos(i\varepsilon - i'g') + ((i,i',s))\sin(i\varepsilon - i'g')$$

berechneten Functionen auf die Form

$$[i,i',c]\cos\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\} + [i,i',s]\sin\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\}$$

hingeführt werden, welche Verwandelung im Art. 74 erklärt worden ist. In der Anwendung dieser Functionen werden aber $a\Omega$ und $aa'\left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right)$ selbst nicht gebraucht werden, sondern statt dessen $a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$ und $aa'\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon dZ'}\right)$, und es ist daher angemessen, die Verwandelung mit diesen, statt mit jenen vorzunehmen. Es ist aber

$$a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) = -\Sigma\Sigma(i)\,((\omega,i',c))\sin(\omega\varepsilon - i'g') + \Sigma\Sigma(i)\,((\omega,i',s))\cos(\omega\varepsilon - i'g')$$

wenn

$$a\Omega = \Sigma\Sigma((\omega,i',c))\cos(\omega\varepsilon - i'g') + \Sigma\Sigma((\omega,i',s))\sin(\omega\varepsilon - i'g')$$

gesetzt wird, und auf dieselbe Weise entsteht $aa'\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon dZ'}\right)$ aus $aa'\left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right)$. Es wird sich zeigen, dass es etwas einfacher ist, statt dieser Differentiationen das blose Product der beiden zu differentiirenden Functionen mit $(i)$ anzuwenden, und ich werde daher im Folgenden

$$(i)\,a\Omega = \Sigma\Sigma(i)\,((\omega,i',c))\cos(\omega\varepsilon - i'g') + \Sigma\Sigma(i)\,((\omega,i',s))\sin(\omega\varepsilon - i'g')$$

statt $a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$, und dem analog

$$(i)\,aa'\left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right) \text{ statt } aa'\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon dZ'}\right)$$

in die angeführte Form verwandeln.

Hiefür findet man erst

$$\log \lambda = 8.169915$$

und hieraus nach Art. 74 die folgenden Logarithmen der Coefficienten des Ausdrucks von $\frac{\pi'^{-i'}}{\pi^{-i'}} - y^{-i'}\mu$ durch $y^{i-i'}\mu$

| $i'$ | $i=0$ | $i=1$ | $i=2$ | $i=3$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6.3398n | 8.16987 | 6.0388 | |
| 2 | 6.9418n | 8.47076 | 6.6407 | 4.635 |
| 3 | 7.2939n | 8.64661 | 6.9928 | 5.163 |
| 4 | 7.5436n | 8.77122 | 7.2424 | 5.537 |
| 5 | 7.7372n | 8.86770 | 7.4360 | 5.828 |
| 6 | 7.8954n | 8.94636 | 7.5940 | 6.065 |
| 7 | 8.0289n | 9.01269 | 7.7275 | 6.266 |
| 8 | 8.1445n | 9.06996 | 7.8430 | 6.439 |
| 9 | 8.2464n | 9.12030 | 7.9447 | 6.592 |
| 10 | 8.3375n | 9.16516 | 8.0356 | 6.729 |

Hiemit ergab sich

| $\varepsilon$ $\mu\varepsilon$ | $(i)\,a\Omega$ | | $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ | | $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sin | cos | sin | sin | cos |
| 0, 0 | | | +26″0661 | | | +4″1704 |
| 1, 0 | −0″92269 | −0″15560 | −1.96591 | −0″55029 | −2″69831 | −14.55015 |
| 2, 0 | −1.9480 | −0.7179 | −3.0045 | −1.1089 | +0.6350 | +0.4613 |
| 3, 0 | +0.102 | +0.170 | +0.180 | +0.276 | +0.232 | +0.406 |
| 4, 0 | +0.051 | +0.032 | +0.078 | +0.048 | −0.057 | −0.016 |
| 5, 0 | −0.003 | −0.012 | −0.003 | −0.018 | −0.008 | −0.010 |
| −5, −1 | −0.001 | −0.002 | +0.002 | +0.005 | +0.001 | −0.004 |
| −4, −1 | −0.017 | 0.000 | +0.028 | −0.002 | +0.013 | +0.009 |
| −3, −1 | +0.033 | +0.044 | −0.057 | −0.079 | +0.005 | +0.110 |
| −2, −1 | +0.286 | +0.058 | −0.575 | −0.167 | −0.448 | −0.371 |
| −1, −1 | −0.342 | −0.523 | +1.433 | +2.035 | −0.707 | −1.862 |
| 0, −1 | +0.014 | +0.046 | +2.574 | +1.818 | +8.526 | +4.796 |
| 1, −1 | −1.305 | −3.699 | −3.949 | −11.801 | −2.885 | −2.055 |
| 2, −1 | +0.638 | −0.246 | +0.529 | −0.342 | +8.277 | +1.029 |
| 3, −1 | −0.078 | +1.851 | −0.110 | +2.468 | −0.079 | +0.186 |
| 4, −1 | +0.065 | −0.058 | +0.095 | −0.092 | −0.306 | +0.069 |
| 5, −1 | +0.018 | −0.051 | +0.025 | −0.071 | +0.012 | −0.024 |
| 6, −1 | −0.007 | +0.004 | −0.006 | +0.005 | | |
| −4, −2 | −0.002 | +0.002 | +0.001 | −0.001 | +0.006 | +0.003 |
| −3, −2 | +0.005 | +0.018 | −0.011 | −0.035 | −0.011 | +0.020 |
| −2, −2 | +0.039 | −0.020 | −0.088 | +0.038 | −0.169 | −0.043 |
| −1, −2 | +0.008 | −0.189 | −0.037 | +0.811 | +0.425 | −0.416 |
| 0, −2 | −0.085 | +0.071 | +1.477 | −1.954 | +2.891 | −0.806 |
| 1, −2 | +3.308 | −2.931 | +6.148 | −6.297 | −10.992 | +10.314 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2, −2 | −29″.906 | +21″.098 | −32″.214 | +22″.795 | +2″.147 | −0″.995 |
| 3, −2 | −1.780 | +0.217 | −1.998 | +0.367 | −1.815 | +4.020 |
| 4, −2 | +1.290 | −0.363 | +1.594 | −0.446 | −0.102 | +0.082 |
| 5, −2 | −0.006 | −0.023 | −0.016 | −0.031 | +0.015 | −0.193 |
| 6, −2 | −0.042 | −0.003 | −0.056 | −0.004 | +0.011 | +0.006 |
| 7, −2 | +0.003 | +0.003 | +0.006 | +0.006 | | |
| −3, −3 | +0.001 | +0.003 | −0.001 | −0.009 | −0.005 | +0.007 |
| −2, −3 | +0.011 | −0.008 | −0.038 | +0.019 | −0.029 | −0.011 |
| −1, −3 | −0.006 | −0.027 | +0.006 | +0.129 | +0.099 | −0.193 |
| 0, −3 | −0.0088 | +0.0184 | +0.8486 | −0.2935 | +0.4709 | +0.1866 |
| 1, −3 | +0.38142 | −0.46143 | −0.3591 | −1.1753 | −1.0926 | +3.8148 |
| 2, −3 | −8.8679 | +0.7201 | −11.1112 | −0.3079 | −3.6350 | −7.9009 |
| 3, −3 | +17.056 | +13.239 | +17.797 | +13.782 | −0.014 | +1.543 |
| 4, −3 | +0.838 | +1.509 | +1.010 | +1.639 | −1.689 | −1.475 |
| 5, −3 | −0.489 | −0.697 | −0.569 | −0.848 | −0.098 | −0.103 |
| 6, −3 | −0.018 | −0.021 | −0.022 | −0.021 | +0.106 | +0.041 |
| 7, −3 | +0.009 | +0.029 | +0.009 | +0.038 | +0.001 | +0.006 |
| 8, −3 | +0.002 | −0.002 | +0.002 | −0.002 | | |
| −2, −4 | +0.003 | −0.002 | −0.012 | +0.003 | −0.008 | −0.006 |
| −1, −4 | −0.004 | −0.006 | +0.018 | +0.036 | +0.013 | −0.042 |
| 0, −4 | +0.002 | +0.008 | +0.169 | −0.025 | +0.173 | +0.114 |
| 1, −4 | +0.911 | −0.144 | −0.310 | −0.655 | −0.218 | +0.645 |
| 2, −4 | −1.395 | −0.143 | −1.750 | +0.138 | −2.547 | −1.741 |
| 3, −4 | +2.843 | +6.825 | +2.631 | +8.101 | +4.700 | −0.480 |
| 4, −4 | +4.193 | −10.976 | +4.278 | −11.221 | −0.865 | −0.373 |
| 5, −4 | +0.872 | −1.013 | +0.917 | −1.144 | +0.935 | −0.596 |
| 6, −4 | −0.314 | +0.413 | −0.363 | +0.467 | +0.096 | −0.058 |
| 7, −4 | −0.024 | +0.023 | −0.028 | +0.027 | −0.039 | +0.050 |
| 8, −4 | +0.017 | −0.011 | +0.021 | −0.012 | −0.004 | 0.000 |
| 9, −4 | 0.000 | −0.002 | −0 001 | −0.002 | | |
| −1, −5 | −0.001 | −0.002 | +0.006 | +0.012 | +0.008 | −0.008 |
| 0, −5 | 0.000 | +0.002 | +0.037 | −0.016 | +0.046 | +0.022 |
| 1, −5 | +0.003 | −0.039 | −0.048 | −0.182 | −0.111 | +0.156 |
| 2, −5 | −0.263 | +0.025 | −0.516 | +0.277 | −0.589 | −0.288 |
| 3, −5 | +0.205 | +1.494 | +0.304 | +1.709 | +1.681 | −1.286 |
| 4, −5 | +4.004 | −3.387 | +4.657 | −3.434 | −0.572 | +2.412 |
| 5, −5 | −6.075 | −0.465 | −6.414 | −0.467 | +0.387 | −0.390 |
| 6, −5 | −0.863 | −0.334 | −0.938 | −0.336 | +0.456 | +0.513 |
| 7, −5 | +0.279 | +0.095 | +0.305 | +0.107 | +0.019 | +0.076 |
| 8, −5 | +0.026 | +0.014 | +0.032 | +0.020 | −0.019 | −0.028 |
| 9, −5 | −0.010 | −0.009 | −0.014 | −0.010 | 0.000 | −0.002 |
| 10, −5 | 0.000 | +0.001 | −0.002 | 0.000 | | |
| 0, −6 | 0.000 | 0.000 | +0.013 | −0.006 | +0.011 | +0.007 |
| 1, −6 | +0.0008 | −0.0080 | −0.014 | −0.037 | −0.029 | +0.042 |
| 2, −6 | −0.0615 | +0.0085 | −0.160 | +0.067 | −0.125 | −0.099 |
| 3, −6 | +0.0617 | +0.2911 | +0.224 | +0.403 | +0.336 | −0.426 |
| 4, −6 | +1.217 | −0.511 | +1.361 | −0.555 | +0.448 | +1.269 |
| 5, −6 | −2.851 | −1.829 | −2.957 | −2.139 | −1.067 | −0.685 |
| 6, −6 | +0.620 | +2.989 | +0.610 | +2.979 | +0.130 | +0.278 |
| 7, −6 | −0.021 | +0.596 | +0.003 | +0.644 | −0.253 | +0.008 |
| 8, −6 | 0.000 | −0.162 | −0.001 | −0.255 | −0.048 | 0.000 |
| 9, −6 | +0.005 | −0.024 | +0.005 | −0.034 | +0.018 | −0.004 |
| 10, −6 | −0.004 | +0.007 | −0.004 | +0.007 | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,−7 | 0"000 | −0"002 | −0"006 | −0"010 | −0"006 | +0"010 |
| 2,−7 | −0.014 | +0.002 | −0.037 | +0.017 | −0.034 | −0.031 |
| 3,−7 | +0.018 | +0.069 | +0.071 | +0.126 | +0.094 | −0.096 |
| 4,−7 | +0.273 | −0.104 | +0.315 | −0.196 | +0.245 | +0.329 |
| 5,−7 | −0.632 | −0.784 | −0.661 | −0.894 | −0.810 | +0.017 |
| 6,−7 | −0.555 | +1.984 | −0.685 | +2.063 | +0.503 | −0.392 |
| 7,−7 | +1.320 | −0.678 | +1.308 | −0.665 | −0.163 | +0.016 |
| 8,−7 | +0.330 | −0.109 | +0.366 | −0.119 | +0.023 | −0.116 |
| 9,−7 | −0.082 | +0.029 | −0.087 | +0.028 | +0.009 | −0.026 |
| 10,−7 | −0.016 | +0.002 | −0.019 | +0.007 | | |
| 2,−8 | −0.003 | +0.001 | −0.010 | +0.007 | −0.009 | −0.008 |
| 3,−8 | +0.006 | +0.016 | +0.018 | +0.030 | +0.030 | −0.024 |
| 4,−8 | +0.063 | −0.030 | +0.092 | −0.069 | +0.064 | +0.084 |
| 5,−8 | −0.132 | −0.206 | −0.189 | −0.226 | −0.266 | +0.103 |
| 6,−8 | −0.426 | +0.590 | −0.482 | +0.612 | +0.137 | −0.450 |
| 7,−8 | +1.207 | −0.027 | +1.246 | +0.029 | +0.098 | +0.300 |
| 8,−8 | −0.466 | −0.528 | −0.457 | −0.519 | +0.021 | −0.084 |
| 9,−8 | −0.151 | −0.179 | −0.134 | −0.180 | +0.049 | +0.022 |
| 10,−8 | +0.023 | +0.033 | +0.025 | +0.035 | +0.015 | +0.009 |
| 3,−9 | +0.003 | +0.004 | +0.006 | +0.008 | | |
| 4,−9 | +0.016 | −0.010 | +0.026 | −0.018 | | |
| 5,−9 | −0.042 | −0.032 | −0.065 | −0.063 | | |
| 6,−9 | −0.075 | −0.001 | −0.141 | +0.173 | | |
| 7,−9 | +0.466 | +0.145 | +0.472 | +0.196 | | |
| 8,−9 | −0.202 | −0.644 | −0.169 | −0.667 | | |
| 9,−9 | −0.186 | +0.271 | −0.182 | +0.261 | | |
| 10,−9 | −0.071 | +0.101 | −0.072 | +0.106 | | |
| 11,−9 | +0.012 | −0.018 | +0.013 | −0.017 | | |
| 4,−10 | +0.004 | −0.003 | +0.007 | −0.007 | | |
| 5,−10 | −0.010 | −0.015 | −0.020 | −0.020 | | |
| 6,−10 | −0.038 | +0.036 | −0.044 | +0.056 | | |
| 7,−10 | +0.123 | +0.076 | +0.146 | +0.083 | | |
| 8,−10 | +0.022 | −0.307 | +0.032 | −0.329 | | |
| 9,−10 | −0.305 | +0.204 | −0.321 | +0.195 | | |
| 10,−10 | +0.144 | +0.056 | +0.138 | +0.059 | | |

| $\varepsilon$, $\mu\varepsilon$ | $ar^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right)+ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ | | $a^2r\left(\frac{d^2\Omega}{drdZ}\right)$ | | $a^3\left(\frac{d^2\Omega}{dZ^2}\right)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sin | sin | cos | cos | sin |
| 0, 0 | +62"31 | | | +11"63 | −62"30 | |
| 1, 0 | −3.64 | −1"93 | −5"63 | −28.86 | −0.15 | +2"27 |
| 2, 0 | −11.91 | −4.48 | +2.24 | +4.65 | +7.98 | +3.01 |
| 3, 0 | +1.05 | +1.56 | +1.05 | +2.01 | −0.29 | −0.90 |
| 4, 0 | +0.55 | +0.41 | −0.41 | −0.15 | −0.37 | −0.24 |
| −3,−1 | −0.54 | −0.60 | +0.02 | +0.70 | +0.39 | +0.42 |
| −2,−1 | −2.68 | −0.82 | −2.01 | −1.50 | +2.00 | +0.30 |
| −1,−1 | +7.03 | +9.29 | −2.14 | −5.10 | −6.81 | −8.95 |
| 0,−1 | +6.56 | +5.06 | +23.90 | +13.54 | −6.04 | −2.27 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,−1 | −12″53 | −38″67 | −9″84 | −4″97 | +10″84 | +35″19 |
| 2,−1 | +0.33 | −1.77 | +23.46 | +2.66 | +1.62 | +1.91 |
| 3,−1 | −0.57 | +11.34 | −0.39 | +0.83 | +0.26 | −5.59 |
| 4,−1 | +0.66 | −0.71 | −1.74 | +0.40 | −0.38 | +0.21 |
| −2,−2 | −0.48 | +0.30 | −0.86 | −0.19 | +0.42 | −0.49 |
| −1,−2 | −0.08 | +3.96 | +1.80 | −1.62 | −0.38 | −3.14 |
| 0,−2 | +6.30 | −8.58 | +7.78 | −1.46 | −7.52 | +9.78 |
| 1,−2 | +13.70 | −16.06 | −22.57 | +20.45 | −0.81 | +6.77 |
| 2,−2 | −74.43 | +52.60 | +7.81 | −5.43 | +15.47 | −10.20 |
| 3,−2 | −6.57 | +1.73 | −6.88 | +15.24 | +1.78 | −1.86 |
| 4,−2 | +8.62 | −2.31 | −0.54 | +0.33 | −3.38 | +0.80 |
| 5,−2 | −0.21 | −0.21 | +0.11 | −1.33 | +0.02 | +0.19 |
| −1,−3 | +0.18 | +0.61 | +0.53 | −0.94 | −0.47 | −0.48 |
| 0,−3 | +4.21 | −1.37 | +1.46 | +1.52 | −3.78 | +1.68 |
| 1,−3 | −5.30 | −3.92 | −1.71 | +10.07 | +9.29 | +3.81 |
| 2,−3 | −30.86 | −4.40 | −10.19 | −23.52 | +4.96 | −0.71 |
| 3,−3 | +57.49 | +44.16 | +1.16 | +7.30 | −6.31 | −5.60 |
| 4,−3 | +4.60 | +6.95 | −7.91 | −6.99 | −1.77 | −0.98 |
| 5,−3 | −3.58 | −5.41 | −0.53 | −0.61 | +1.02 | +1.72 |
| 6,−3 | −0.16 | −0.15 | +0.82 | +0.39 | +0.12 | +0.03 |
| 0,−4 | +1.06 | −0.18 | +0.86 | +0.68 | −0.65 | +0.50 |
| 1,−4 | −2.07 | −3.57 | −1.11 | +1.91 | +2.79 | +3.16 |
| 2,−4 | −4.66 | +2.64 | −9.13 | −5.12 | +0.80 | −7.00 |
| 3,−4 | +6.95 | +30.51 | +18.41 | −1.41 | −1.15 | −2.87 |
| 4,−4 | +17.50 | −46.67 | +5.09 | −1.33 | −1.69 | +3.17 |
| 5,−4 | +4.71 | −6.20 | +5.00 | −3.30 | −0.26 | +1.37 |
| 6,−4 | −2.64 | +3.38 | +0.66 | −0.40 | +0.71 | −0.78 |
| 7,−4 | −0.17 | +0.22 | | | | |
| 1,−5 | −0.36 | −1.01 | | | | |
| 2,−5 | −2.65 | +2.41 | | | | |
| 3,−5 | +1.89 | +5.88 | | | | |
| 4,−5 | +22.43 | −14.12 | | | | |
| 5,−5 | −31.11 | −2.13 | | | | |
| 6,−5 | −5.92 | −2.14 | | | | |
| 7,−5 | +2.45 | +0.94 | | | | |
| 8,−5 | +0.26 | 0.00 | | | | |

| $\varepsilon$, $\mu\varepsilon$ | $(i)\,aa'\left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right)$ sin | cos | $aa'r\left(\frac{d^2\Omega}{drdZ}\right)$ sin | cos | $a^2a'\left(\frac{d^2\Omega}{dZdZ}\right)$ cos | sin |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0, 0 | | | | −19″21 | +52″60 | |
| 1, 0 | +1″94 | +9″76 | +7″69 | +36.88 | −2.67 | −5″61 |
| 2, 0 | −2.42 | −1.92 | −4.60 | −3.62 | −12.73 | −4.78 |
| 3, 0 | −1.23 | −1.65 | −1.34 | −3.25 | +0.67 | +1.71 |
| −2, −1 | −1.08 | −0.79 | +2.95 | +1.95 | −3.19 | −0.44 |
| −1, −1 | −1.20 | −2.04 | +4.30 | +8.24 | +9.23 | +12.54 |
| 0, −1 | −0.10 | −0.06 | −39.89 | −22.88 | +8.94 | +7.78 |
| 1, −1 | +5.65 | +2.35 | +18.85 | +8.27 | −26.79 | −86.08 |
| 2, −1 | −29.61 | −3.82 | −44.76 | −5.23 | −3.05 | −2.30 |
| 3, −1 | +1.06 | −1.05 | +1.56 | −1.84 | −0.63 | +9.85 |
| −1, −2 | +0.28 | −0.45 | −1.70 | +2.45 | +0.69 | +4.51 |
| 0, −2 | −0.20 | +0.18 | −12.41 | +1.01 | +7.95 | −9.07 |
| 1, −2 | +7.18 | −6.04 | +27.02 | −23.05 | +3.01 | −18.28 |
| 2, −2 | −8.53 | +5.97 | −15.02 | +12.20 | −39.89 | +26.96 |
| 3, −2 | +10.80 | −23.51 | +13.70 | −30.26 | −3.08 | +3.33 |
| 4, −2 | +0.57 | −0.06 | +0.91 | −0.08 | +6.22 | −1.61 |

Es wird wohl nicht nöthig sein, von dieser Verwandelung ein Beispiel herzusetzen, da die Rechnung so einfach ist und grosse Ähnlichkeit mit der Verwandelung von $\varepsilon'$ in $g'$ hat. Über die Controle dieser zweiten Verwandelung muss aber etwas bemerkt werden. Die Anwendung eines solchen Verfahrens, wie bei den vorhergehenden Rechnungen, würde hier nicht angemessen sein, indem dadurch alle Glieder, die mit den ungraden Potenzen von $y$ multiplicirt sind, uncontrolirt bleiben würden, und unter diesen befinden sich die grössten. Jenes Verfahren kam darauf hinaus, $\varepsilon = 0$ zu setzen, hier muss man vielmehr $\varepsilon = 90^0$ oder $\varepsilon = -90^0$ setzen, und mit den darauf zusammengezogenen Ausdrücken die Rechnung wiederholen. Für die erstgenannte Substitution steht die Rechnung so. Sowohl für die Form

$$((i,i',c))\cos(i\varepsilon - i'g') + ((i,i',s))\sin(i\varepsilon - i'g')$$

wie für die Form

$$[i,i',c]\cos\{(i-\mu i')\,\varepsilon - i'(c'-\mu c)\}$$
$$+ [i,i',s]\sin\{(i-\mu i')\,\varepsilon - i'(c'-\mu c)\}$$

bilde man in jeder Abtheilung die Summen der Coefficienten nach folgendem Schema

$$\begin{array}{lcl}
\text{etc.} & & \text{etc.} \\
+((-4,i',c)) & & +((-4,i',s)) \\
+((-3,i',s)) & & -((-3,i',c)) \\
-((-2,i',c)) & & -((-2,i',s)) \\
-((-1,i',s)) & & +((-1,i',c)) \\
+((0,i',c)) & & +((0,i',s)) \\
+((1,i',s)) & & -((1,i,c)) \\
-((2,i',c)) & & -((2,i',s)) \\
-((3,i',s)) & & +((3,i',c)) \\
+((4,i',c)) & \cdot & +((4,i',s)) \\
\text{etc.} & & \text{etc.}
\end{array}$$

und eben so die Summen der Coefficienten $[i,i',c]$ und $[i,i',s]$. Nennt man diese Summen der Reihe nach

$$((C))\,;\ ((S))\,;\ [C]\,;\ [S]$$

so erhält man die Bedingungsgleichungen

$$[C] = ((C))\,J^{(0)}_{i\lambda} + 2\,((S))\,J^{(1)}_{i\lambda} - 2\,((C))\,J^{(2)}_{i\lambda} - 2\,((S))\,J^{(3)}_{i\lambda} \pm \ldots$$

$$[S] = ((S))\,J^{(0)}_{i\lambda} - 2\,((C))\,J^{(1)}_{i\lambda} - 2\,((S))\,J^{(2)}_{i\lambda} + 2\,((C))\,J^{(3)}_{i\lambda} \pm \ldots$$

Auch hier verfährt man am vortheilhaftesten in der Multiplication $J^{(0)}_{i\lambda} - 1$ statt $J^{(0)}_{i\lambda}$ anzuwenden. Um diese Controle durch ein Beispiel zu erläutern, wähle ich die Abtheilung $i' = 2$ aus $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$. Aus den vorstehenden Zahlenwerthen findet sich

$$((C)) = +29''807\,;\quad ((S)) = -31''672$$

$$[C] = +27.883\,;\quad [S] = -33.380$$

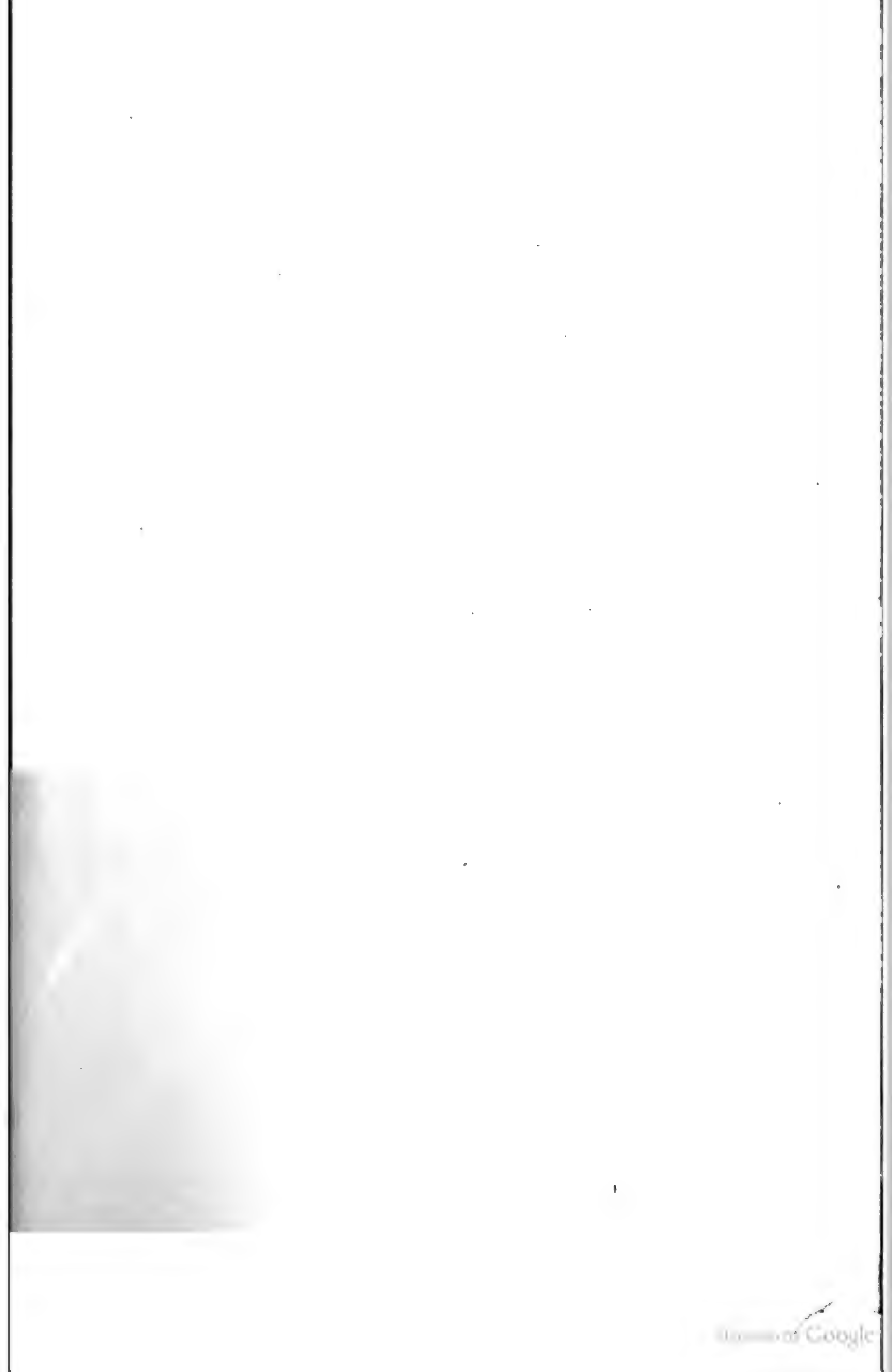
und die Rechnung steht wie folgt:

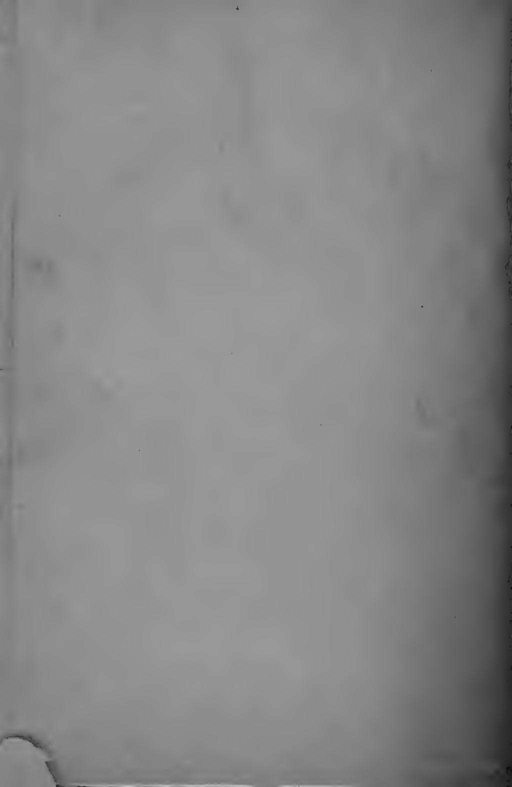
| | 1,7753 | 1,8017n |
|---|---|---|
| 0) | 8.717n | 8.743 |
| 1) | 0.2461 | 0.2725n |
| 2) | 8.416 | 8.442n |

Die erste Zeile enthält die Logarithmen von $2\,((C))$ und $2\,((S))$, und die folgenden Zeilen die Logarithmen der Producte dieser Grössen mit $J^{(0)}_{2\lambda} - 1$, $J^{(1)}_{2\lambda}$, $J^{(2)}_{2\lambda}$; die Zahlen davon werden nun wie folgt geschrieben,

| | | |
|---|---|---|
| | + 29,807 | − 31,672 |
| | − 0.026 | + 0.028 |
| | − 1.873 | − 1.762 |
| | − 0.026 | + 0.028 |
| Sa. | + 27.882 | − 33.378 |

mit den obigen Werthen von [$C$] und [$S$] so genau übereinstimmend, wie man es erwarten darf.





VIERTE ABHANDLUNG.

R. KOHLRAUSCH

UND

WILHELM WEBER,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

# ELEKTRODYNAMISCHE MAASSBESTIMMUNGEN

INSBESONDERE

## ZURÜCKFÜHRUNG DER STROMINTENSITÄTS-MESSUNGEN AUF MECHANISCHES MAASS.

Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.

ZWEITER ABDRUCK.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1889.



# ABHANDLUNGEN
## DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG.

---

### MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

**ERSTER BAND.** (I. Bd.)*) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. brosch. Preis 13 ℳ 60 ₰.

- A. F. MÖBIUS, Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. Mit 1 Tafel. 1849. 2 ℳ 40 ₰.
- P. A. HANSEN, Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von $\alpha$. 1849. 1 ℳ 20 ₰.
- A. SEEBECK, Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe. 1849. 1 ℳ.
- C. F. NAUMANN, Ueber die cyclocentrische Conchospirale u. über das Windungsgesetz v. Planorbis Corneus. 1849. 1 ℳ.
- W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 1851. 3 ℳ.
- F. REICH, Neue Versuche mit der Drehwaage. 1852. 2 ℳ.
- M. W. DROBISCH, Zusätze zum Florentiner Problem. Mit 1 Tafel. 1852. 1 ℳ 60 ₰.
- W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus). Mit 1 Tafel. 1852. 2 ℳ.

**ZWEITER BAND.** (IV. Bd.) Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. brosch. Preis 20 ℳ.

- M. W. DROBISCH, Ueber musikalische Tonbestimmung und Temperatur. Mit 1 Tafel. 1852. 3 ℳ.
- W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. I. Mit 18 Tafeln. 1852. 4 ℳ.
- P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 3 ℳ.
- —— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J)$. 1854. 3 ℳ.
- O. SCHLÖMILCH, Ueber die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 90 ₰.
- —— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen u. deren Anwend. auf die ellipt. Functionen. 1854. 1 ℳ 60 ₰.
- P. A. HANSEN, Die Theorie des Aequatoreals. 1855. 2 ℳ 40 ₰.
- C. F. NAUMANN, Ueber die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 1 ℳ.
- A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. 1855. 2 ℳ.

**DRITTER BAND.** (V. Bd.) Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. brosch. Preis 19 ℳ 20 ₰.

- M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 1 ℳ 20 ₰.
- P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Erste Abhandlung. 1856. 5 ℳ.
- R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. Zweiter Abdruck. 18[illegible]. 1 ℳ 60 ₰.
- H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 2 ℳ 40 ₰.
- W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: Ueber die Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 6 ℳ.
- W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 4 ℳ.

**VIERTER BAND.** (VI. Bd.) Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. brosch. Preis 22 ℳ 50 ₰.

- P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 4 ℳ.
- W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: Ueber die thermo-elektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 2 ℳ 40 ₰.
- —— Elektr. Untersuch. Dritte Abhandl.: Ueber Elektricitätserregung zwischen Metallen u. erhitzten Salzen. 1858. 1 ℳ 60 ₰.
- P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 6 ℳ.
- G. T. FECHNER, Ueber ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 2 ℳ.
- W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 8 ℳ.

**FÜNFTER BAND.** (VII. Bd.) Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. brosch. Preis 24 ℳ.

- W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung: Ueber das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung. 1859. 2 ℳ.
- P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 7 ℳ 20 ₰.
- G. T. FECHNER, Ueber einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 5 ℳ 60 ₰.
- G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Ueber Seitenknospen bei Farnen. 1860. 3 ℳ.
- W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 8 ℳ.

**SECHSTER BAND.** (IX. Bd.) Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. brosch. Preis 19 ℳ 20 ₰.

- W. G. HANKEL, Elektr. Untersuchungen. 5. Abhandl.: Maassbestimmungen d. elektromotor. Kräfte. 1. Th. 1861. 1 ℳ 60 ₰.
- —— Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 1 ℳ 20 ₰.
- P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 9 ℳ.
- G. METTENIUS, Ueber den Bau von Angiopteris. Mit 10 Tafeln. 1863. 4 ℳ 40 ₰.
- W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 3 ℳ.

**SIEBENTER BAND.** (XI. Bd.) Mit 5 Tafeln. hoch 4. 1865. brosch. 17 ℳ.

- P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Zweite Abhandlung. 1864. 9 ℳ.
- G. METTENIUS, Ueber die Hymenophyllaceae. Mit 5 Tafeln. 1864. 3 ℳ 60 ₰.
- P. A. HANSEN, Relationen einestheils zwischen Summen und Differenzen und anderntheils zwischen Integralen und Differentialen. 1865. 2 ℳ.
- W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Sechste Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Zweiter Theil. 1865. 2 ℳ 80 ₰.

**ACHTER BAND.** (XIII. Bd.) Mit 3 Tafeln hoch 4. 1868. brosch. Preis 24 ℳ.

- P. A. HANSEN, Geodätische Untersuchungen. 1865. 5 ℳ 60 ₰.
- —— Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen den Sternwarten zu Gotha und Leipzig, unter seiner Mitwirkung ausgeführt von Dr. Auwers und Prof. Bruhns im April des Jahres 1865. Mit 1 Figurentafel 1866. 2 ℳ 80 ₰.
- W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Siebente Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles. Mit 2 Tafeln. 1866. 2 ℳ 40 ₰.
- P. A. HANSEN, Tafeln der Egeria mit Zugrundelegung der in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig veröffentlichten Störungen dieses Planeten berechnet und mit einleitenden Aufsätzen versehen. 1867. 6 ℳ 80 ₰.
- —— Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1867. 6 ℳ.

**NEUNTER BAND.** (XIV. Bd. Mit 6 Tafeln. hoch 4. 1871. brosch. Preis 18 ℳ.

- P. A. HANSEN, Fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in zehn Supplementen zur Abhandlung von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1868. 5 ℳ 40 ₰.
- —— Entwickelung eines neuen veränderten Verfahrens zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit besonderer Betrachtung des Falles, in welchem gewisse Winkel vorausbestimmte Werthe bekommen sollen. 1869. 3 ℳ.
- —— Supplement zu der geodätische Untersuchungen benannten Abhandlung, die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks betr. 1868. 2 ℳ.
- W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Achte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases. Mit 4 Tafeln. 1870. 2 ℳ 40 ₰.
- P. A. HANSEN, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahre 1874 eintreffenden Vorüberganges. Mit zwei Planigloben. 1870. 3 ℳ.
- G. T. FECHNER, Zur experimentalen Aesthetik. Erster Theil. 1871. 2 ℳ.

---

*) Die eingeklammerten römischen Ziffern geben die Zahl des Bandes in der Reihenfolge der Abhandlungen beider Classen an.

# ELEKTRODYNAMISCHE

# MAASSBESTIMMUNGEN

INSBESONDERE

## ZURÜCKFÜHRUNG DER STROMINTENSITÄTS-MESSUNGEN AUF MECHANISCHES MAASS.

VON

R. KOHLRAUSCH

UND

WILHELM WEBER,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.

ZWEITER ABDRUCK.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1889.

# ELEKTRODYNAMISCHE MAASSBESTIMMUNGEN

INSBESONDERE

## ZURÜCKFÜHRUNG

DER

# STROMINTENSITÄTS-MESSUNGEN

## AUF MECHANISCHES MAASS.

VON

R. KOHLRAUSCH UND W. WEBER.

1.

Die Intensität eines elektrischen Stroms pflegt durch die Beobachtung entweder seiner *magnetischen*, oder *elektrodynamischen* oder endlich seiner *elektrolytischen* Wirkung bestimmt zu werden. Es können aber diese Wirkungen unter sehr verschiedenen Verhältnissen beobachtet werden und es ist Sache des Beobachters, diese Verhältnisse so zu wählen, wie er seinen Beobachtungen die grösste Vollkommenheit geben kann, während die *elektromagnetischen*, *elektrodynamischen* und *elektrolytischen Gesetze* dazu dienen, die unter verschiedenen Verhältnissen beobachteten Wirkungen auf einander zu *reduciren*; denn nur durch eine *Reduction der Beobachtungen auf gleiche Verhältnisse* kann man zu einer *Vergleichung der Stromintensitäten* gelangen. Diese *gleichen Verhältnisse* nun, auf welche alle unter verschiedenen Verhältnissen gemachten Beobachtungen reducirt werden sollen, nennt man die *Normalverhältnisse*, und durch Festsetzung dieser *Normalverhältnisse* wird *das Maass der Stromintensität* nach folgender Regel bestimmt:

> *Das Maass der Stromintensität* ist die Intensität desjenigen Stroms, welcher *unter den Normalverhältnissen* die Einheit der messbaren Wirkung hervorbringt.

Für die Beobachtungen der *magnetischen Wirkungen* eines Stroms sind die Normalverhältnisse folgende: *der Strom geht durch einen kreisförmigen Leiter, welcher die Flächeneinheit umschliesst, und wirkt auf einen Magnet, welcher die Einheit des Magnetismus besitzt, aus einer beliebigen aber grossen Entfernung* $= R$; *der Mittelpunkt des Magnets liegt in der Ebene des Leiters und seine magnetische Axe ist nach dem Mittelpunkte des kreisförmigen Leiters gerichtet.* — Das von dem Strome auf den Magnet ausgeübte *Drehungsmoment D* ist unter diesen Verhältnissen verschieden sowohl nach Verschiedenheit der Stromintensität, als auch

nach Verschiedenheit der Entfernung $R$; das Product $R^3D$ hängt aber blos von der Stromintensität ab und ist daher unter diesen Verhältnissen *die messbare Wirkung* des Stroms, wonach man also zum *Maass der Stromintensität* die Intensität desjenigen Stroms erhält, dessen messbare Wirkung unter den beschriebenen Verhältnissen

$$R^3D = 1$$

ist. — Dieses Maass der Stromintensität, ergiebt sich dann aus den *elektromagnetischen Gesetzen*, ist zugleich auch die Intensität desjenigen Stroms, welcher, wenn er eine Ebene von der Grösse der Flächeneinheit umfliesst, in der Ferne überall die Wirkungen eines im Mittelpunkte jener Ebene befindlichen Magnets ausübt, welcher die Einheit des Magnetismus besitzt und dessen magnetische Axe auf der Ebene senkrecht steht —; oder ist auch die Intensität desjenigen Stroms, von welchem eine *Tangentenboussole mit einfachem Multiplicatorkreise vom Halbmesser* $= R$ bei einer Ablenkung vom magnetischen Meridiane

$$\varphi = arc \operatorname{tang} \frac{2\pi}{RT},$$

wenn $T$ den horizontalen Erdmagnetismus bezeichnet, *im Gleichgewichte* erhalten wird.

Für die Beobachtungen der *elektrodynamischen Wirkungen* eines Stroms sind die Normalverhältnisse folgende: *derselbe Strom geht durch zwei kreisförmige Leiter, von denen jeder die Flächeneinheit umschliesst und die in einer beliebigen aber grossen Entfernung* $= R$ *von einander liegen: die Durchschnittslinie beider auf einander senkrechten Kreisebenen halbirt den ersten kreisförmigen Leiter.* — Das von dem Strome im *ersten* Leiter auf den durchströmten *zweiten* Leiter ausgeübte, nach mechanischem Maasse ausgedrückte *Drehungsmoment* $D$ ist unter diesen Verhältnissen verschieden sowohl nach Verschiedenheit der Stromintensität, als auch nach Verschiedenheit der Entfernung $R$; das Product $R^3D$ hängt aber blos von der Stromintensität ab und ist daher unter diesen Verhältnissen die *messbare Wirkung* des Stroms, wonach man also zum *Maass der Stromintensität* die Intensität desjenigen Stroms erhält, dessen messbare Wirkung unter den beschriebenen Verhältnissen

$$R^3D = 1$$

ist.

Für die Beobachtungen der *elektrolytischen Wirkungen* eines Stromes sind die Normalverhältnisse folgende: *der Strom geht durch Wasser*

*während eines beliebigen genau messbaren Zeitraums $T$ hindurch, ohne eine Änderung der Intensität zu erleiden.* — Die nach dem angenommenen Massenmaasse (Milligramm) ausgedrückte, von dem Strome zerlegte Wassermasse $M$ ist unter diesen Verhältnissen verschieden sowohl nach Verschiedenheit der Stromintensität, als auch nach Verschiedenheit des (in Secunden ausgedrückten) Zeitraums $T$; der Quotient $\frac{M}{T}$ hängt aber blos von der Stromintensität ab und ist daher unter diesen Verhältnissen die *messbare Wirkung* des Stroms, wonach man also zum *Maass der Stromintensität* die Intensität desjenigen Stroms erhält, dessen messbare Wirkung unter den beschriebenen Verhältnissen

$$\frac{M}{T} = 1$$

ist.

Es bleibt nur übrig, um die Intensitäten aller Ströme, deren *magnetische*, *elektrodynamische* oder *elektrolytische* Wirkungen beobachtet worden sind, unter einander vergleichen zu können, die durch die oben beschriebenen Normalverhältnisse gegebenen drei Maasse auf einander zurückzuführen.

Für die *beiden ersten Maasse* ergiebt sich diese Zurückführung aus den *allgemeinen Gesetzen der Elektrodynamik*, welche, wie Ampère gezeigt hat, die Gesetze des Magnetismus und Elektromagnetismus mit umfassen, es ergiebt sich nämlich daraus, wie schon in den Elektrodynamischen Maassbestimmungen II. S. 261 nachgewiesen worden ist, dass das *erste* Maass sich zum *zweiten* verhält wie

$$\sqrt{2} : 1.\text{*)}$$

---

*) Es ist hiebei von Interesse zu bemerken, dass sich zwischen diesen beiden Maassen eine vollkommene Identität herstellen lassen würde, wenn man in den oben beschriebenen *Normalverhältnissen für die elektrodynamischen Wirkungen* das von dem Strome im *zweiten* Kreise auf den Strom im *ersten* Kreise ausgeübte Drehungsmoment statt des von dem Strome im *ersten* Kreise auf den im *zweiten* ausgeübten Drehungsmoments setzte. Der Grund, warum dies nicht geschieht, liegt blos darin, dass der von Ampère angegebene Ausdruck der Abstossungskraft zweier Stromelemente unverändert beibehalten werden soll, wonach, wenn $\alpha$, $\alpha'$ die Länge beider Elemente, $i$, $i'$ die Stromintensitäten, $r$ die Entfernung, $\varepsilon$ den Winkel zwischen $\alpha$ und $\alpha'$, $\theta$ den Winkel zwischen $\alpha$ und $r$, $\theta'$ den Winkel zwischen $\alpha'$ und der verlängerten $r$ bezeichnet, jene Kraft durch

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right)$$

oder durch

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'(3\cos\theta\cos\theta' - 2\cos\varepsilon)$$

Für das *dritte* Maass hat sich die Zurückführung auf das *erste* und also mittelbar auch auf das *zweite* durch gleichzeitige Beobachtungen der von einem und demselben Strome hervorgebrachten ***magnetischen*** und ***elektrolytischen*** Wirkungen ergeben. Aus der Vergleichung dieser auf die oben beschriebenen Normalverhältnisse reducirten Beobachtungen wurde nämlich gefunden, dass das ***dritte Maass*** der Stromintensität, oder die Intensität desjenigen Stroms, von welchem 1 Milligramm Wasser in 1 Secunde zersetzt wird, 106$\frac{2}{3}$ Mal grösser ist, als das ***erste Maass***, oder als die Intensität desjenigen Stroms, welcher, wenn er eine Ebene von der Grösse des Flächenmaasses umfliesst, in grossen Entfernungen überall dieselben Wirkungen hervorbringt, wie ein Magnet im Mittelpunkte jener Ebene, der die Einheit des

dargestellt wird. Aus dem Ampère'schen *Fundamentalgesetze der Elektrodynamik* folgt im Allgemeinen aber nur, dass jene Kraft diesem Ausdrucke *proportional* ist, wonach also die Kraft selbst, wenn man das Maass der Stromintensität noch unbestimmt lässt, durch das Product dieses Ausdrucks in eine beliebige Constante dargestellt wird, also durch

$$-C\cdot\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'\left(\cos\varepsilon-\frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right)$$

oder durch

$$D\cdot\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'(3\cos\theta\cos\theta'-2\cos\varepsilon),$$

worin $C$ oder $D$ die erwähnte Constante bezeichnet. Ampère hat nun zur Feststellung eines bestimmten Stromintensitätsmaasses der Constanten $C$ den Werth $C=1$ oder der Constanten $D$ den Werth $D=\frac{1}{2}$ beigelegt und hat dadurch den schon erwähnten Ausdruck der Abstossungskraft zweier Stromelemente

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'\left(\cos\varepsilon-\frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'(3\cos\theta\cos\theta'-2\cos\varepsilon)$$

erhalten, welcher sich für zwei parallele auf $r$ senkrechte Stromelemente, für die $\varepsilon=0$ und $\theta=\theta'=90^0$ ist, auf

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'$$

reducirt. Es würde aber, der Übereinstimmung mit den elektromagnetischen Messungen wegen, zweckmässiger gewesen sein, $D=1$ oder $C=2$ zu setzen, wo dann der Ausdruck der Abstossungskraft zweier Stromelemente

$$\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'(3\cos\theta\cos\theta'-2\cos\varepsilon)=-2\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'\left(\cos\varepsilon-\frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right)$$

geworden wäre, und sich für zwei mit $r$ zusammen fallende Stromelemente, für die $\theta=\theta'=\varepsilon=0$ ist, auf

$$\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'$$

reducirt hätte. In Übereinstimmung hiemit würde die angeführte *Änderung der Normalverhältnisse für die elektrodynamischen Stromwirkungen* stehen und dadurch eine vollkommene Identität des *elektrodynamischen* Maasses der Stromintensität mit dem *magnetischen* gewonnen werden.

Magnetismus besitzt und dessen magnetische Axe auf der Ebene senkrecht steht. Siehe »Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840«, S. 96, und Casselmann »Über die galvanische Kohlenzinkkette. Marburg 1844.« S. 70.

2.

Die Intensität eines elektrischen Stroms lässt sich aber nicht blos aus seinen *Wirkungen*, sondern auch aus seinen *Ursachen* bestimmen. Die nächsten Ursachen eines elektrischen Stroms liegen aber in der Masse des neutralen elektrischen Fluidums, welche in einem geschlossenen Leiter enthalten ist, und in der Geschwindigkeit, mit welcher die beiden Bestandtheile desselben, nämlich die Masse des *positiven* und *negativen* Fluidums, gleichzeitig in entgegengesetzten Richtungen sich bewegen. Auf Grund dieser *Ursachen* wird *das Maass der Stromintensität* folgender Maassen festgestellt:

> Das Maass der Stromintensität ist die Intensität desjenigen Stroms, welcher *hervorgebracht* wird durch eine solche Geschwindigkeit der beiden elektrischen Fluida, bei welcher die durch den Querschnitt des Leiters fliessende Masse jedes Fluidums dividirt durch die Zeit, in welcher sie durchfliesst, = 1 ist.

Dieses Maass ist *das mechanische Maass der Stromintensität*, und es ist die Aufgabe dieser Abhandlung, die im vorigen Artikel beschriebenen Maasse auf dieses Maass zurückzuführen, welches im Wesen des Stroms am einfachsten begründet liegt und daher bei Fundamentalbestimmungen vor den andern Maassen den Vorzug verdient.

## Zurückführung des magnetischen, elektrodynamischen und elektrolytischen Maasses der Stromintensität auf mechanisches Maass.

3.

Es ist bisher noch kein Versuch gemacht worden, Stromintensitäten nach *mechanischem Maasse* zu bestimmen, und noch weniger die nach andern Maassen bestimmten Stromintensitäten auf dieses Maass *zurückzuführen*. Man weiss blos, dass die *Elektricitätsmenge*, welche selbst bei schwachen, mit den geringsten galvanischen Mitteln dargestellten, Strömen durch den Querschnitt der geschlossenen Kette fliesst, auch für eine sehr kurze Zeit schon sehr gross sein müsse, da die

kräftigste Elektrisirmaschine, deren Conductor mit dem Reibzeuge durch einen Leitungsdraht verbunden wird, einen viel schwächeren Strom giebt, als ein einziges galvanisches Element, welches durch einen Leitungsdraht von mässig grossem Widerstande geschlossen wird.

Der Mangel an Bestimmungen der Stromintensität nach *mechanischem Maasse* hat seinen Grund in den Schwierigkeiten, die ihre Ausführung findet, während die Bestimmung der Stromintensitäten nach den andern oben angeführten Maassen sehr leicht ist und dabei einen viel höhern Grad von Genauigkeit gestattet. Die letztern Maasse werden daher für den *praktischen* Gebrauch zunächst immer in Anwendung kommen, und es handelt sich wesentlich nur darum, dass nur irgend *einmal* eine einzige nach einem von diesen letztern Maassen bekannte Stromintensität auch nach *mechanischem Maasse* so genau wie möglich gemessen werde, um das Grössenverhältniss des *mechanischen Maasses* zu einem von jenen Maassen zu ermitteln und dadurch in den Stand gesetzt zu werden, alle nach jenen Maassen gemachten Bestimmungen *auf mechanisches Maass zurückzuführen.*

Zu einer solchen Messung fehlt es vor Allem an der Kenntniss der in einem geschlossenen Leiter in Strömung begriffenen *Elektricitätsmenge*, oder vielmehr, weil diese Kenntniss während der Strömung gar nicht zu erlangen ist, an der Kenntniss einer *Elektricitätsmenge, welche in Strömung versetzt werden soll, und die z. B. in einer Leidener Flasche sich vorher schon angesammelt befindet.* Man besitzt dazu blos die vorzüglich von Coulomb herrührenden Mittel und Methoden, die Elektricität zu messen, von denen aber zur Messung der in einer geladenen Leidener Flasche angesammelten Elektricität noch nie Gebrauch gemacht worden ist.*)

---

*) Buff hat in den »Annalen der Chemie und Physik« Bd. 86. S. 33 mit Hülfe seiner Tangentenboussole mit langem Leitungsdrahte gefunden, dass die Elektricitätsmenge, durch welche 1 Milligramm Wasserstoff aus 9 Milligrammen Wasser elektrisch ausgeschieden wird, wenn man die Mittel besässe, dieselbe zu verdichten, hinreichen würde, eine Batterie von 45480 Leidener Flaschen von 480 Millimeter Höhe und 160 Millimeter Durchmesser bis zu einer Schlagweite von 100 Millimeter zu laden. Diese Bestimmung von Buff ist die beste und genaueste, welche existirt, genügt aber noch nicht zur Bestimmung der *Elektricitätsmenge*, welche in diesen Flaschen enthalten ist, wozu nach *mechanischen Principien* die Kenntniss der *Abstossungskraft* erforderlich ist, welche diese in einem Punkte concentrirte *Elektricitätsmenge* auf eine gleiche in einem

Die Frage nach der *Elektricitätsmenge*, welche sich in einer Leidener Flasche angesammelt befindet, ist öfters aufgeworfen worden: sie ist, wenn sie gründlich gelöst und die *Elektricitätsmenge* durch die *Kräfte* bestimmt wird, welche sie auszuüben vermag, keineswegs eine blosse Frage der Neugier, sondern es knüpfen sich daran wichtige Bestimmungen, welche der Elektricitätslehre gegenwärtig noch fehlen und ihr den Weg zu interessanten Untersuchungen bahnen können.*)

Zu den *elektrodynamischen Maassbestimmungen* steht diese die Elektricitätsmenge in einer Leidener Flasche betreffende Frage in einer besondern Beziehung, die jedenfalls nähere Beachtung verdient. Im ersten Theile dieser Maassbestimmungen ist ein Grundgesetz der elektrischen Wirkung aufgestellt, welches die *Elektrostatik*, *Elektrodynamik* und *Induction* zugleich umfasst. Es ist nach diesem Grundgesetze die Kraft, welche die elektrische Masse $e$ auf die elektrische Masse $e'$ aus der Entfernung $r$ ausübt, nicht blos eine Function dieser *Entfernung*, sondern zugleich eine Function des Bewegungszustands der beiden elektrischen Massen gegen einander, welcher durch ihre *relative Geschwindigkeit* $\frac{dr}{dt}$ und *Beschleunigung* $\frac{ddr}{dt^2}$, mit welcher sie die Entfernung $r$ passiren, gegeben ist. In diesem Grundgesetze der elektrischen Wirkung:

$$\frac{ee'}{rr}\left[1 - \frac{1}{cc}\left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r\frac{ddr}{dt^2}\right)\right]$$

---

andern davon entfernten Punkte concentrirte Elektricitätsmenge ausüben würde; an der Kenntniss dieser *Abstossungskraft* fehlt es aber noch und es ist mit den mannichfaltigen Mitteln und Methoden, welche von Coulomb und Anderen angegeben worden sind, solche Kräfte zu messen, bisher nicht versucht worden, auch nur eine genäherte Kenntniss davon zu erlangen.

*) Dahin gehört erstlich, wenn man beachtet, dass die meisten Anwendungen der Naturgesetze von der Werthbestimmung gewisser Constanten abhängen, die Bestimmung der unbekannten *Constanten der Elektricitätslehre*, die grossentheils von der Lösung obiger Frage abhängt. — Es ist ferner sehr wahrscheinlich, dass eine Bestimmung der zur *Wasserzersetzung* erforderlichen Elektricität durch die Kräfte, die sie auszuüben vermag, zur Untersuchung derjenigen Kräfte würde benutzt werden können, welche bei der Zersetzung des Wassers wirksam sind; und dass auf gleiche Weise eine Bestimmung der Elektricitätsmenge, durch die ein Draht in bestimmter Frist zum *Erglühen* gebracht wird, durch die *Kräfte*, die sie auszuüben vermag, zur näheren Einsicht in die bei der Wärmeerzeugung wirksamen Kräfte führen würde u. s. w. Im zweiten Theile werden einige von diesen Anwendungen näher erörtert werden.



bedeutet *die Constante c diejenige relative Geschwindigkeit, bei welcher, so lange sie unverändert bleibt, die elektrischen Massen gar keine Wirkung auf einander ausüben würden.* Im zweiten Theile dieser Maassbestimmungen ist sodann entwickelt worden, wie die Werthbestimmung dieser *Constanten c* die Möglichkeit bietet, nicht blos die Messungen der elektromotorischen Kräfte, sondern auch die Stromintensitätsmessungen auf die *Maasse der Mechanik* zurückzuführen, und es ist daselbst die Relation angegeben, nach welcher aus der *Constanten c* die *Elektricitätsmenge* bestimmt werden kann, welche bei den auf die magnetischen und elektrodynamischen Stromwirkungen begründeten Maasseinheiten der Stromintensität in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters passirt. Umgekehrt würde also auch die auf andern Wegen erworbene Kenntniss dieser *Elektricitätsmenge* zur Werthbestimmung jener *Constanten c* führen, auf die unsere Aufmerksamkeit durch obiges Grundgesetz besonders gelenkt ist. Die Bestimmung einer solchen in der Natur gegebenen *Constante* ist ein für feinere Messung besonders geeigneter Gegenstand. Im vorliegenden Falle lässt sich diese Bestimmung auf folgende Aufgabe zurückführen.

## 4.

### *Aufgabe.*

Es soll diejenige *Elektricitätsmenge* bestimmt werden, welche bei einem Strome von der Intensität der auf die *magnetische* oder *elektrodynamische* oder *elektrolytische* Wirkung begründeten Maasseinheit in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters passirt, und zwar soll diese Elektricitätsmenge *durch die Grösse der von ihr ausgeübten elektrostatischen Grundkraft* bestimmt werden; oder specieller:

> *es sei ein constanter Strom gegeben, von welchem eine Tangentenboussole mit einfachem Multiplicatorkreise vom Halbmesser* $= R$ *bei einer Ablenkung* $\varphi = \text{arc tang}\,\frac{2\pi}{RT}$ *im Gleichgewichte erhalten wird, wenn T die Intensität des die Boussole lenkenden horizontalen Erdmagnetismus bezeichnet: es soll bestimmt werden, wie die Elektricitätsmenge, welche bei einem solchen Strome in 1 Secunde durch den Querschnitt des Leiters fliesst, sich zu der Elektricitätsmenge auf jeder von zwei kleinen gleich geladenen Kugeln verhält, welche einander aus der Einheit der Entfernung mit der Einheit der Kraft abstossen. Es soll dabei zur Einheit*

*der Kraft diejenige Kraft genommen werden, welche der Masse eines Milligramms in 1 Secunde die Einheit der Geschwindigkeit ertheilt.*

Der gegebene *Strom* ist nach obiger Bestimmung ein solcher, welcher, wenn er eine Ebene von der Grösse der Flächeneinheit umfliesst, in der Ferne ganz gleiche Wirkungen ausübt wie ein Magnet, welcher die Einheit des magnetischen Moments besitzt, d. i. derjenige Strom, dessen Stärke gewöhnlich bei Beobachtungen mit der Tangentenboussole zum Maasse für die Stärke aller andern Ströme gewählt wird; und die auf jeder der kleinen Kugeln vorhandene *Elektricitätsmenge* ist diejenige, welche bei elektrostatischen Messungen mit der Coulomb'schen Drehwage als Maasseinheit zum Grunde gelegt zu werden pflegt.

### 5.

### *Plan zur Lösung der Aufgabe.*

Wenn *eine auf einem isolirten Leiter angesammelte Elektricitätsmenge E* durch den Multiplicator eines Galvanometers zur Erde hin entladen wird, so übt sie während ihres Durchfliessens ein Drehungsmoment auf die Magnetnadel des Galvanometers aus. Hat man nun auch durch Einschaltung von *Wassersäulen* in die Strombahn die *Entladungszeit* so viel als nöthig ist verlängert, damit zwischen den Windungen des Multiplicators kein Funke überspringt, sondern alle Windungen nach einander vom Entladungsstrome durchlaufen werden, so bildet diese *Entladungszeit* doch immer nur einen äusserst kleinen Bruchtheil von der *Schwingungsdauer* der Magnetnadel, so dass auch derjenige Theil der Bahn, den die Nadel während dieser *Entladungszeit* (also während der Wirkung des Entladungsstroms) zurücklegt, verschwindend klein ist gegen die ganze Bahn der Nadel, d. i. gegen die Grösse der *Elongation*, zu welcher die Nadel nach Verlauf einer *halben Schwingungsdauer* gelangt. Die Wirkung des Entladungsstroms kann daher wie ein *Stoss* betrachtet werden, welcher der Nadel in ihrer Ruhelage ertheilt wird, wonach aus der *Beobachtung der ersten Elongation der Nadel nach der Entladung* die im Augenblicke des Stosses selbst der Nadel vom Entladungsstrome ertheilte *Angulargeschwindigkeit* nach bekannten Schwingungsgesetzen berechnet werden kann.

Übrigens verhält sich hiebei Alles ganz so, wie bei einem *Inductionsstosse*, auch darin, dass die Beschaffenheit des Entladungsstroms

ganz gleichgültig ist, möge er aus vielen getrennten aber schnell auf einander folgenden Partialentladungen bestehen, oder möge er stetig sein mit einer nach irgend einem Gesetze rasch bis zu Null abnehmenden Intensität, — *immer wird die Angulargeschwindigkeit, welche der Nadel dadurch ertheilt wird, ganz allein von der Elektricitätsmenge E abhängen.**)

Mit einem *constanten Strome* können wir der Nadel desselben Galvanometers einen ähnlichen *Stoss* ertheilen, wenn wir den Strom nur eine sehr kurze Zeit wirken lassen, und zwar wird die erste Elongation dieselbe sein, der Strom mag mit der Intensität $i$ während der Zeit $t$, oder mit der grösseren Intensität $ni$ während der kürzeren Zeit $\frac{1}{n}t$ gewirkt haben: ist nämlich die Stromdauer $t$ gegen die Schwingungsdauer der Nadel sehr klein, so wird die *Angulargeschwindigkeit* stets gleich gefunden.**) Es fliesst aber in der Zeit $t$ bei der Intensität $i$ genau dieselbe *Elektricitätsmenge* durch den Querschnitt des Leiters, wie bei der Intensität $ni$ in der Zeit $\frac{1}{n}t$.

Also auch in diesem Falle, wenn wir der Nadel durch einen *constanten Strom von kurzer Dauer* einen *Stoss* ertheilen, hängt die *Angulargeschwindigkeit* und folglich auch die *Elongation* der Nadel *lediglich und ganz allein von der Elektricitätsmenge ab, welche während der Dauer des Stroms durch den Querschnitt des Multiplicators sich bewegt hat.*

Haben wir nun bei demselben Multiplicator *einmal* durch die Entladung einer bekannten Menge $E$ von positiver Elektricität, *das andere*

*) Man findet dies durch alle Versuche bestätigt. Die Elongation ist nicht nur, wie unter andern die Versuche in Anhang II zeigen, proportional der entladenen *Elektricitätsmenge*, sondern ist auch unabhängig von der *Entladungszeit* innerhalb weiter Grenzen; denn es ist einerlei, wie lang oder kurz die Wassersäule ist, welche man einschaltet, sobald nur nicht Windungen des Multiplicators übersprungen werden, oder die Entladungszeit so verlängert wird, dass die Wirkung des Entladungsstroms noch fortdauert, wenn die Nadel schon merklich aus der Ruhelage gewichen ist.

**) Die *Beschleunigung*, welche einer Nadel, deren magnetisches Moment $M$ und deren Trägheitsmoment $K$ ist, durch einen *constanten Strom* von der Intensität $i$ ertheilt wird, ist, so lange die Richtung ihrer magnetischen Axe von der Ebene der Multiplicatorwindungen wenig abweicht, $=\frac{AMi}{K}$, wo $A$ eine von den Dimensionen des Multiplicators und der Vertheilung des Nadelmagnetismus abhängige Constante bedeutet. Hieraus folgt die während der Zeit $t$ ertheilte *Angulargeschwindigkeit* $=\frac{AMit}{K}$, deren Werth unverändert bleibt, wenn $ni$ für $i$ und gleichzeitig $\frac{1}{n}t$ für $t$ gesetzt wird.

*Mal* durch sehr kurze Dauer eines constanten Stroms *gleiche Elongationen der Magnetnadel* hervorgebracht, so kann man daraus schliessen, *dass die positive Elektricitätsmenge* $x$, *welche während der kurzen Dauer des constanten Stroms durch den Querschnitt des Leiters floss,*

$$x = \tfrac{1}{2} E$$

*ist*, ein Resultat, von dessen Richtigkeit man sich leicht überzeugt, welche Vorstellung man auch von dem Vorgange im Innern der Conductoren während der Entladung haben möge.

Wollte man z. B. von der Entladung annehmen, die *ganze* angesammelte *positive* Elektricitätsmenge $E$ sei allein blos in der Richtung zur Erde, oder eine ihr *gleiche* Menge *negativer* Elektricität sei allein blos in der entgegengesetzten Richtung von der Erde aus durch den *ganzen* Multiplicator geströmt, so würde die magnetische Wirkung eines solchen *Entladungsstromes* genau gleich der Wirkung eines Stromes sein, bei welchem nur die *Hälfte* jener positiven Elektricitätsmenge in der angegebenen Richtung durch jeden Querschnitt des Leiters fliesst, zugleich aber eine gleiche negative Elektricitätsmenge in der entgegengesetzten Richtung, ein Vorgang, wie er bei jenem *constanten Strome* angenommen wird. — Sollte man aber der entgegengesetzten Ansicht sein, dass nämlich gar nichts von der im isolirten Leiter angesammelten Elektricitätsmenge $E$ selbst (und eben so wenig von der in der Erde befindlichen) durch die gesammten Windungen des Multiplicators hindurchfliesse, sondern dass dieselbe blos einen Doppelstrom im Drahte *veranlasse*, in welchem so grosse Massen neutralen Fluidums enthalten seien, dass eine sehr kleine Verschiebung dieser Massen genüge, um dem isolirten Leiter so viel negative Elektricität zuzuführen, dass die darin angesammelte positive Elektricität $E$ neutralisirt wird, so würde man auch hiernach zu demselben Ergebniss gelangen; denn es würde alsdann der ganze Ableitungsdraht in eine sehr grosse Zahl kleiner Abtheilungen zerlegt werden können, so dass aus jeder Abtheilung in die nächst *folgende* die Elektricitätsmenge $+ \tfrac{1}{2} E$, in die nächst *vorhergehende* die Elektricitätsmenge $- \tfrac{1}{2} E$ überginge, folglich aus der letzten Abtheilung die Elektricitätsmenge $+ \tfrac{1}{2} E$ in die Erde abströmte, welche der ersten Abtheilung des Drahts aus dem isolirten Leiter ersetzt würde, während aus der ersten Abtheilung die Elektricitätsmenge $- \tfrac{1}{2} E$ in den isolirten Leiter abströmte und die darin zurückgebliebene Elektricität neutralisirte, welche aber der letzten Abtheilung des Drahts aus der

Erde ersetzt wird. — Wäre man endlich auch anzunehmen genöthigt, dass etwas mehr als die Hälfte der positiven Elektricitätsmenge $E$ vom isolirten Leiter zum Drahte überginge, mithin etwas weniger als $-\frac{1}{2}E$ an negativer Elektricität in der entgegengesetzten Richtung vom Drahte zum isolirten Leiter überginge, so ändert auch dies nichts am Resultate, weil die magnetische Wirkung von der Summe der beiden bewegten Elektricitäten bedingt wird. —

Genug, *den Stoss*, welchen die Nadel erhält, wenn die *angesammelte Elektricitätsmenge* $E$ durch den Multiplicator *entladen* wird, *eben denselben* erhält sie auch, wenn ein *constanter Strom* während eines solchen Zeitraums $\tau$ durch den Multiplicator geht, dass genau die *Hälfte* von $E$ *an positiver Elektricität* in der Richtung des Stroms und eben so viel *an negativer Elektricität* in entgegengesetzter Richtung durch jeden Querschnitt geht, vorausgesetzt, dass der Zeitraum $\tau$ nur einen sehr kleinen Theil der Schwingungsdauer der Nadel bildet.

Hienach läuft die Lösung der Aufgabe auf folgende *zwei Punkte* hinaus:

1) die Elektricitätsmenge $E$ in dem angegebenen elektrostatischen Maasse zu messen und bei ihrer Entladung die Elongation der Magnetnadel eines Galvanometers zu beobachten;
2) die kleine Zeit $\tau$ zu bestimmen, während welcher ein constanter Strom von der Intensität $= 1$ (nach magnetischem Maasse) durch den Multiplicator desselben Galvanometers gehen muss, damit er der Nadel dieselbe Elongation ertheile.

Multiplicirt man dann $\frac{1}{2}E$ mit der Zahl, welche anzeigt, wie oft $\tau$ in der Secunde enthalten ist, so erhält man durch $\frac{1}{2\tau}\cdot E$ die *positive Elektricitätsmenge* ausgedrückt, welche bei einem Strome, dessen Intensität nach magnetischem Maasse $= 1$ ist, während der Secunde in der Richtung des Stromes den Querschnitt des Leiters passirt; oder mit andern Worten: es ist

$$\frac{1}{2\tau}\cdot E : 1$$

das Verhältniss, in welchem diese den Querschnitt passirende *positive Elektricitätsmenge* zu derjenigen steht, welche der Messung der im isolirten Leiter angesammelten Elektricitätsmenge $E$ als Maass zum Grunde gelegt worden ist, die nämlich auf jeder von zwei kleinen Kugeln sich

befinden muss, wenn sie sich aus der Entfernung = 1 mit der Kraft = 1 abstossen sollen.

Was zunächst den *zweiten* Punkt betrifft, so bedarf es zur Bestimmung von $\tau$ keiner besondern Versuche; denn es lässt sich der Werth von $\tau$ durch Rechnung aus der Zahl und den Dimensionen der Windungen des Multiplicators, aus der bei der Entladung beobachteten Elongation der Tangentenboussole und aus der Intensität des Erdmagnetismus weit genauer bestimmen, als es durch directe Versuche möglich sein würde, wie man in Art. 13 sehen wird.

Der *erste* Punkt aber, welcher die Bestimmung der Elektricitätsmenge $E$ betrifft, fordert eine Combination mehrerer Versuche, welche Art. 6—12 beschrieben werden sollen. Es kam dabei nämlich darauf an, *erstens* eine noch unbekannte grössere Elektricitätsmenge in einem *vorher* bestimmten Verhältnisse in zwei Theile zu theilen, *sodann* den *grössern* Theil $E$ durch die Tangentenboussole zu *entladen*, um seine magnetische Wirkung zu beobachten, *endlich* aber den *kleineren* Theil durch die von ihm in der Coulomb'schen Drehwage ausgeübte elektrische Kraft zu messen, um dadurch auch den entladenen Theil $E$ nach demselben Maasse gemessen zu erfahren.

Zum Gefässe für jene Elektricitätsmenge, deren Theil $E$ nicht unbedeutend sein durfte, wenn seine Entladung eine genau messbare Wirkung auf die Nadel der Tangentenboussole hervorbringen sollte, schien eine *Leidener Flasche*, deren äussere Belegung gut leitend mit der Erde verbunden war, am meisten geeignet. Es wurde also (Art. 6) zunächst *das Verhältniss* erforscht, in welchem sich *die positive Ladung dieser Flasche* zwischen ihr und *einer grossen isolirten Kugel* theilte, wenn letztere mit dem Knopfe der Flasche berührt wurde. Mit Hülfe des *Sinuselektrometers* wurde das Verhältniss $n : 1$ bestimmt, in welchem die Ladung der Flasche *vor* Berührung der grossen Kugel zu ihrer Ladung *nachher* stand, woraus sich das Verhältniss $1 : (n - 1)$ ergab, in welchem die in der Flasche zurückgebliebene Elektricitätsmenge $E$ zu der an die Kugel übergegangenen steht.

Nach einer mehrmals wiederholten genauen Bestimmung dieses *Verhältnisses* wurde zur Messung der nach einer solchen Theilung an die grosse Kugel übergegangenen Elektricitätsmenge fortgeschritten, zu welchem Ende die grosse Kugel, sogleich nach erfolgter Ladung durch

Berührung mit der Leidener Flasche selbst wieder mit der 1 Zoll grossen *Standkugel* einer in grossem Maassstabe ausgeführten *Coulomb'schen Drehwage* berührt wurde. Das Verhältniss, in welchem sich die Elektricität zwischen diesen beiden Kugeln theilt, kann aus dem Verhältniss ihrer Halbmesser berechnet werden, wie Poisson und Plana bewiesen haben. Es ist dies in Artikel 8 geschehen, wonach also aus der auf die *Standkugel der Drehwage* übergegangenen Elektricitätsmenge $e$ die Ladung gefunden werden kann, welche die *grosse Kugel* von der Leidener Flasche erhalten hat und mithin auch die in der Leidener Flasche zurückgebliebene, welche zum *Entladungsstrome* verwendet wurde, dessen *magnetische Wirkung* beobachtet werden sollte.

Die Elektricitätsmenge $e$ wurde aber gemessen, nachdem die *Standkugel* der Coulomb'schen Drehwage, in der sie enthalten war, mit der gleich grossen *beweglichen Kugel* berührt und dadurch $e$ zwischen diesen beiden Kugeln gleich getheilt worden war. Es wurde nämlich sodann (Artikel 7) aus Beobachtungen über die allmählige Abnahme der Torsion, welche erforderlich war, um die beiden Kugeln in einer *bestimmten Entfernung* von einander zu erhalten, diejenige Torsion berechnet, welche im ersten Augenblicke erforderlich gewesen sein würde, wenn in demselben die Ladung der grossen Kugel durch die Leidener Flasche, der Standkugel durch die grosse, und der beweglichen durch die Standkugel mit der Beobachtung der Torsion zugleich hätte geschehen können. — Artikel 9 findet man diejenige *Elektricitätsmenge* $\varepsilon$ berechnet, welche, zwischen den beiden Kugeln der Drehwage gleich getheilt, bei der nämlichen Entfernung die *Einheit des Drehungsmoments* auf die Wage ausüben würde, wobei auf die ungleichförmige Vertheilung der Elektricität auf den Kugeloberflächen Rücksicht genommen werden musste. — Artikel 10 findet man aus verschiedenen Beobachtungen diejenige *Torsion* der Drehwage bestimmt, die ebenfalls die *Einheit des Drehungsmoments* auf die Wage ausüben würde. — Mit Hülfe der in Art. 9. 10 enthaltenen Bestimmungen liess sich dann leicht aus der in Art. 7 gefundenen Torsion die Elektricitätsmenge $e$ selbst bestimmen und mithin auch die, welche in der Leidener Flasche zurückgeblieben war, was Artikel 11 geschehen, wo die letztere mit $E'$ bezeichnet worden ist, um sie von der zum Entladungsstrome, dessen magnetische Wirkung bestimmt werden sollte, verwendeten Elektricitätsmenge $E$ zu unterscheiden. — In der kurzen Zwischenzeit von dem Augenblicke der Theilung

bis zum Augenblicke der Entladung der in der Leidener Flasche zurückgebliebenen Elektricität ändert sich nämlich die Ladung der Flasche ein wenig theils durch den Elektricitätsverlust an die Luft, theils durch eine Änderung des *Rückstands* in der Flasche, und obschon diese Änderung bei einer so kurzen Zwischenzeit von etwa nur 3 Secunden und bei der vortrefflichen Qualität der zu diesen Versuchen ausgewählten Flasche äusserst geringfügig war, so ist sie doch Art. 12 in Rechnung gezogen, woraus man wenigstens ersehen wird, wie bei andern Flaschen und bei längeren Zwischenzeiten die Änderung $E-E'$ zu bestimmen sein würde.

Mit Hülfe der S. 233 erwähnten, in Art. 13 enthaltenen, Bestimmung von $\tau$ ist endlich Artikel 14 die Grösse $\frac{1}{2\tau}\cdot E$ berechnet, und damit die oben gestellte Aufgabe gelöst. Die folgenden Artikel enthalten grossentheils *Anwendungen*, zu denen auch die Bestimmung der mehrmals erwähnten *Constante c* gehört.

Die beiden *Anhänge* enthalten eine genauere Beschreibung der *Drehwage* und der *Tangentenboussole;* die des *Sinuselektrometers* siehe Poggendorff's Annalen 1853. Bd. 88.

Aus der befriedigenden Übereinstimmung aller ohne Auswahl mitgetheilten Versuche (von denen die in Art. 6. 7 am schwierigsten auszuführen waren) lässt sich abnehmen, dass das Resultat auf 1 bis 2 Procent als genau betrachtet werden darf. Die Rechnung ist auf noch kleinere Bruchtheile genau geführt worden, damit die Bestimmung der Unsicherheit des Resultats blos von der Grösse der unvermeidlichen Beobachtungsfehler abhänge.

## 6.

### *Bestimmung des Verhältnisses, nach welchem sich die Elektricität zwischen der inneren Belegung einer Leidener Flasche und einer grossen Kugel theilt, während die äussere Belegung der Flasche mit der Erde verbunden ist.*

Die folgende Tafel giebt die Resultate zweier mit dem *Sinuselektrometer* ausgeführten Beobachtungsreihen über die Abnahme der Ladung einer Leidener Flasche durch Mittheilung an eine grosse ungeladene Kugel, welche mit dem Knopfe der Flasche berührt wurde, während die äussere Belegung der Flasche mit der Erde gut leitend verbunden war.

Die Leidener Flasche war vorher mit dem Sinuselektrometer durch einen Leitungsdraht verbunden worden, dessen Ende in einer kleinen, am Knopfe der Flasche angebrachten, Vertiefung lag. Dieses Ende des

Leitungsdrahts wurde, nachdem der Stand des Sinuselektrometers beobachtet worden, an einem seidenen Faden in die Höhe gehoben und darauf die grosse Kugel mit dem Knopfe der Flasche berührt, wobei die äussere Belegung der Flasche mit der Erde immer in leitender Verbindung erhalten wurde. Bei 2-, 3-, 4maliger Berührung folgten die einzelnen Berührungen so schnell auf einander, als die jedesmal dazwischen auszuführende vollständige Entladung der grossen Kugel es gestattete. Wurde dann das Sinuselektrometer, welches in der Zwischenzeit nur einen geringen Verlust an die Luft erlitten hatte, durch den am seidenen Faden isolirt gehaltenen Leitungsdraht wieder mit der Flasche verbunden, so wurde die in Ruhe befindliche Elektrometernadel dadurch nur in sehr geringe Schwankung gebracht, weil die Flasche von ihrer Ladung durch Berührung der Kugel verhältnissmässig wenig verliert und weil dieser Verlust näherungsweise durch den verhältnissmässig noch geringeren Verlust an die Luft, welchen die Flasche im Vergleich mit dem Sinuselektrometer erleidet, ausgeglichen wird, woraus sich die Kürze der Zeit erklärt, in welcher, namentlich gegen das Ende jeder Versuchsreihe, die einzelnen Messungen bewerkstelligt werden konnten.

Genaue Zeitbestimmungen für die Augenblicke aller einzelnen Berührungen liessen sich nicht machen, und es beruhen daher die Angaben, welche die folgende Tafel darüber enthält, auf blosser Schätzung, die jedoch auf 1 — 2 Secunden als zuverlässig betrachtet werden darf, eine Genauigkeit, die hiebei vollkommen genügte. Beide Reihen wurden am 2. April 1854 im physikalischen Institut in Göttingen gemacht.

| Nr. | Erste Reihe. | | |
|---|---|---|---|
| | Zeit | Sinuselektrometer Ablenkung der Nadel | n |
| 1. | 8h 49′ 54″ | 32° 36′,2 | |
| 2. | 50′ 0″ | (4malige Berührung) | 1,0324 |
| 3. | 51′ 25″ | 24° 13′,7 | |
| 4. | 53′ 46″ | 23° 31′,3 | |
| 5. | 53′ 52″ | (4malige Berührung) | 1,0299 |
| 6. | 54′ 42″ | 17° 45′,6 | |
| 7. | 58′ 56″ | 14° 49′,3 | |
| 8. | 59′ 2″ | (4malige Berührung) | 1,0167 |
| 9. | 59′ 55″ | 12° 47′,6 | |
| 10. | 9h 2′ 7″ | 12° 34′,3 | |
| 11. | 2′ 13″ | (4malige Berührung) | 1,0325 |
| 12. | 2′ 50″ | 9° 41′,7 | |
| 13. | 4′ 12″ | 9° 41′,7 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14. | 4' 18" | (4malige Berührung) | 1,0355 |
| 15. | 4' 53" | 7° 21'3 | |
| 16. | 7' 22" | 7° 30'2 | |
| 17. | 7' 28" | (4malige Berührung) | 1,0311 |
| 18. | 8' 9" | 5° 51'2 | |
| 19. | 10' 7" | 4° 48'3 | |
| 20. | 10' 13" | (4malige Berührung) | 1,0305 |
| 21. | 10' 51" | 4° 32'9 | |

| | Zweite Reihe. | | |
|---|---|---|---|
| Nr. | Zeit. | Sinuselektrometer Ablenkung der Nadel | $n$ |
| 1. | 9$^h$ 40' 7" | 46° 30'5 | |
| 2. | 41' 57" | 44° 9'0 | |
| 3. | 42' 0" | (1malige Berührung) | 1,0330 |
| 4. | 42' 23" | 40° 23'9 | |
| 5. | 44' 0" | 39° 10'5 | |
| 6. | 44' 3" | (1malige Berührung) | 1,0308 |
| 7. | 44' 23" | 36° 15'7 | |
| 8. | 46' 24" | 35° 11'7 | |
| 9. | 46' 27" | (1malige Berührung) | 1,0379 |
| 10. | 46' 51" | 32° 24'6 | |
| 11. | 48' 24" | 32° 46'6 | |
| 12. | 48' 27" | (1malige Berührung) | 1,0490 |
| 13. | 48' 51" | 29° 21'1 | |
| 14. | 51' 41" | 28° 31'0 | |
| 15. | 51' 44" | (1malige Berührung) | 1,0390 |
| 16. | 52' 9" | 26° 14'2 | |
| 17. | 52' 52" | 26° 14'2 | |
| 18. | 52' 55" | (1malige Berührung) | 1,0375 |
| 19. | 53' 25" | 24° 14'7 | |
| 20. | 58' 30" | 19° 41'9 | |
| 21. | 58' 33" | (1malige Berührung) | 1,0303 |
| 22. | 59' 1" | 18° 27'6 | |
| 23. | 10$^h$ 5' 52" | 17° 42'6 | |
| 24. | 5' 56" | (2malige Berührung) | 1,0328 |
| 25. | 6' 28" | 15° 30'1 | |
| 26. | 7' 14" | 15° 30'1 | |
| 27. | 7' 19" | (3malige Berührung) | 1,0338 |
| 28. | 7' 45" | 12° 38'7 | |
| 29. | 10' 13" | 12° 38'7 | |
| 30. | 10' 19" | (4malige Berührung) | 1,0315 |
| 31. | 11' 27" | 9° 50'0 | |
| 32. | 12' 44" | 9° 50'0 | |
| 33. | 12' 50" | (4malige Berührung) | 1,0292 |
| 34. | 13' 27" | 7° 47'8 | |

In dieser Tafel ist in der *letzten* Columne unter $n$ das *Verhältniss* angegeben, in welchem die Ladung der Flasche vor der Berührung mit der Kugel zu der Ladung nach der Berührung stand, allemal für den Augenblick der Berührung aus den beiden unmittelbar vorher und nachher gemachten, in der *zweiten* und *dritten* Columne enthaltenen, Beobachtungen nach folgender Regel berechnet:

$q_{,,}q_{,,}$ und $q_{,}q_{,}$ bezeichne den Sinus der beobachteten Ablenkung für die beiden vorhergegangenen Beobachtungszeiten,

$q'q'$ und $q''q''$ den Sinus der beobachteten Ablenkung für die beiden nachfolgenden Beobachtungszeiten,

$-t_{,,}$, $-t_{,}$, $t'$, $t''$ die zugehörigen Beobachtungszeiten vom Augenblick der Berührung an gerechnet,

$m$ die Zahl, wie oft die Berührung wiederholt wird;

so ist

$$n = \sqrt[m]{\frac{t''-t'}{t_{,,}-t_{,}} \cdot \frac{t_{,,}q_{,}-t_{,}q_{,,}}{t''q'-t'q''}} \,.\, ^{*)}$$

*) Aus den Beobachtungen der Ablenkung der Nadel in der dritten Columne und der Zeit in der zweiten Columne ergeben sich unmittelbar die Werthe von $q_{,,}$, $q_{,}$, $q'$, $q''$ und die zugehörigen Werthe von $-t_{,,}$, $-t_{,}$, $t'$, $t''$, aus denen die Werthe von $q_0$ und $q^0$ berechnet werden sollen, welche für den Augenblick unmittelbar vor und nach der Berührung gelten. Die angeführte Regel ergiebt sich auf folgende Weise:

1) Für die kurze Zeit der Versuche genügt es, den Verlust an die Luft der Zeit und der Ladung im Augenblicke der Beobachtung proportional anzunehmen, wonach man also für die vier auf den Augenblick der Berührung reducirten Beobachtungen folgende Werthe erhält:

$$(1-at_{,,})q_{,,},\quad (1-at_{,})q_{,},\quad (1+at')q',\quad (1+at'')q''.$$

2) Fügt man jedem dieser Werthe den jedesmaligen Rückstand der Flasche hinzu, so müssen die beiden ersten, welche die *ganze Ladung vor der Berührung* darstellen, gleich sein, und eben so die beiden letzten, welche die *ganze Ladung nach der Berührung* darstellen; man erhält also, wenn man den Rückstand zur Zeit $t$ mit $r_t$ bezeichnet, die Gleichungen

$$(1-at_{,,})q_{,,}+r_{-t_{,,}} = (1-at_{,})q_{,}+r_{-t_{,}} = q_0+r_0$$
$$(1+at')q'+r_{t'} = (1+at'')q''+r_{t''} = q^0+r^0$$

Es kann aber der Rückstand *vor* und *nach* der Berührung (siehe Art. 12) dargestellt werden durch

$$r_t = \sigma\left(1-e^{-\gamma(\theta+t)^\delta}\right)\cdot(q_0+r_0),\quad r_t = \sigma\left(1-e^{-\gamma(\theta'+t)^\delta}\right)\cdot(q^0+r^0)$$

Im Augenblicke der Berührung bleibt der Rückstand unverändert, also $r_0 = r^0$. Hieraus ergiebt sich leicht, dass *für kleine Werthe von $t$ vor* und *nach* der Berührung

$$r_t = r_0 + at,\quad r_t = r_0 + a't$$

gesetzt werden kann, wo $a$ und $a'$ zwei aus den Beobachtungen zu bestimmende Coefficienten bezeichnen. — Durch Substitution dieser Werthe in obige Geichungen, worin man zugleich $aq_0$ für $aq_{,,}$ und $aq_{,}$ setzen darf; und ebenso $aq^0$ für $aq'$ und $aq''$,

Es sind nun zwar in diesen beiden Beobachtungsreihen einige Beobachtungen weniger gelungen, was bei dem Zusammenwirken dreier Beobachter fast unvermeidlich ist, und man könnte sich dadurch veranlasst finden, einige Werthe von $n$ ganz zu verwerfen, z. B. die unter Nr. 8 in der ersten Reihe und unter Nr. 12, 15, 33 in der zweiten Reihe angeführten; es ergiebt sich aber, dass die Ausscheidung dieser Werthe auf die Bestimmung des Mittelwerths von $n$ keinen erheblichen Einfluss hat; denn man findet *mit* und *ohne* Ausscheidung den Mittelwerth

$$n = 1{,}03282, \quad n = 1{,}03297.$$

Eine ähnliche mit derselben Flasche und Kugel früher in Marburg ausgeführte Beobachtungsreihe hatte folgenden Mittelwerth für das Verhältniss $n$ ergeben:

$$n = 1{,}03263.$$

Hienach soll nun künftig das gesuchte Verhältniss

$$n = 1{,}03276$$

angenommen werden. — Aus diesem Verhältnisse der Ladung der Flasche *vor* und *nach* Berührung der grossen Kugel ergiebt sich endlich auch *das Verhältniss der Theilung der Elektricität zwischen der Flasche und der grossen Kugel im Augenblicke ihrer Berührung,*

$$= 1 : 0{,}03276.$$

## 7.

*Correspondirende Beobachtungen der Ablenkung der Tangentenboussole, welche von der durch den Multiplicator fliessenden Elektricitätsmenge E hervorgebracht wird, und der Torsion der Coulomb'schen Drehwage, durch welche die beiden mit der Elektricitätsmenge e geladenen Kugeln in gleicher Entfernung wie die ungeladenen erhalten werden.*

Zur besseren Veranschaulichung der schon Art. 5 erwähnten Versuche diene die Fig. 1 dargestellte Anordnung der dabei gebrauchten Instrumente.

---

erhält man:

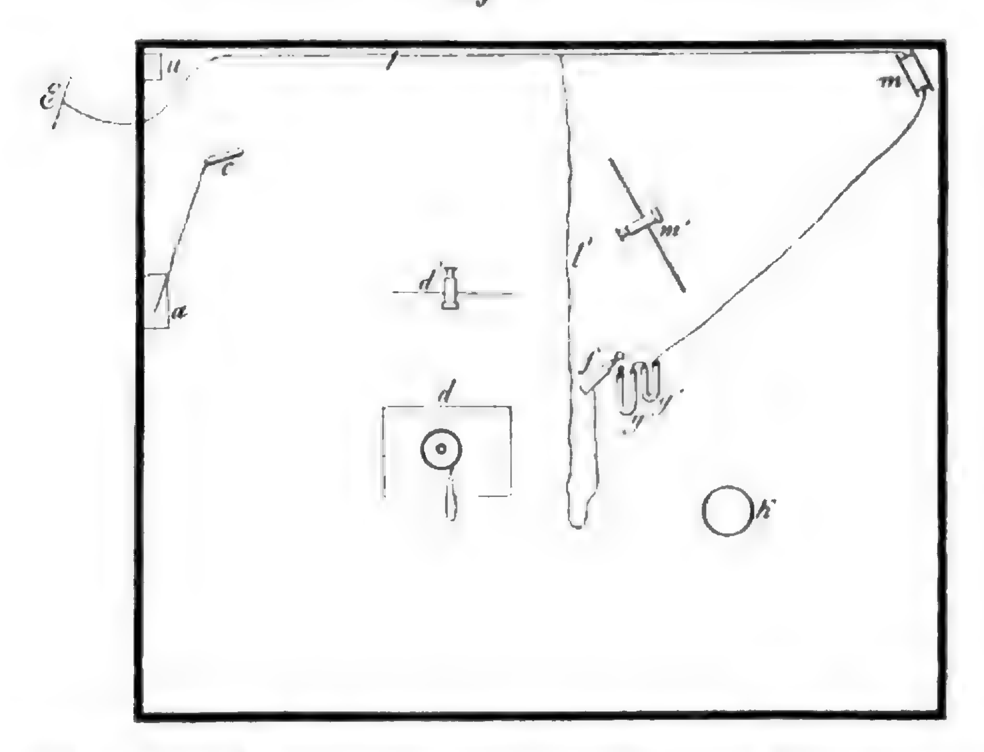
$$q_0 = q_, - (a + \alpha q_0) t_, = q_{,,} - (a + \alpha q_0) t_{,,}$$
$$q^0 = q' + (a' + \alpha q^0) t' = q'' + (a' + \alpha q^0) t''$$

folglich

$$q_0 = \frac{t_{,,} q_, - t_, q_{,,}}{t_{,,} - t_,} \qquad q^0 = \frac{t'' q' - t' q''}{t'' - t'}$$

$$n = \sqrt[m]{\frac{q_0}{q^0}} = \sqrt[m]{\frac{t'' - t'}{t_{,,} - t_,} \cdot \frac{t_{,,} q_, - t_, q_{,,}}{t'' q' - t' q''}}\,.$$

*Fig.* 1.



Bei *m* ist die *Tangentenboussole* aufgestellt, deren Multiplicatordraht mit seinem einen Ende durch den Leitungsdraht *l* und eine daran gelöthete in nasser Erde vergrabene Platte *E* mit der Erde verbunden war, während er mit seinem andern Ende durch die Luft zu den langen mit Wasser gefüllten *U*förmigen Glasröhren *g* und *g'* geführt war; *m'* stellt Skala und Fernrohr zur Beobachtung der mit Spiegel versehenen Nadel der Tangentenboussole dar.

Bei *d* ist die *Coulomb'sche Drehwage* aufgestellt, welche am Ende der Abhandlung, Anhang I, genauer beschrieben werden wird; *d'* stellt Skala und Fernrohr zur Beobachtung des Standes der Drehwage dar. Es war nämlich am Torsionsdrahte unter dem Arme, welcher die bewegliche Kugel trug, ein lang herabhängendes Schellackstäbchen befestigt, das an seinem Ende einen Spiegel trug, auf welchem das Fernrohr gerichtet war. — Bei *k* hängt die grosse Kugel an einem seidenen Faden von der Decke des Zimmers herab. *l'* ist eine Abzweigung des Leitungsdrahts *l*, um die äussere Belegung der Flasche *f* mit der Erde zu verbinden. — Bei *u* ist die Uhr, bei *a* eine Klappe in der Decke des Zimmers, durch welche von dem Conductor einer in dem oberen Zimmer befindlichen Elektrisirmaschine ein Draht zu dem kleinen Conductor *c* herabgeleitet war, um daran die Flasche *f* zu laden.

Nachdem die Flasche *f* geladen und an dem Drahte *l'* durch eine

Klemmschraube befestigt war, wurde mit ihrem Knopfe die grosse Kugel *k* berührt. Die bei dieser Berührung in der Flasche zurückbleibende freie Elektricitätsmenge werde mit $E'$ bezeichnet. Nach 3 Secunden, wo $E'$ durch Elektricitätsverlust an die Luft und Rückstandsbildung in $E$ übergegangen ist, wird der Knopf der Flasche *f*, wie Fig. 1 angedeutet ist, mit einem aus der *U*förmigen Röhre *g* hervorragenden metallenen Knopfe berührt, und der Beobachter am Fernrohr *m'* der Tangentenboussole *m* beobachtet die erste Elongation der Magnetnadel, welche von dem durch den Multiplicator gehenden Entladungsstrom der Elektricitätsmenge $E$ hervorgebracht wird.

Unmittelbar nach Entladung der Flasche *f* wurde die in Bereitschaft gehaltene Standkugel der Coulomb'schen Drehwage an der Kugel *k* geladen und schnell in die Drehwage eingesetzt; die Kugel *k* selbst aber wurde darauf sogleich entladen.

Hierauf wurde in kurzen Zwischenzeiten mehrmals die Torsion gemessen, welche nöthig war, um die beiden Kugeln in ihrer Stellung zu erhalten, bei welcher die beiden von der Drehungsaxe zu den Kugelmittelpunkten gezogenen Radien einen rechten Winkel bildeten. Aus der allmähligen Abnahme dieser Torsion liess sich dann nach dem Coulomb'schen Gesetze, dass bei arithmetisch wachsender Zeit die Ladung geometrisch abnimmt *), diejenige Torsion *berechnen*, welche statt gefunden haben würde, wenn in dem Augenblicke, wo die grosse Kugel *k* durch die Flasche *f* geladen wurde, auch schon die beiden Kugeln der Drehwage hätten geladen und eingestellt werden können. In der folgenden Tafel ist die bei jeder Nummer zuerst bemerkte Torsion die auf diese Art *berechnete*; aus ihr wird in Artikel 11 die Elektricitätsmenge *e* bestimmt werden, welche von der grossen Kugel *k* auf die Standkugel der Drehwage in dem Augenblicke ihrer Berührung übergegangen war.

---

*) Durch eine Versuchsreihe, bei welcher die Standkugel zwischen den einzelnen Torsionsbestimmungen bald ausserhalb, bald innerhalb des Gehäuses der Drehwage sich befunden hatte, war constatirt worden, dass der Elektricitätsverlust an die Luft innerhalb des Gehäuses und ausserhalb gleich war, wie es bei der Grösse des Gehäuses wohl erwartet werden konnte. Wäre dies nicht der Fall gewesen, so würde die oben erwähnte Anwendung des Coulomb'schen Gesetzes nicht unmittelbar zulässig gewesen sein, weil sich die Standkugel einige Augenblicke ausserhalb des Gehäuses befunden hatte, ehe sie in die Drehwage eingesetzt werden konnte.



In der letzten Columne der folgenden Tafel, welche mit $\frac{A}{\sqrt{T}}$ überschrieben ist, sind die Quotienten der in Skalentheilen ausgedrückten Ablenkung der Magnetnadel in der Tangentenboussole dividirt durch die Quadratwurzel der in Minuten ausgedrückten Torsion der Drehwage beigefügt. — Der Abstand des Spiegels von der Skala der Tangentenboussole war

$$= 6437\tfrac{1}{2} \text{ Skalentheile.}$$

| Nr. | Zeit. | Tangentenboussole Ablenkung in Skalenth. $= A$ | Drehwage Torsion in Min. $= T$ | $\frac{A}{\sqrt{T}}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $8^h$ 11′ 8″ | 73,5 | 175′3 | 5,55 |
| | 16′ 13″ | | 152′4 | |
| | 21′ 16″ | | 136′1 | |
| | 26′ 35″ | | 118′3 | |
| | 32′ 32″ | | 99′9 | |
| 2. | $8^h$ 37′ 8″ | 80,0 | 237′1 | 5,20 |
| | 42′ 4″ | | 208′7 | |
| | 45′ 14″ | | 189′1 | |
| | 50′ 10″ | | 165′3 | |
| | 54′ 10″ | | 148′1 | |
| 3. | $9^h$ 0′ 37″ | 96,5 | 332′9 | 5,29 |
| | 5′ 14″ | | 297′5 | |
| | 9′ 19″ | | 270′6 | |
| | 14′ 11″ | | 238′5 | |
| | 18′ 10″ | | 218′3 | |
| 4. | $9^h$ 31′ 14″ | 91,1 | 265′1 | 5,59 |
| | 35′ 17″ | | 249′2 | |
| | 41′ 1″ | | 226′2 | |
| | 47′ 43″ | | 201′1 | |
| | 55′ 0″ | | 178′0 | |
| 5. | $10^h$ 1′ 46″ | 97,8 | 332′4 | 5,36 |
| | 6′ 24″ | | 306′0 | |
| | 10′ 54″ | | 280′4 | |
| | 16′ 31″ | | 251′1 | |
| | 22′ 4″ | | 228′6 | |

## 8.

### *Berechnung des Verhältnisses der beiden Elektricitätsmengen $E' : e$.*

Der Halbmesser der grossen Kugel war

$$a = 159{,}46 \text{ Millimeter,}$$

der Halbmesser der Standkugel in der Coulomb'schen Drehwage war

$$ba = 11{,}537 \text{ Millimeter.}$$

Setzt man nun das Verhältniss, nach welchem sich die nach Art. 6 von der Flasche der ersten Kugel mitgetheilte Elektricität $= 0{,}03276\, E'$ bei der Berührung der letztern theilt,

$$(0{,}03276\, E' - e) : e = A : bbB;$$

so ist nach Plana (*Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface de deux sphères conductrices. Turin*, 1845. *page* 64. 66)

$$\frac{B}{b} = \frac{1}{1+b} + \frac{1}{(1+b)^2}\left\{k_2 + \frac{b}{1+b}k_3 + \frac{bb}{(1+b)^2}k_4 + \frac{b^3}{(1+b)^3}k_5 \ldots\right\},$$

und, wenn $\frac{b}{1+b} = \mathfrak{a}$ gesetzt wird,

$$\frac{A}{b} = \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{a}^3}{1-\mathfrak{a}\mathfrak{a}} + \frac{\pi\mathfrak{a}}{2}\cot \pi\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^3 k_3 + \mathfrak{a}^5 k_5 + \mathfrak{a}^7 k_7 \ldots$$

wo $k_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \ldots$

Hieraus ergiebt sich für die angeführten Werthe das gesuchte Verhältniss

$$(0{,}03276\, E' - e) : e = A : bbB = 1 : 0{,}0079377;$$

folglich

$$E' : e = 3876 : 1.$$

## 9.

***Berechnung derjenigen Elektricitätsmenge $\varepsilon$, mit welcher die beiden Kugeln der Coulomb'schen Drehwage geladen sein müssen, um durch ihre Abstossung die Einheit des Drehungsmoments auf die Drehwage auszuüben.***

Der Halbmesser der Standkugel der Coulomb'schen Drehwage war $= 11{,}537$ Millimeter, der Halbmesser der beweglichen Kugel war $= 11{,}597$ Millimeter, und es kann daher der mittlere Halbmesser von diesen beiden fast gleichen Kugeln

$$a = 11{,}567 \text{ Millimeter}$$

in folgender Rechnung für beide ohne Nachtheil angenommen werden.

Der Abstand des Mittelpunkts der Standkugel von der Drehungsaxe war ferner $= 93{,}53$ Millimeter, der Abstand des Mittelpunkts der beweglichen Kugel von der Drehungsaxe war $= 64{,}7$ Millimeter, und beide Mittelpunkte bildeten mit der Drehungsaxe einen rechten Winkel. Hieraus ergiebt sich der Abstand der Mittelpunkte von einander

$$= 112{,}05 \text{ Millimeter,}$$

was auch durch directe Messung dieses Abstands bestätigt worden war.

Enthält nun jede der beiden Kugeln die Hälfte der zu bestimmenden Elektricitätsmenge $\varepsilon$, so würde sich, wenn man voraussetzt, *dass*

*diese Elektricität auf der Oberfläche jeder Kugel gleichförmig vertheilt sei*, aus den bekannten Gesetzen: 1) dass eine auf der Kugeloberfläche gleichförmig vertheilte Elektricitätsmenge auf alle Punkte des äussern Raumes ebenso wirkt, wie wenn sie im Mittelpunkt der Kugel concentrirt wäre, — 2) dass die Abstossungskraft, welche die in einem Punkte concentrirte Elektricitätsmenge auf die in einem andern Punkte concentrirte ausübt, dem Quotienten aus dem Producte beider Elektricitätsmengen dividirt durch das Quadrat ihrer Entfernung gleich ist, — unmittelbar *die Abstossungskraft beider Kugeln* ergeben, nämlich

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\varepsilon\varepsilon}{112{,}05^2} = \frac{\varepsilon\varepsilon}{50221}.$$

Soll aber diese Abstossungskraft *genau* gefunden werden, so ist obige Voraussetzung nicht zulässig, sondern es muss *die Ungleichförmigkeit der Vertheilung der Elektricität auf der Oberfläche jeder Kugel* bei der gegebenen Grösse und Entfernung derselben genau bestimmt und in Rechnung gebracht werden.

In Poisson's *Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs* (*Mémoires de l'Institut. Année* 1811. *Première partie page* 88) findet man für die *Dichtigkeit* $z$ der Elektricität auf der Oberfläche einer kleinen Kugel bei grosser Entfernung von einer andern Kugel, wenn die *mittlere* Dichtigkeit auf der erstern Kugel $= B$, auf der letztern $= A$ gegeben ist, folgenden Ausdruck

$$z = B - \frac{3\,aaA}{cc} \cdot \mu_, + \frac{5\,aabA}{2c^4}(1 - 3\mu_,\mu_,),$$

worin $b$ und $a$ die Halbmesser der beiden Kugeln, $c$ den Abstand ihrer Mittelpunkte und $\mu_,$ den Cosinus des Winkels $\varphi$ bezeichnet, welchen der Halbmesser der erstern Kugel an der betrachteten Stelle mit der Richtung $c$ bildet. — Wendet man diese allgemeine Regel auf den vorliegenden Fall an, so ist

$$A = B$$
$$a = b$$

zu setzen, folglich, wenn für $\mu_,$ sein Werth $\cos\varphi$ geschrieben wird, ist die *Dichtigkeit*

$$z = A\left(1 - \frac{3\,aa}{cc}\cos\varphi + \frac{5}{2}\,\frac{a^3}{c^3}\,(1 - 3\cos\varphi^2)\right).$$

Aus dieser *Dichtigkeit* ergiebt sich nun ferner *der gegen die Kugeloberfläche senkrechte von innen nach aussen gerichtete Druck der Elektricität* an der betrachteten Stelle, nach dem bekannten von Poisson in der



angeführten Abhandlung bewiesenen Gesetze, wonach der Druck dem Quadrate der Dichtigkeit proportional, oder, bestimmter ausgedrückt, dem Quadrate der Dichtigkeit $zz$ multiplicirt mit der Zahl $2\pi$ gleich ist. Jener *Druck* ist also

$$= 2\pi \cdot zz.$$

Zerlegt man sodann diesen *Druck* nach der Richtung der verlängerten Linie $c$ und nach einer darauf senkrechten Richtung, so erhält man *die der verlängerten Linie $c$ parallele Componente*

$$= -2\pi zz \cdot \cos\varphi.$$

Substituirt man hierin endlich obigen Werth von $z$, so erhält man *für zwei gleiche Elemente der Kugeloberfläche, deren Verbindungslinie mit der Linie $c$ parallel ist*, für welche also die Werthe von $\varphi$ einander zu $\pi$ ergänzen, *zusammengenommen den nach der Richtung* der verlängerten Linie $c$ zerlegten Druck

$$= 24\frac{\pi aa}{cc}AA\left(1+\frac{5}{2}\frac{a^3}{c^3}(1-3\cos\varphi^2)\right)\cos\varphi^2,$$

woraus die der verlängerten Linie $c$ parallele *Druckkraft erstens*, für die beiden Zonen von der Breite $ad\varphi$, welche alle, den beiden sich zu $\pi$ ergänzenden Werthen von $\varphi$ angehörige, Elemente der Kugeloberfläche enthalten, durch Multiplication mit der Fläche $2\pi aa\sin\varphi\, d\varphi$,

$$= 48\frac{\pi\pi a^4}{cc}AA\left(1+\frac{5}{2}\frac{a^3}{c^3}(1-3\cos\varphi^2)\right)\cos\varphi^2\sin\varphi\, d\varphi,$$

*zweitens*, für die ganze Kugeloberfläche, durch Integration,

$$48\frac{\pi\pi a^4}{cc}AA\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(1+\frac{5}{2}\frac{a^3}{c^3}(1-3\cos\varphi^2)\right)\cos\varphi^2\sin\varphi\, d\varphi = 16\frac{\pi\pi a^4}{cc}\left(1-2\frac{a^3}{c^3}\right)AA$$

gefunden wird, worin $A$ die *mittlere* Dichtigkeit der Elektricität auf der Oberfläche jeder der beiden Kugeln vom Halbmesser $a$, folglich

$$4\pi aa \cdot A$$

die auf der Oberfläche jeder Kugel vertheilte *Elektricitätsmenge* bezeichnet.

Nun ist aber die *gesuchte*, auf beide Kugeloberflächen zusammen vertheilte *Elektricitätsmenge* (deren Abstossungskraft die Einheit des Drehungsmoments auf die Drehwage ausüben soll) oben mit $\varepsilon$ bezeichnet worden; folglich ist

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon = 4\pi aa \cdot A,$$

woraus

$$A = \frac{\varepsilon}{8\pi aa}.$$

Substituirt man diesen Werth von $A$, so erhält man die mit der verlängerten Linie $c$ parallel gerichtete *Druckkraft*, d. i. *die Abstossungskraft der beiden Kugeln*.

$$= \frac{1}{4}\left(1 - 2\frac{a^3}{c^3}\right)\frac{\varepsilon\varepsilon}{cc},$$

oder, wenn man darin für $a$ und $c$ die oben angeführten Werthe

$$a = 11,567$$
$$c = 112,05$$

setzt,

$$= \frac{\varepsilon\varepsilon}{50331}. \text{*)}$$

Das Product der gefundenen Abstossungskraft beider Kugeln in das von der Drehungsaxe auf die Richtung dieser Kraft, d. i. auf die Linie $c$, gefällte Perpendikel giebt endlich den Werth des von dieser Abstossungskraft auf die Drehwage ausgeübten *Drehungsmoments*, welches $= 1$ sein soll.

Da aber die die Mittelpunkte beider Kugeln verbindende Linie $c$ mit den von beiden Mittelpunkten zur Drehungsaxe gezogenen Horizontallinien ein an der Drehungsaxe rechtwinkeliges Dreieck bilden, so ist das von der Drehungsaxe auf die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks $c$ gefällte Perpendikel gleich dem Producte der beiden Katheten dividirt durch die Hypotenuse, oder, da die beiden Katheten 93,53 und 61,7 Millimeter, $c = 112,05$ Millimeter lang sind,

$$= \frac{61,7 \cdot 93,53}{112,05} = 51,5025 \text{ Millimeter.}$$

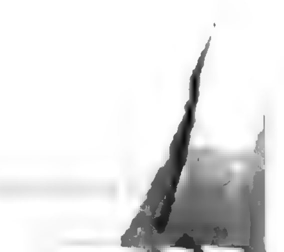
Hieraus folgt nun das von der elektrischen Abstossungskraft der beiden Kugeln auf die Drehwage ausgeübte *Drehungsmoment*

$$= 51,5025 \cdot \frac{\varepsilon\varepsilon}{50331} = \frac{\varepsilon\varepsilon}{977}.$$

*) Es ergiebt sich hieraus, dass die in jeder Kugel enthaltene Elektricität, wegen ihrer ungleichförmigen Vertheilung auf der Oberfläche, nicht im *Mittelpunkte* der Kugel concentrirt gedacht werden darf. — Es ist aber

$$\frac{\varepsilon\varepsilon}{50331} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\varepsilon\varepsilon}{112,1743^2},$$

woraus sich also ergiebt, dass die Abstossungskraft der beiden Kugeln dieselbe ist, wie wenn die beiden Hälften der ganzen in ihnen enthaltenen Elektricitätsmenge in zwei Punkten, die 112,1734 Millimeter von einander entfernt sind, concentrirt wären, das heisst, da diese Entfernung um 0,1234 Millimeter grösser ist als der Abstand der Mittelpunkte, in zwei Punkten, die um 0,0617 Millimeter von den beiden Mittelpunkten entfernt liegen.



Es wird also der Forderung, dass das von der elektrischen Abstossungskraft beider Kugeln herrührende *Drehungsmoment*

$$= 1$$

sei, dadurch genügt, dass die in beiden Kugeln zusammengenommen enthaltene *Elektricitätsmenge*

$$\varepsilon = \sqrt{977} = 31{,}25$$

ist. Dieser Bestimmung von $\varepsilon$ liegt diejenige Elektricitätsmenge als Einheit zum Grunde, welche auf eine gleiche Elektricitätsmenge in der Einheit der Entfernung, bei relativer Ruhe, die Einheit der Abstossungskraft ausübt.

## 10.

*Berechnung derjenigen Torsion $\theta$, welche der Draht, an dem die Coulomb'sche Drehwage hängt, erhalten muss, um durch seine Torsionskraft die Einheit des Drehungsmoments auf die Drehwage auszuüben.*

Das *Drehungsmoment*, welches auf die Drehwage durch eine Torsion des Drahts, an welchem sie hängt, ausgeübt wird, ist bekanntlich der *Torsion* und dem *Torsionscoefficienten* des Drahts proportional, oder, bestimmter ausgedrückt, ist *dem Producte des in Theilen des Halbmessers ausgedrückten Torsionswinkels in die vom Drahte auf die Drehwage ausgeübte Directionskraft gleich.* Es braucht daher nur diese *Directionskraft* bestimmt zu werden, um daraus denjenigen Torsionswinkel $\theta$ kennen zu lernen, bei welchem das auf die Drehwage ausgeübte Drehungsmoment der *Einheit* gleich ist.

Die Grösse der vom Drahte ausgeübten Directionskraft ist, nach den bekannten Gesetzen der Elasticität fester Körper, unabhängig von der Grösse und dem Gewicht des am Drahte hängenden Körpers, und es können daher zur Bestimmung der *Directionskraft* des Drahtes andere Körper, statt der Drehwage, am Drahte aufgehangen und beobachtet werden.

Es wurde *erstens* an dem Drahte, statt der Drehwage, eine kreisrunde Messingplatte in ihrem Mittelpunkte horizontal aufgehangen. Diese Messingplatte hatte

191112,4 Milligramm *Masse*

63,95 Millimeter *Halbmesser*.

Zur Verbindung des Drahts mit der Scheibe diente ein kleiner verticaler Cylinder von

2626,0 Milligramm *Masse*

3,25 Millimeter *Halbmesser.*

Es wurde darauf die *Dauer* der Torsionsschwingungen der Platte beobachtet und

$$t = 47{,}139 \text{ Secunden}$$

gefunden. — Nach den vorhergehenden Angaben war aber *das Trägheitsmoment der schwingenden Platte*

$$K_1 = \tfrac{1}{2}\cdot 63{,}95^2\cdot 191112{,}4 = 390790000,$$

*das Trägheitsmoment des kleinen Cylinders*

$$K_2 = \tfrac{1}{2}\cdot 3{,}25^2\cdot 2626 = 13868,$$

beide zusammen also

$$K = K_1 + K_2 = 390803868.$$

Aus diesem *Trägheitsmomente K* und aus der beobachteten *Schwingungsdauer t* ergiebt sich nun nach den bekannten Gesetzen solcher Schwingungen der Werth der *Directionskraft D*,

$$D = \frac{\pi\pi K}{tt} = 1735800.$$

*Zweitens* wurde an dem nämlichen Drahte ein Messingcylinder in seiner Mitte horizontal aufgehangen. Dieser Cylinder hatte

58897,1 Milligramm *Masse*

269,7 Millimeter *Länge*

2,865 Millimeter *Halbmesser.*

Zur Verbindung mit dem Drahte diente derselbe kleine verticale Cylinder, wie bei den vorhergehenden Versuchen. Es wurde darauf die *Dauer* der Torsionsschwingungen dieses Stabs $t'$ beobachtet und

$$t' = 44{,}9537 \text{ Secunden}$$

gefunden. — Nach den vorhergehenden Angaben war *das Trägheitsmoment des schwingenden Stabs*

$$K'_1 = \tfrac{1}{12}(269{,}7^2 + 3\,.\,2{,}865^2)\,58897{,}1 = 357130000,$$

und also *das ganze Trägheitsmoment* mit Einschluss des kleinen verticalen Cylinders

$$K' = 357143868.$$

Es ergiebt sich daher aus diesen Beobachtungen der Werth der *Directionskraft D*,

$$D = \frac{\pi\pi K'}{t't'} = 1744200;$$

folglich im Mittel aus beiden Beobachtungsreihen

$$D = 1740000.$$

Soll nun das Product dieses Werths von $D$ in den nach Theilen des Halbmessers ausgedrückten Torsionswinkel, d. i. das von dem Drahte auf die Drehwage ausgeübte *Drehungsmoment* $= 1$ sein; so ergiebt sich der Werth des Drehungswinkels oder die gesuchte *Torsion des Drahts* $\theta$ gleich dem Winkel, dessen Bogen dem 1740000[ten] Theile des Halbmessers gleich ist, oder es ist

$$\theta = 0{,}0019757 \text{ Bogenminuten.}$$

## 11.

### *Berechnung der Elektricitätsmengen E und e in den Artikel 7 beschriebenen Beobachtungen.*

Bei den in Artikel 7 beschriebenen Versuchen befand sich die Coulomb'sche Drehwage in den nach Nummern unterschiedenen Versuchen für folgende Werthe des Torsionswinkels im Gleichgewichte:

| Nr. | Torsionswinkel in Minuten. |
|---|---|
| 1. | 175,3 |
| 2. | 237,1 |
| 3. | 332,9 |
| 4. | 265,1 |
| 5. | 332,4 |

Das Gleichgewicht der Drehwage beweist aber, dass das vom Drahte auf die Drehwage ausgeübte Drehungsmoment dem von der elektrischen Abstossungskraft der beiden Kugeln herrührenden Drehungsmomente entgegengesetzt gleich war. — Das *erstere* Drehungsmoment wird aber gefunden, wenn man den beobachteten Torsionswinkel mit dem im vorigen Artikel bestimmten Winkel $\theta = 0{,}0019757$ Bogenminuten dividirt, um welchen der Draht gedreht werden musste, um die *Einheit des Drehungsmoments* auf die Drehwage auszuüben. Hienach erhält man die bei den beschriebenen Versuchen von dem Drahte auf die Drehwage ausgeübten *Drehungsmomente.*

| Nr. | Drehungsmoment des Drahtes. |
|---|---|
| 1. | 88728 |
| 2. | 120010 |
| 3. | 168500 |
| 4. | 134180 |
| 5. | 168240 |

Das *letztere* von der elektrischen Abstossungskraft der beiden Kugeln herrührende Drehungsmoment ergiebt sich aus Artikel 9

$$= \frac{ee}{\varepsilon\varepsilon} = \frac{ee}{977},$$

wo $e$ die *Elektricitätsmenge* bezeichnet, mit welcher die beiden Kugeln der Drehwage zusammen genommen geladen sind, die man hienach für die angeführten fünf Versuche aus der *Gleichheit* beider Drehungsmomente berechnen kann, wie in folgender Tafel geschehen ist. In der letzten Columne dieser Tafel sind ausserdem noch die aus der Artikel 8 gefundenen Proportion

$$E' : e = 3876 : 1$$

berechneten Werthe von $E'$ beigefügt worden.

| Nr. | $e$ | $E'$ |
|---|---|---|
| 1. | 9310 | 36086000 |
| 2. | 10828 | 41970000 |
| 3. | 12830 | 49730000 |
| 4. | 11450 | 44379000 |
| 5. | 12821 | 49693000 |

## 12.

*Berechnung der Correction, welche durch den Elektricitätsverlust und die Rückstandsbildung in der Leidener Flasche in der von der Theilung der Elektricität bis zur Entladung der Flasche verflossenen Zeit bedingt wird,*

$$= E' - E.$$

Die Elektricitätsmenge $E'$, welche nach der Ladung der grossen Kugel in der Leidener Flasche zurückgeblieben war, erfährt während der Zeit von *drei Secunden*, bis zu ihrer Entladung, eine kleine Änderung, theils durch Verlust an die Luft, theils durch Rückstandsbildung. Die dann in der Flasche noch vorhandene Menge $E$ kann aus $E'$ folgendermassen bestimmt werden.

In Poggendorff's Annalen 1854, Bd. 91, findet man eine Methode angegeben, die Bildung des Rückstands in einer Leidener Flasche zu bestimmen. Ist danach $Q$ eine der Flasche plötzlich mitgetheilte Elektricitätsmenge, welche nach $t$ Secunden durch Verlust an die Luft in $Q_t$ übergegangen ist, so hat sich zur Zeit $t$ ein Rückstand $r_t$ gebildet, welcher der Gleichung

$$r_t = p\left(Q_t - Qe^{-\frac{b}{m+1}\cdot t^{m+1}}\right) \tag{I}$$

entspricht. Für die Constanten bei der angewendeten Flasche hatten sich aus früherer Untersuchung die Werthe

$$p = 0{,}04494 \qquad b = 0{,}1834$$

ergeben, während $m+1$ die für alle Flaschen gleiche Grösse $= 0{,}4255$ besitzt.

Sind für eine Flasche diese Constanten bestimmt, so kann auch die auf den Elektricitätsverlust an die Luft sich beziehende Constante $\alpha$ leicht gefunden werden. Man theilt der Flasche zu dem Ende durch eine andere Flasche plötzlich eine unbekannte Ladung $Q$ mit und beobachtet mit dem *Sinuselektrometer* zu den Zeiten

$$t_1,\ t_2,\ \ldots\ t_n$$

die disponibele Ladung

$$L_{t_1},\ L_{t_2},\ \ldots\ L_{t_n}.$$

Nun ist, wenn $\nu_t$ die bis zur Zeit $t$ an die Luft entwichene Elektricitätsmenge bezeichnet,

$$L_t = Q - r_t - \nu_t. \tag{II}$$

Für kleinere Werthe von $t$ kann aber

$$\nu_t = \alpha \cdot t\,\frac{Q+L_t}{2}$$

gesetzt werden, und wird ausserdem in Gleichung (I) $Q - \nu_t$ für $Q_t$ geschrieben, so erhält man

$$L_t = Q(1-\varrho_t) - \alpha(1-p)t\frac{Q+L_t}{2}, \tag{III}$$

worin $\varrho_t$ statt $p\left(1 - e^{-\frac{b}{m+1}t^{m+1}}\right)$ gesetzt ist.

Diese Gleichung soll nun allen Beobachtungen Genüge leisten. Berechnet man $\varrho_t$ für die Zeit der ersten und letzten Beobachtung und setzt diese Werthe nebst den beobachteten Werthen von $L_t$ und $t$ in die Gleichung ein, so erhält man zwei Gleichungen mit den beiden unbekannten Grössen $Q$ und $\alpha$.

Nachdem nun zur Bestimmung von $\alpha$ der Leidener Flasche in dem Local, wo die früheren Versuche gemacht wurden, plötzlich eine Ladung mitgetheilt worden war, wurden aus den Beobachtungen folgende Resultate erhalten:

| $t$ | $L_t$ | $\varrho_t$ |
|---|---|---|
| 23 | 0,6676 | 0,03619 |
| 65 | 0,6576 | 0,04142 |
| 128 | 0,6483 | 0,04344 |
| 226 | 0,6389 | 0,04435 |

Es ist hierin $L_t = V \sin\varphi$, und $\varphi$ ist die am *Sinuselektrometer* beobachtete Ablenkung; $\varrho_t$ ist aber aus $t$ und den Constanten der Flasche berechnet. — Durch Combination der ersten und letzten Beobachtung findet man

$$Q = 0{,}6956 \quad \alpha = 0{,}00017935.$$

Mit diesen Werthen ergeben sich nun aus Gleichung (III) folgende zusammengehörige Werthe von $t$ und $L_t$:

| $t$ | $L_t$ |
|---|---|
| 23 | 0,6676 |
| 65 | 0,6592 |
| 128 | 0,6506 |
| 226 | 0,6389 |

welche von den beobachteten Werthen so wenig abweichen, dass der gefundene Werth von $\alpha$ für hinreichend genau gelten kann, um ihn zur Correction von $E'$ zu benutzen. In *drei Secunden* betrug also *der Elektricitätsverlust an die Luft*

$$0{,}000538$$

von der ganzen Ladung $E'$.

Der in derselben Zeit entstandene *Rückstand* wird auf folgende Weise gefunden.

Unmittelbar vor der Berührung der grossen Kugel, welche $t$ Secunden nach der Ladung der Flasche erfolgte, hatte letztere die disponibele Ladung $L_t$ und einen nicht entladbaren Rückstand $r_t$. Schreibt man in der Gleichung (I) $Q - r_t$ statt $Q_t$, setzt für $r_t$ seinen Werth $\alpha \cdot t \frac{Q + L_t}{2}$ und für $Q$ den aus der Gleichung (III) sich ergebenden Werth, so erhält man den Rückstand zur Zeit $t$ durch die zu dieser Zeit vorhandene disponibele Ladung ausgedrückt,

$$\text{(IV)} \qquad r_t = \frac{\varrho_t - \alpha t (p - \frac{1}{2}\varrho_t)}{1 - \varrho_t - \frac{1}{2}\alpha t (1 - p)} \cdot L_t = 6 L_t.$$

Nach der Ladung der Kugel ist in der Flasche (Artikel 6) nur die disponibele Ladung $\frac{1}{n} L_t$, überhaupt also die Elektricitätsmenge $(\frac{1}{n} + 6) L_t$

geblieben. Wie nun die Rückstandsverhältnisse nach dieser partiellen Entladung sich gestalten hängt davon ab, ob der gebildete Rückstand $6L_t$ kleiner, oder eben so gross, oder grösser ist als der Grenzwerth

$$p\left(\frac{1}{n} + 6\right)L_t$$

des Rückstands für die noch vorhandene Ladung der Flasche, was wiederum davon abhängt, ob $n$ kleiner, oder eben so gross, oder grösser ist als $\frac{p}{6(1-p)}$.

Bei den vorliegenden Versuchen war $t$ im Mittel nahe 60 Secunden. Setzt man diesen Werth in die Gleichung (IV), so ergiebt sich

$$6 = 0,04286 \qquad \frac{p}{6(1-p)} = 1,0978.$$

Da in Artikel 6 $n = 1,03276$, mithin kleiner als $\frac{p}{6(1-p)}$, gefunden worden ist, so geht daraus hervor, dass der Rückstand zu wachsen fortfährt; sein Wachsthum ist aber langsamer als vor der partiellen Entladung, weil der jetzige Grenzwerth dem bereits gebildeten Rückstande näher liegt als der vorherige, und zwar wird die Weiterbildung so vor sich gehen, als ob der vorhandene Rückstand $6L_t$ von der jetzigen Ladung $\left(\frac{1}{n} + 6\right)L_t$ erzeugt wäre. Dazu würde es aber einer Zeit bedurft haben, welche sich aus der Gleichung

$$r_t = 6L_t = \left(\frac{1}{n} + 6\right)L_t \cdot p\left(1 - e^{-\frac{b}{m+1}t^{m+1}}\right),^{*)}$$

aus welcher

$$\log t = \frac{1}{m+1}\log\left[-\frac{m+1}{b}\log\text{nat}\left(1 - \frac{6}{\left(\frac{1}{n}+6\right)p}\right)\right]$$

folgt, $= 85,9$ Secunden ergiebt.

Von der im Augenblicke nach der Berührung der grossen Kugel vorhandenen Ladung $E' = \frac{1}{n}L_t$ geht also das in *drei Secunden*, bis zur Entladung der Flasche, erfolgende Wachsthum des Rückstands noch verloren, welches durch

$$\left[\left(\frac{1}{n} + 6\right)p\left(1 - e^{-\frac{b}{m+1}\cdot 88,9^{m+1}}\right) - 6\right]L_t = 0,00010 \cdot L_t,$$

oder, da $L_t = nE'$ ist, durch

*) Diese Gleichung ist der Rückstandsgleichung (I) gemäss gebildet, in welcher statt $Q_t$ jetzt $Q = \left(\frac{1}{n} + 6\right)L_t$ gesetzt werden musste.

$$0{,}000103 \cdot E'$$

bestimmt ist.

Darnach ergiebt sich endlich die gesuchte Correction

$$E' - E = (0{,}000538 + 0{,}000103)E' = 0{,}000641 E'$$

und man erhält daher für die im vorigen Artikel angegebenen Werthe $E'$ die corrigirten Werthe $E$, welche die durch den Multiplicator wirklich entladenen Elektricitätsmengen angeben, wie folgt:

| Nr. | $E$ |
|---|---|
| 1. | 36060000 |
| 2. | 41940000 |
| 3. | 49700000 |
| 4. | 44350000 |
| 5. | 49660000 |

## 13.

*Berechnung der Dauer, welche ein Strom von der Artikel 4 beschriebenen Normalstärke haben muss, um die Art. 7 beobachteten Ablenkungen der Tangentenboussole hervorzubringen.*

Die Artikel 7 angeführten *Ablenkungen der Tangentenboussole* waren *in Skalentheilen* beobachtet worden; durch Division derselben mit dem in Skalentheilen ausgedrückten Halbmesser (oder mit dem doppelten Abstande des Spiegels von der Skale) = 12875, erhält man diese Ablenkungen *in Bogenwerth für den Halbmesser* = 1.

| Nr. | Ablenkung in Skalenth. | Ablenkung in Bogenwerth für den Halbm. = 1 $\varphi$ |
|---|---|---|
| 1. | 73,5 | 0,0057087 |
| 2. | 80,0 | 0,0062136 |
| 3. | 96,5 | 0,0074952 |
| 4. | 91,1 | 0,0070757 |
| 5. | 97,8 | 0,0075962 |

In den »Elektrodynamischen Maassbestimmungen« II. S. 363 ist bewiesen worden, dass ein Strom von der Stärke = 1, welcher durch eine Multiplicatorwindung geht, deren Halbmesser = $a$ ist, auf ein Theilchen des *nordmagnetischen* Fluidums $+\mu$, oder auf ein Theilchen des *südmagnetischen* Fluidums $-\mu$, welches sich in der Entfernung = $b$ von der Ebene der Multiplicatorwindung befindet, und dessen Projection



auf diese Ebene in der Entfernung $= x$ vom Mittelpunkte liegt, senkrecht gegen die Ebene der Multiplicatorwindung eine *Kraft* $F$ ausübt,

$$F = \pm \frac{2\pi aa\mu}{(aa+bb+xx)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{1 + \tfrac{3}{4}(3aa - 2bb - 2xx)\frac{xx}{(aa+bb+xx)^2} + \ldots\right\},$$

woraus folgt, dass derselbe Strom auf eine *Nadel*, welche die Theilchen $+\mu$ und $-\mu$ in einer sehr kleinen, der Multiplicatorebene parallelen, Entfernung $= 2\varepsilon$ geschieden enthält, ein *Drehungsmoment* $D$ ausübt,

$$D = \frac{4\pi aa\mu\varepsilon}{(aa+bb+xx)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{1 + \tfrac{3}{4}(3aa - 2bb - 2xx)\frac{xx}{(aa+bb+xx)^2} + \ldots\right\},$$

wo $2\mu\varepsilon$ das *magnetische Moment* der Nadel oder den *Nadelmagnetismus* bezeichnet.

Von dieser Gleichung lassen sich nun drei verschiedene Anwendungen machen, *erstlich* auf die Artikel 1 für die magnetischen Wirkungen angenommenen *Normalverhältnisse*, *ferner* auf die *Tangentenboussole mit einfachem Multiplicatorkreise*, und *endlich* auf die zu den vorliegenden Versuchen gebrauchte *Tangentenboussole mit vielfachem Multiplicatorkreise*. Die beiden ersten Anwendungen beweisen nur, dass dieser Gleichung, wie schon a. a. O. bemerkt worden, in Beziehung auf die Stromstärke das in Artikel 1 aus den magnetischen Wirkungen abgeleitete Stromintensitätsmaass wirklich zum Grunde liegt; die letzte Anwendung führt zur Berechnung des *gesuchten Zeitraums* $\tau$.

Wendet man diese Gleichung *erstens* auf die Artikel 1 für die magnetischen Wirkungen eines Stromes angenommenen *Normalverhältnisse* an; so ist $\pi aa = 1$, $b = 0$, $2\mu\varepsilon = 1$, $x = R$ und $\frac{a}{R}$ ein verschwindend kleiner Bruch; es ergiebt sich dann *aus obiger Gleichung* das Drehungsmoment $D$ (ohne dem von der Stromrichtung abhängenden Vorzeichen),

$$D = \frac{1}{R^3} \text{ oder } R^3 D = 1,$$

was also mit der in Artikel 1 für die Stromintensität $= 1$ festgesetzten magnetischen Stromwirkung übereinstimmt. Hieraus folgt, dass obiger Gleichung das in Artikel 1 aus magnetischer Wirkung abgeleitete Stromintensitätsmaass zum Grunde liegt.

Wendet man *zweitens* dieselbe Gleichung auf eine *Tangentenboussole mit einfachem Multiplicatorkreise* vom Halbmesser $R$ an, wo eine kleine Magnetnadel im Mittelpunkte des Kreises, der Kreisebene parallel, nach dem magnetischen Meridian gerichtet ist; so ist $a = R$, $b = 0$, $x = 0$; es ergiebt sich dann *aus obiger Gleichung* das Drehungsmoment, welches vom Strome auf die *im magnetischen Meridiane* befindliche Nadel

ausgeübt wird,

$$D = \frac{4\pi\mu\varepsilon}{R}.$$

Bei einer *Ablenkung* der Nadel vom magnetischen Meridiane $= \varphi$ geht dasselbe in

$$D\cos\varphi = \frac{4\pi\mu\varepsilon}{R}\cdot\cos\varphi$$

über. Bezeichnet $T$ den horizontalen Erdmagnetismus, so ist $-2\,\mu\varepsilon T\sin\varphi$ das *von der Erde* auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment. Die Summe dieser beiden Momente ist $= 0$, wenn die Nadel bei der *Ablenkung* $\varphi$ in Ruhe beharrt; folglich ist

$$\frac{2\pi}{R} = T\,\mathrm{tang}\,\varphi \text{ oder } \varphi = \mathrm{arc\ tang}\frac{2\pi}{RT}.$$

Diese Ablenkung ist aber dieselbe, welche der Artikel 4 beschriebene *Normalstrom* bei einer Tangentenboussole mit einfachem Kreise hervorbringen sollte.

*Drittens* endlich soll die nämliche Gleichung auf die zu den vorliegenden Versuchen gebrauchte *Tangentenboussole mit vielfachen Multiplicatorkreisen* angewendet und daraus das Drehungsmoment bestimmt werden, welches der eben erwähnte, Artikel 4 beschriebene *Normalstrom*, wenn er durch alle Windungen des Multiplicators hindurchgeht, auf die Nadel ausübt.

Wir betrachten zunächst *eine* Windung des Multiplicators, vom Halbmesser $a$, deren Ebene von der Meridianebene der Nadel um $b$ absteht. Das von dieser Windung auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment $D'$ wird durch obige Gleichung bestimmt,

$$D' = \frac{4\pi aa\mu\varepsilon}{(aa+bb+xx)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left\{1 + \tfrac{3}{4}(3\,aa - 2\,bb - 2\,xx)\frac{xx}{(aa+bb+xx)^2} + \ldots\right\},$$

worin, wie bei der vorigen Anwendung, $x = 0$ gesetzt werden könnte, wenn die Länge der Nadel ein sehr kleiner Bruch von dem Durchmesser der Multiplicatorwindung wäre. Nun war zwar bei unsrer *Tangentenboussole* die Länge der Nadel blos 60 Millimeter, während der mittlere Durchmesser der Multiplicatorwindungen 267 Millimeter betrug, was aber noch nicht genügt, um $x$ ganz zu vernachlässigen. Doch genügt es, für $x$ einen Näherungswerth zu setzen, welcher sich darbietet, wenn man im Nadelmagnetismus $= 2\mu\varepsilon$ unter $+\mu$ und $-\mu$ die Menge des nach der *idealen Vertheilung* auf der Oberfläche der Nadel vertheilten nordmagnetischen und südmagnetischen Fluidums versteht, und demgemäss $2\varepsilon$ bestimmt, was dann den Abstand des Schwerpunkts des

nordmagnetischen von dem des südmagnetischen Fluidums bedeutet, so dass $x = \varepsilon$ zu setzen ist. Nach Länge und Beschaffenheit der gebrauchten Nadel kann $2\varepsilon$ nicht sehr von 40 Millimetern verschieden sein, und es kann daher mit hinreichender Genauigkeit

$$x = \varepsilon = 20 \text{ Millimeter}$$

gesetzt werden.

Bezeichnet man sodann mit $a'$ und $a''$ den inneren und äusseren Halbmesser des Multiplicatorrings und mit $2b'$ die Breite desselben, so ist der Querschnitt des ganzen Rings

$$= 2(a'' - a')b'.$$

Bezeichnet man ferner denjenigen Theil des Querschnitts, welcher auf die betrachtete Multiplicatorwindung kommt (deren Halbmesser $= a$ war und deren Ebene vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte der Nadel und des Multiplicatorrings um $b$ abstand), mit $da \cdot db$; so ist das Product dieses Elements des Querschnitts in das von der betrachteten Multiplicatorwindung auf die Boussole ausgeübte Drehungsmoment

$$= \frac{4\pi aa\mu\varepsilon}{(aa+bb+\varepsilon\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} \cdot da\, db \left\{1 + \tfrac{3}{4}(3aa - 2bb - 2\varepsilon\varepsilon)\frac{\varepsilon\varepsilon}{(aa+bb+\varepsilon\varepsilon)^2} + \ldots\right\},$$

oder, weil die Glieder, welche die vierte und höhere Potenzen des Bruchs $\frac{\varepsilon}{a}$ enthalten, wegen der Kleinheit dieses Bruchs vernachlässigt werden können,

$$= \frac{4\pi aa\mu\varepsilon}{(aa+bb)^{\frac{3}{2}}} \cdot da\, db \left\{1 + \tfrac{3}{4}\frac{aa-4bb}{(aa+bb)^2} \cdot \varepsilon\varepsilon\right\}.$$

Hieraus folgt nun die Summe der Producte des Querschnitts jeder Umwindung in das von derselben ausgeübte Drehungsmoment,

$$4\pi\mu\varepsilon \int_{a'}^{a''} aa\, da \int_{-b'}^{+b'} \frac{db}{(aa+bb)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{1 + \tfrac{3}{4}\frac{aa-4bb}{(aa+bb)^2} \cdot \varepsilon\varepsilon\right\}$$

$$= 8\pi\mu\varepsilon b' \left\{\log\frac{a'' + \sqrt{(a''a''+b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a'+b'b')}} + \tfrac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''a''+b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a'+b'b')^{\frac{3}{2}}}\right) \cdot \frac{\varepsilon\varepsilon}{b'b'}\right\}.$$

Durch Division dieses Werthes mit dem Querschnitt des ganzen Rings $= 2(a'' - a')b'$ erhält man dasjenige Drehungsmoment, welches im Mittel *eine* Multiplicatorwindung auf die Nadel ausübt, woraus durch Multiplication mit der Zahl der Umwindungen $n$ das von dem ganzen, vom *Normalstrome* durchflossenen, Multiplicator auf die Nadel ausgeübte *Drehungsmoment* erhalten wird, nämlich

$$D = \frac{4\pi n\mu\varepsilon}{a''-a'}\left\{\log\frac{a'' + \sqrt{(a''a''+b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a'+b'b')}} + \tfrac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''a''+b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a'+b'b')^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{\varepsilon\varepsilon}{b'b'}\right\}.$$

Dieses *Drehungsmoment* $D$ mit dem *Trägheitsmomente der Nadel* $K$ dividirt, giebt die angulare Beschleunigung der Nadel durch den gegebenen *Normalstrom*

$$= \frac{D}{K},$$

und diese Beschleunigung multiplicirt mit der im Vergleich mit der Schwingungsdauer der Nadel $= t$ sehr kurzen *Stromdauer* $\tau$ giebt die vom *Normalstrome* während seiner kurzen Dauer der Nadel ertheilte *Angulargeschwindigkeit*

$$= \frac{D\tau}{K}.$$

Aus dieser der ruhenden Nadel plötzlich ertheilten Angulargeschwindigkeit wird endlich die *Ablenkung* d. i. *die erste Elongationsweite* $\varphi$ der dadurch in Schwingung gesetzten Nadel nach bekannten Regeln (siehe »Elektrodynamische Maassbestimmungen« II. S. 348) berechnet, nämlich, wenn die Abnahme der Schwingungsbögen der Nadel durch das Verhältniss zweier auf einander folgender Schwingungsbögen $e^{\lambda} : 1$ gegeben ist,

$$\varphi = \frac{D\tau}{K} \cdot \frac{t}{\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}$$

Um in dieser Gleichung den Werth des Trägheitsmoments der Nadel $K$ und ihres magnetischen Moments $2\mu\varepsilon$ nicht durch besondere Beobachtungen bestimmen zu müssen, kann man durch Zuziehung der bekannten Gleichung für die Schwingungsdauer beide eliminiren, wobei aber auf die Torsionskraft des Fadens Rücksicht zu nehmen ist. Bezeichnet $1 : \theta$ das Verhältniss der auf die Nadel wirkenden erdmagnetischen Directionskraft, $= 2\mu\varepsilon T$, zu der vom Faden ausgeübten, so ist die Gleichung für die Schwingungsdauer $t$,

$$\frac{2\mu\varepsilon \cdot T}{K} = \frac{\pi\pi}{tt} \cdot \frac{1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}}{1 + \theta},$$

folglich wenn

$$d = \frac{D}{2\mu\varepsilon} = \frac{2\pi n}{a'' - a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{(a''a'' + b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a' + b'b')}} + \frac{1}{4} \left( \frac{a''^3}{(a''a'' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{\varepsilon\varepsilon}{b'b'} \right\}$$

gesetzt und die vorhergehende Gleichung mit $\frac{D}{2\mu\varepsilon \cdot T} = \frac{d}{T}$ multiplicirt wird,

$$\frac{D}{K} = \frac{d}{T} \cdot \frac{\pi\pi}{tt} \cdot \frac{1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}}{1 + \theta}.$$

Substituirt man diesen Werth in der Gleichung für $\varphi$, so erhält man

$$\varphi = \pi \frac{d}{T} \cdot \frac{\tau}{t} \cdot \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}{1 + \theta} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}$$

und hieraus die gesuchte *Dauer des Normalstromes*,

$$\tau = t \cdot \frac{\varphi}{\pi} \cdot \frac{T}{d} \cdot \frac{1+\theta}{\sqrt{\left(1+\frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}} \cdot e^{\frac{\lambda}{\pi} \text{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}}.$$

Am Multiplicator der hier gebrauchten Tangentenboussole war nun aber durch Messung bestimmt worden

$$2\pi a' = 709{,}0 \text{ Millimeter}$$
$$2\pi a'' = 965{,}35 \quad ,,$$
$$2b' = 72{,}04 \quad ,,$$
$$n = 5635$$

woraus, mit dem oben erwähnten Werthe von $\varepsilon = 20$ Millimeter, sich der Werth von $d$ ergiebt,

$$d = 262{,}1\,.$$

Dabei ergiebt sich, dass wenn auch der Werth von $\varepsilon$ auf 1 Millimeter unsicher wäre, die Unsicherheit von $d$ doch nur 0,4 auf 262, d. i. nur $\frac{1}{657}$ betragen würde, was nicht in Betracht kommt.

Ausserdem war die Schwingungsdauer der Nadel $t$, der horizontale Erdmagnetismus am Orte der Tangentenboussole $T$, das logarithmische Decrement für die Abnahme der Schwingungsbögen $\lambda$ und das Verhältniss $\theta$ der Directionskraft des Fadens zu der vom Erdmagnetismus $T$ herrührenden auf gewöhnliche Weise gefunden worden,

$$t = 9{,}244 \text{ Secunden}$$
$$T = 1{,}7983$$
$$\lambda = 0{,}070$$
$$\theta = \frac{1}{691}\,.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung für $\tau$ ein, so erhält man

$$\tau = 0{,}020921 \cdot \varphi\,.$$

Diese Werthe, welche sich für $\varphi$ in den fünf in Artikel 7 beschriebenen Versuchen ergeben, sind im Anfange dieses Artikels zusammengestellt worden; setzt man sie in die Gleichung für $\tau$ ein, so erhält man folgende fünf Resultate für die genannten Versuche.

| Nr. | $\tau$ |
|---|---|
| 1. | 0,0001194 |
| 2. | 0,0001300 |
| 3. | 0,0001568 |
| 4. | 0,0001480 |
| 5. | 0,0001589 |

## 14.

### *Berechnung der Grösse* $\frac{1}{2\tau} \cdot E$.

Es bleibt endlich noch übrig, aus den gefundenen Werthen von $E$ und $\tau$ die Werthe von $\frac{1}{2\tau} \cdot E$ zu berechnen. Stellen wir nämlich die correspondirenden Werthe von $E$ und $\tau$ aus den beiden vorhergehenden Artikeln in folgender Tafel zusammen,

| Nr. | $E$ | $\tau$ |
|---|---|---|
| 1. | 36060000 | 0,0001194 |
| 2. | 41940000 | 0,0001300 |
| 3. | 49700000 | 0,0001568 |
| 4. | 44350000 | 0,0001480 |
| 5. | 49660000 | 0,0001589 |

so ergeben sich daraus folgende fünf Werthe von $\frac{1}{2\tau} \cdot E$, als Resultate der in Artikel 7 beschriebenen fünf Messungen:

| Nr. | $\frac{1}{2\tau} \cdot E$ |
|---|---|
| 1. | $151000 . 10^6$ |
| 2. | $161300 . 10^6$ |
| 3. | $158500 . 10^6$ |
| 4. | $149800 . 10^6$ |
| 5. | $156250 . 10^6$ |

Aus allen Messungen zusammen genommen ergiebt sich also der Mittelwerth:

$$\frac{1}{2\tau} \cdot E = 155370 \cdot 10^6.$$

Nun bezeichnet aber nach Artikel 5

$$\frac{1}{2\tau} \cdot E : 1$$

das Verhältniss, in welchem bei einem constanten Strome, der von gleich grossen in entgegengesetzten Richtungen strömenden Massen positiver und negativer Elektricität gebildet wird, und dessen Intensität dem *magnetischen* Stromintensitätsmaasse gleich ist, die den Querschnitt des Leiters in 1 Secunde passirende *positive Elektricitätsmenge* zu derjenigen steht, welche in einem Punkte concentrirt auf eine gleiche Elektricitätsmenge in 1 Millimeter Abstand eine Kraft ausübt, die der Masse eines Milligramms während einer Secunde die Geschwindigkeit von 1 Milli-

meter in der Secunde ertheilt. Dieses Verhältniss zu bestimmen war die *Aufgabe*, welche, nach Artikel 4, gelöst werden sollte, was hiemit geschehen ist.

### 15.

*Zurückführung des magnetischen, elektrodynamischen und elektrolytischen Maasses der Stromintensität auf mechanisches Maass.*

Die Lösung der in Artikel 4 gestellten Aufgabe soll nun aber, nach Artikel 3, benutzt werden, *das magnetische, elektrodynamische und elektrolytische Maass der Stromintensität auf mechanisches Maass zurückzuführen.*

Bei einem constanten Strome, der von gleich grossen in entgegengesetzten Richtungen strömenden Massen positiver und negativer Elektricität gebildet wird, und dessen Intensität dem *mechanischen* Stromintensitätsmaasse gleich ist, soll nach Artikel 2 die den Querschnitt des Leiters in 1 Secunde passirende *positive Elektricitätsmenge* = 1 sein, d. i. gleich derjenigen, welche in einem Punkte concentrirt auf eine gleiche Elektricitätsmenge in 1 Millimeter Abstand eine Kraft ausübt, die der Masse eines Milligramms während einer Secunde die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Secunde ertheilt.

Zu dieser *Einheit* der positiven Elektricitätsmenge verhält sich aber, nach dem vorhergehenden Artikel, die bei einem Strome von der Intensität des *magnetischen* Strommaases den Querschnitt in 1 Secunde passirende *positive Elektricitätsmenge* wie

$$155370 \cdot 10^6 : 1.$$

Da nun die Stromintensitäten den in gleicher Zeit den Querschnitt passirenden Elektricitätsmengen proportional sind, so ergiebt sich hieraus unmittelbar *die Zurückführung des magnetischen Maasses der Stromintensität auf mechanisches Maass;* denn es ist hienach die in gleicher Zeit den Querschnitt passirende Elektricitätsmenge im *magnetischen* Strommaasse

$$155370 \cdot 10^6 \text{ Mal}$$

grösser als im *mechanischen* Strommaasse, folglich ist nach der angeführten Proportion auch *das magnetische Maass der Stromintensität selbst* $155370 \cdot 10^6$ *Mal grösser als das mechanische Maass.*

Ferner, da nach Artikel 1 S. 223 das *magnetische* Maass der Stromintensität zum *elektrodynamischen* sich verhält wie $\sqrt{2} : 1$, so ist *das elek-*

*trodynamische Maass der Stromintensität* $109860 \cdot 10^6 (= 155370 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}})$ *Mal grösser als das mechanische Maass.*

Endlich, da nach Artikel 1 S. 224 das *magnetische* Maass der Stromintensität sich zum *elektrolytischen* verhält wie $1 : 106\tfrac{2}{3}$, so ist *das elektrolytische Maass der Stromintensität* $16573 \cdot 10^9$ $(= 106\tfrac{2}{3} \cdot 155370 \cdot 10^6)$ *Mal grösser als das mechanische Maass.*

Durch die Zurückführung dieser drei Maasse der Stromintensität auf das mechanische Maass ist die Aufgabe dieser Abhandlung, wie sie Artikel 2 ausgesprochen worden ist, gelöst, und es bleiben nur *die Anwendungen* zu erörtern übrig, welche sich von den gefundenen Resultaten machen lassen.

## Anwendungen.

### 16.

*Bestimmung der zur Ausscheidung von 1 Milligramm Wasserstoff aus 9 Milligramm Wasser erforderlichen Elektricitätsmenge.*

Die erste Anwendung, welche wir von den gefundenen Resultaten machen können, ist die genaue Bestimmung der zur Ausscheidung von 1 Milligramm Wasserstoff aus 9 Milligramm Wasser erforderlichen Elektricitätsmenge, worüber die von Buff mit Hülfe seiner Tangentenboussole mit langem Leitungsdrahte gefundene und in den »Annalen der Chemie und Physik« Bd. 86 S. 33 mitgetheilte Bestimmung schon in der Note zu Artikel 3 S. 226 angeführt worden ist.

Diese Elektricitätsmenge würde nach Buff hinreichen, eine Batterie von 45480 Leidener Flaschen, jede von 480 Millimeter Höhe und 160 Millimeter Durchmesser, bis zu einer Schlagweite von 100 Millimeter zu laden. Dieser von Buff gegebenen Bestimmung fehlt nur die genauere Angabe derjenigen Elektricitätsmenge, welche eine Leidener Flasche von der beschriebenen Ladung enthält.

Aus den in dieser Abhandlung gefundenen Resultaten ergiebt sich nun, dass die zur Ausscheidung von $\tfrac{1}{9}$ Milligramm Wasserstoff aus 1 Milligramm Wasser erforderliche Elektricitätsmenge der bei einem constanten Strome von der Intensität des *elektrolytischen* Strommaasses den Querschnitt des Leiters in 1 Secunde passirenden *positiven Elektricitätsmenge* gleich ist. Letztere ist aber, nach Proportion der dem *elektrolytischen* und *magnetischen* Strommaasse entsprechenden Stromin-

sitäten (siehe Art. 1 S. 224), $106\frac{2}{3}$ Mal grösser als die bei einem constanten Strome von der Intensität des *magnetischen* Strommaasses den Querschnitt in 1 Secunde passirende *positive Elektricitätsmenge*, welche nach Artikel 14

$$155370 \cdot 10^6 \text{ Mal}$$

grösser ist, als die *Einheit* der Elektricitätsmenge, welche in einem Punkte concentrirt auf eine gleiche Menge in 1 Millimeter Abstand eine Kraft ausübt, die der Masse eines Milligramms während einer Secunde die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Secunde ertheilt.

Hieraus folgt, dass

$9 \cdot 106\frac{2}{3} \cdot 155370 \cdot 10^6 = 149157 \cdot 10^9$ *Einheiten, wie sie soeben bestimmt worden sind, zur Ausscheidung von 1 Milligramm Wasserstoff aus 9 Milligramm Wasser erforderlich sind.*

Wäre eine solche positive Elektricitätsmenge in einer Wolke, und eine gleiche negative an der senkrecht darunter liegenden Stelle der Erdoberfläche concentrirt, so würde daraus eine Anziehung der Wolke von der Erde sich ergeben, welche, bei 1000 Meter Abstand beider von einander, einem Gewichte von 45000 Centnern (= 2268000 Kilogramm) gleich wäre.

Dividirt man jene Zahl von Einheiten mit der Zahl der Leidener Flaschen der von Buff beschriebenen Batterie = 45480, so erhält man die genaue Angabe derjenigen Elektricitätsmenge, welche 1 Leidener Flasche von der von Buff beschriebenen Ladung enthält, nämlich

$$= 3280 \cdot 10^6 \text{ Einheiten.}$$

Die geladene Oberfläche einer solchen Flasche enthält aber nach Buff's Beschreibung

$$480 \cdot 160 \cdot \pi = 241300 \text{ Quadratmillimeter}$$

folglich war jedes Quadratmillimeter mit

$$13600 \text{ Einheiten}$$

geladen, wodurch die zu einer Schlagweite von 100 Millimeter nach Buff erforderliche Verdichtung oder Condensation der Elektricität in der Flasche bestimmt ist.

## 17.

### *Bestimmung der Constanten c.*

Nach dem in der ersten Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen aufgestellten Grundgesetze der elektrischen Wirkung,

welches die *Elektrostatik*, *Elektrodynamik* und *Induction* zusammen umfasst, wird die Kraft, welche die Elektricitätsmenge $e$ auf die Elektricitätsmenge $e'$ aus der Entfernung $r$ bei der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ und Beschleunigung $\frac{ddr}{dt^2}$ ausübt, durch

$$\frac{ee'}{rr}\left[1 - \frac{1}{cc}\left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r\frac{ddr}{dt^2}\right)\right]$$

ausgedrückt. Es zerfällt diese Kraft in zwei Theile, wovon man den ersten $= \frac{ee'}{rr}$ die *elektrostatische*, den zweiten $= -\frac{1}{cc}\frac{ee'}{rr}\left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r\frac{ddr}{dt^2}\right)$ die *elektrodynamische* Kraft nennen kann. Durch die *Constante* $c$ wird das Verhältniss dieser beiden Kräfte bestimmt; $c$ bedeutet denjenigen Werth der, als gleichförmig vorausgesetzten, relativen Geschwindigkeit, bei welcher die *elektrostatische* Kraft von der *elektrodynamischen* aufgehoben wird. Diese *Constante* $c$ wird nun auf folgende Weise bestimmt.

Artikel 14 ist das Verhältniss $\frac{1}{4\pi}\cdot E : 1$, das heisst *das Verhältniss des magnetischen Maasses der Stromintensität zum mechanischen*, gefunden worden

$$155370 \cdot 10^6 : 1.$$

In der zweiten Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen Art. 26 S. 261 ist das Verhältniss des *magnetischen* Maasses der Stromintensität zum *elektrodynamischen*

$$= \sqrt{2} : 1,$$

und Art. 27 S. 269 das Verhältniss des *elektrodynamischen* Maasses der Stromintensität zum *mechanischen*

$$= c : 4$$

angegeben worden, woraus *das Verhältniss des magnetischen Maasses der Stromintensität zum mechanischen* folgt

$$= c\sqrt{2} : 4.$$

Die Gleichsetzung dieses Verhältnisses mit dem Artikel 14 gefundenen giebt also

$$c = 4 \cdot 155378 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 439450 \cdot 10^6.$$

Aus dieser Bestimmung der *Constanten* $c$ ersieht man also, dass zwei elektrische Massen mit sehr grosser Geschwindigkeit gegen einander bewegt werden müssen, wenn die *elektrodynamische* Kraft die *elektrostatische* aufheben soll, nämlich mit einer Geschwindigkeit von 439 Millionen Meter oder 59320 Meilen in der Secunde, welche die Geschwindigkeit des Lichts bedeutend übertrifft.

Die Geschwindigkeit des Lichts ist selbst aber nicht die einer Körperbewegung, sondern die einer Wellenbewegung, während alle uns bekannten Geschwindigkeiten von wirklicher Körperbewegung, auch der Weltkörper, nur sehr kleine Bruchtheile davon bilden. Beachtet man nun dabei, dass das Verhältniss der *elektrodynamischen* Kraft zur *elektrostatischen* dem Quadrate dieses Bruchtheils entspricht, so ergiebt sich, dass die elektrodynamische Kraft gegen die elektrostatische in der Wirklichkeit stets als verschwindend betrachtet werden darf. — Von den Geschwindigkeiten, womit elektrische Fluida in metallenen Leitern sich bewegen, besitzen wir zwar noch keine Kenntniss; doch lässt sich aus verschiedenen Umständen abnehmen, dass die Menge der in diesen Leitern enthaltenen neutralen Elektricität ausserordentlich gross sei; je grösser aber letztere ist, desto kleiner ist die Geschwindigkeit der wirklichen Bewegung, die sich alsdann aus den vorhandenen *Stromintensitätsmessungen* ergiebt. Auch die Geschwindigkeit dieser Bewegungen bildet daher wahrscheinlich nur einen kleinen Bruchtheil von der Geschwindigkeit $c$.

Es ergiebt sich ferner aus dem gefundenen grossen Werthe der *Constanten c* die interessante Folgerung, dass auch der *Gravitationskraft ponderabeler Körper* ein solcher dynamischer Theil beigefügt werden könnte (wodurch eine grössere Analogie zwischen den Wechselwirkungen *ponderabeler* und *imponderabeler* Körper hergestellt würde), ohne dass dieser dynamische Theil der Kraft den geringsten merklichen Einfluss auf die Bewegungen der Weltkörper äussern würde.

Dass bei der Elektricität die Wirkung der *elektrodynamischen* Kraft nicht immer verschwindet, sondern bei galvanischen Strömen oft sehr augenscheinlich hervortritt, hat seinen Grund blos in der bei der *Neutralisation* positiver und negativer Elektricität statt findenden *vollkommenen Aufhebung aller elektrostatischen Kräfte*, gegen welche jene verschwinden würden. Wo keine solche Neutralisation statt findet, sondern freie Elektricität vorhanden ist, wird immer in der Wirkung dieser freien Elektricität die *elektrostatische* Kraft allein in Betracht kommen. Hieraus erklärt sich, warum nicht alle Versuche zur Begründung des Grundgesetzes der elektrischen Wirkung blos mit *zwei* Massen freier Elektricität ausgeführt werden können, sondern warum einige Versuche mit *zwei Paaren* von elektrischen Massen (Stromelementen), die sich *elektrostatisch neutralisiren*, gemacht werden müssen.

Bei *ponderabelen* Massen, für welche das Gesetz indifferenter Anziehung gilt, kann von *keiner Neutralisation der Massen* die Rede sein.

*Anmerkung.* Es ist im Anfang dieses Artikels zur Bestimmung der *Constanten c* die Gleichung aufgestellt worden:

$$c = \frac{E}{r} \cdot \sqrt{2},$$

worin $\frac{1}{2r} \cdot E : 1$ das Artikel 14 gefundene Verhältniss bezeichnet, in welchem bei einem constanten Strome von der Intensität des *magnetischen* Strommaasses die den Querschnitt des Leiters in 1 Secunde passirende *positive Elektricitätsmenge* zu derjenigen steht, welche in einem Punkte concentrirt auf eine gleiche Elektricitätsmenge in 1 Millimeter Abstand eine Kraft ausübt, die der Masse eines Milligramms während einer Secunde die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Secunde ertheilt. — Zum Beweis dieser Gleichung wurde auf die zweite Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen verwiesen. Die Richtigkeit dieser Gleichung lässt sich aber auch unmittelbar aus dem *Grundgesetz der elektrischen Wirkung* und aus der *Definition des magnetischen Strommaasses* entnehmen. Zu diesem Zwecke braucht man blos die Wechselwirkung zweier gleicher Stromelemente $\alpha$, $\alpha$ eines geradlinigen Stroms in der Entfernung $r$ zu betrachten, von denen schon in der Note zu S. 224 angeführt ist, dass sie einander mit der Kraft

$$= \frac{\alpha\alpha}{rr}\, ii$$

abstossen, wenn $i$ nach dem *magnetischen* Strommaasse ausgedrückt wird. Es folgt dies bekanntlich aus dem *Ampère'schen Fundamentalgesetz* und der sich daraus ergebenden Beziehung zwischen *Elektromagnetismus* und *Elektrodynamik*.

Dies vorausgesetzt stelle man sich vor, dass der geradlinige Leiter unseres Stroms in jedem Millimeter langen Stücke die Einheit positiver und negativer Elektricität enthalte. $\frac{1}{2r} E$ bezeichnet dann (nach Art. 14) die Zahl der Millimeter, welche beide Elektricitäten nach entgegengesetzter Richtung in der Secunde durchlaufen müssen, wenn

$$i = 1$$

sein soll. Unter diesen einfachen Verhältnissen sind also nicht allein die Elektricitätsmengen in den beiden Stromelementen $\alpha$, $\alpha$, deren Entfernung und übrigen Verhältnisse, von denen ihre Abstossungskraft (nach dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung) abhängt, sondern auch die *Grösse dieser Abstossungskraft* selbst gegeben, nämlich, weil $i = 1$ ist,

$$= \frac{\alpha\alpha}{rr}.$$

Es kommt also blos darauf an, diese schon bekannte Abstossungskraft aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung abzuleiten, alsdann wird, weil in diesem Grundgesetze $c$ enthalten ist, ein von $c$ abhängiger Ausdruck jener Kraft erhalten werden, den man dem schon bekannten Werthe nur gleich zu setzen braucht, um $c$ zu finden. Unter den beschriebenen einfachen Verhältnissen lässt sich aber die Abstossungskraft der beiden Stromelemente $\alpha$, $\alpha$ aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung sehr leicht ableiten; denn zerlegen wir die ganze durch das Grundgesetz gegebene Kraft in zwei Theile, in die *elektrostatische* und *elektrodynamische*

Kraft; so leuchtet von selbst ein, dass die Summe der elektrostatischen Kräfte (wegen der in beiden Stromelementen vorhandenen elektrostatischen Neutralisation) zwischen den beiden Stromelementen Null ist. Ebenso leuchtet ein, dass zwischen den elektrischen Massen beider Stromelemente keine Beschleunigung statt findet, dass also $\frac{ddr}{dt^2} = 0$ ist. Hiedurch reducirt sich der allgemeine Ausdruck der elektrischen Wirkung

$$\frac{ee'}{rr}\left[1 - \frac{1}{cc}\left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r\frac{ddr}{dt^2}\right)\right]$$

in unserem Falle auf

$$-\frac{1}{cc}\frac{ee'}{rr}\frac{dr^2}{dt^2}.$$

Dieser Ausdruck nun, angewendet

1) auf die beiden positiven Massen in den beiden Stromelementen $e = +\alpha$ und $e' = +\alpha$, giebt, da die relative Geschwindigkeit dieser Massen $\frac{dr}{dt} = 0$ ist (weil beide mit gleicher Geschwindigkeit in gleicher Richtung bewegt werden) die Abstossungskraft $= 0$;

2) dasselbe gilt für die beiden negativen Massen $e = -\alpha$ und $e' = -\alpha$;

3) derselbe Ausdruck aber, angewendet auf die positive Masse $e = +\alpha$ und die negative $e' = -\alpha$, giebt, da die relative Geschwindigkeit dieser Massen $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\tau}\cdot E$ ist (weil sie beide mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2\tau}\cdot E$ in entgegengesetzter Richtung bewegt werden) die Abstossungskraft $= +\frac{1}{cc}\frac{\alpha\alpha}{rr}\cdot\frac{1}{\tau\tau}\cdot EE$;

4) dasselbe gilt für die negative Masse $e = -\alpha$ und die positive $e' = +\alpha$.

Hieraus folgt also die Summe aller Abstossungskräfte der in beiden Stromelementen enthaltenen elektrischen Massen

$$= 2\cdot\frac{1}{cc}\cdot\frac{\alpha\alpha}{rr}\cdot\frac{1}{\tau\tau}EE,$$

und wird diese Summe ihrem schon bekannten Werthe $\frac{\alpha\alpha}{rr}$ gleich gesetzt; so ergiebt sich zur Bestimmung von $c$ folgende Gleichung:

$$\frac{\alpha\alpha}{rr} = 2\cdot\frac{1}{cc}\cdot\frac{\alpha\alpha}{rr}\cdot\frac{1}{\tau\tau}EE,$$

oder

$$c = \frac{E}{\tau}\cdot\sqrt{2},$$

was zu beweisen war.

## 18.

### *Die elektrischen Gesetze mit numerischer Bestimmung der Constanten.*

Die in der ersten und zweiten Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen entwickelten elektrischen Gesetze sind folgende:

1) *das Grundgesetz der elektrischen Wirkung*, — wonach die Kraft, welche die elektrische Masse $e$ auf die elektrische Masse $e'$ aus der Entfernung $r$ bei der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ und Beschleunigung $\frac{ddr}{dt^2}$

ausübt, durch

$$\frac{ee'}{rr}\left[1-\frac{1}{cc}\left(\frac{dr^2}{dt^2}-2r\frac{ddr}{dt^2}\right)\right]$$

ausgedrückt wird;

2) *das Fundamentalgesetz der Elektrodynamik*, — wonach die Kraft, welche ein unveränderliches und unbewegtes Stromelement von der Länge $\alpha$ und der Stromintensität $i$ auf ein gleiches Stromelement von der Länge $\alpha'$ und von der Stromintensität $i'$ aus der Entfernung $r$ ausübt, wenn $\alpha$ mit $r$ den Winkel $\theta$, $\alpha'$ mit der verlängerten $r$ den Winkel $\theta'$, und $\alpha$ mit $\alpha'$ den Winkel $\varepsilon$ bilden, durch

$$\frac{\alpha\alpha'}{rr}\, ii'(3\cos\theta\cos\theta'-2\cos\varepsilon)$$

ausgedrückt wird;

3) *das Gesetz der Voltainduction eines unveränderlichen gegen den Leiter bewegten Stromelements*, — wonach die elektromotorische Kraft, welche ein Stromelement von der Länge $\alpha$ und von der Stromintensität $i$ auf ein Leiterelement von der Länge $\alpha'$, welches mit der Geschwindigkeit $u$ bewegt wird, aus der Entfernung $r$ ausübt, wenn $\alpha$ mit $r$ den Winkel $\theta$, $\alpha'$ mit $r$ den Winkel $\varphi$, $u$ mit der verlängerten $r$ den Winkel $\theta'$, und $\alpha$ mit $u$ den Winkel $\varepsilon$ bilden, durch

$$\frac{2\sqrt{2}}{c}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{rr}\cdot ui\cos\varphi\,(3\cos\theta\cos\theta'-2\cos\varepsilon)$$

ausgedrückt wird;

4) *das Gesetz der Voltainduction eines veränderlichen, gegen den Leiter unbewegten Stromelements*, — wonach die elektromotorische Kraft, welche ein Stromelement von der Länge $\alpha$, dessen Stromintensität in der Zeit $t$ gleichförmig um $i$ wächst, auf ein Leiterelement von der Länge $\alpha'$ aus der Entfernung $r$ ausübt, wenn $\alpha$ mit $r$ den Winkel $\theta$, und $\alpha'$ mit der verlängerten $r$ den Winkel $\theta'$ bilden, durch

$$-\frac{2\sqrt{2}}{c}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{r}\cdot\frac{i}{t}\cos\theta\cos\theta'$$

ausgedrückt wird;

5) *das Gesetz der Voltainduction einer Gleitstelle*, — wonach die elektromotorische Kraft, welche ein durch die Gleitstelle gehender Strom von der Intensität $i$ bei der Gleitgeschwindigkeit $v$ auf ein Leiterelement von der Länge $\alpha'$ aus der Entfernung $r$ ausübt, wenn $v$ mit $r$ den Winkel $\theta$, $\alpha'$ mit der verlängerten $r$ den Winkel $\theta'$ bilden, durch

$$-\frac{2\sqrt{2}}{c}\cdot\frac{\alpha'}{r}\,vi\cos\theta\cos\theta'$$

ausgedrückt wird.



Ein positiver Werth der Ausdrücke (1) und (2) bedeutet eine Abstossungskraft, ein negativer Werth eine Anziehungskraft. Der Zahlenwerth nach unseren Maassen giebt die Grösse der Kräfte im Verhältniss zu derjenigen Kraft an, welche der Masse eines Milligramms während einer Secunde die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Secunde ertheilt. In dem Ausdruck (2), sowie in allen folgenden, werden die Stromintensitäten $i$, $i'$ nach *magnetischem* Maasse gemessen vorausgesetzt, was immer mit der *Tangentenboussole* leicht geschehen kann. Bezeichnet man die *elektrische Capacität* des Leiters $\alpha'$, d. h. das Verhältniss der in ihm enthaltenen positiven Elektricitätsmenge (die der negativen gleich ist) zu seiner Länge, mit $\varepsilon'$; so geben für $\varepsilon' = 1$ die Ausdrücke (3) (4) (5) den Unterschied der beiden Kräfte, welche in der Richtung von $\alpha'$ auf die in $\alpha'$ enthaltene positive und negative Elektricitätsmenge wirken, und zwar geben sie diesen *Kraftunterschied* im Verhältniss zu derjenigen Kraft an, welche der Masse eines Milligramms während einer Secunde die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Secunde ertheilt. — Ist $\varepsilon'$ von 1 verschieden, so müssen die Ausdrücke (3) (4) (5) mit $\varepsilon'$ multiplicirt werden, um den angegebenen *Kraftunterschied* zu erhalten.

Eine vollständige Bestimmung aller Kräfte durch die angegebenen Gesetze fordert, dass in allen obigen Ausdrücken für die *Constante* $c$ der im vorigen Artikel gefundene Zahlenwerth gesetzt werde. Man erhält alsdann:

$$(1.)\quad \frac{ee'}{rr}\left[1 - \frac{1}{cc}\left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r\frac{ddr}{dt^2}\right)\right] = \frac{ee'}{rr}\left[1 - \frac{1}{193120 \cdot 10^{16}}\left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r\frac{ddr}{dt^2}\right)\right]$$

$$(2.)\quad \frac{\alpha\alpha'}{rr}\, ii'(3\cos\theta\cos\theta' - 2\cos\varepsilon)$$

$$(3.)\quad \frac{2\sqrt{2}}{c}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{rr}\cdot ui\cos\varphi\,(3\cos\theta\cos\theta' - 2\cos\varepsilon)$$
$$= \frac{1}{155370 \cdot 10^{6}}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{rr}\cdot ui\cos\varphi\,(3\cos\theta\cos\theta' - 2\cos\varepsilon)$$

$$(4.)\quad -\frac{2\sqrt{2}}{c}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{r}\cdot\frac{i}{t}\cos\theta\cos\theta' = -\frac{1}{155370 \cdot 10^{6}}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{r}\cdot\frac{i}{t}\cos\theta\cos\theta'$$

$$(5.)\quad -\frac{2\sqrt{2}}{c}\cdot\frac{\alpha'}{r}\cdot vi\cos\theta\cos\theta' = -\frac{1}{155370 \cdot 10^{6}}\cdot\frac{\alpha'}{r}\cdot vi\cos\theta\cos\theta'.$$

Die elektrischen Gesetze in der letzteren Form, *mit numerischer Bestimmung aller Constanten*, genügen allen *praktischen* Forderungen; für *theoretische* Untersuchungen aber kann es in manchen Fällen erforderlich sein, statt der in *magnetischem* Maasse zu messenden Stromintensitäten $i$, $i'$ in obigen Ausdrücken die aus den *Ursachen* der Stromintensität (siehe Art. 2) abgeleiteten Werthe von $i$, $i'$ zu setzen. Bezeichnet

nämlich $+\alpha\varepsilon$ und $-\alpha\varepsilon$ die im Leiter $\alpha$ enthaltene positive und negative Elektricitätsmenge, und $+u$ und $-u$ ihre Geschwindigkeiten, womit sie im Leiter bewegt werden, bezeichnet ferner $+\alpha'\varepsilon'$, $-\alpha'\varepsilon'$, $+u'$ und $-u'$ das nämliche für den Leiter $\alpha'$; so sind $\varepsilon u$ und $\varepsilon' u'$ die Werthe der Stromintensitäten nach *mechanischem* Maasse bestimmt, und es müssen diese Werthe, nach dem Artikel 15 gefundenen Verhältnisse, mit $155370 \cdot 10^6$ dividirt werden, um die Werthe derselben Stromintensitäten nach *magnetischem* Maasse ausgedrückt zu erhalten; folglich ist in obigen Ausdrücken

$$i = \frac{\varepsilon u}{155370 \cdot 10^6}, \qquad i' = \frac{\varepsilon' u'}{155370 \cdot 10^6},$$

und es können diese Werthe, wenn es erforderlich sein sollte, in obigen Ausdrücken für $i$ und $i'$ substituirt werden.

## 19.

### *Anwendung auf Elektrolyse.*

Alle elektrischen Kräfte, welche durch die im vorhergehenden Artikel angeführten Gesetze bestimmt werden, sind Kräfte, welche unmittelbar nur auf elektrische Massen wirken. *Alle Kräfte aber, welche unmittelbar nur auf elektrische Massen wirken, wirken mittelbar auch auf die ponderabelen Träger jener elektrischen Massen.* Es wird dadurch der Anwendung der elektrischen Gesetze auf die Untersuchung der ponderabelen Körper ein weites Feld eröffnet; denn die Elektricität wird dadurch für uns zu einem Instrumente, mit dessen Hülfe wir bekannte Kräfte auf ponderabele Körper unter Verhältnissen wirken lassen können, unter denen keine anderen bekannten Kräfte wirken.

Obiger Satz leuchtet von selbst ein, wenn elektrische Massen mit ihrem ponderabelen Träger so verbunden sind, dass sie ohne denselben nicht bewegt werden können. Aber auch in metallischen Leitern, in denen sich die Elektricität bewegen kann, während ihr ponderabeler Träger (das Metall) in Ruhe verharrt, wo also die elektrischen Massen von einem Metalltheilchen zum andern übergehen, findet doch eine Verbindung statt, welche die elektrischen Massen mit den Metalltheilchen verknüpft, und welche gelöst werden muss, ehe die elektrische Masse von dem einen Metalltheilchen zum andern übergehen kann. So lange diese Verbindung besteht, werden alle Kräfte, welche unmittelbar nur auf die elektrischen Massen wirken, doch mittelbar auf die damit ver-

bundenen Metalltheilchen übertragen, und nur diejenigen Kräfte, welche auf die elektrischen Massen wirken, nachdem sie von den Metalltheilchen sich abgelöst haben, werden auf diese Metalltheilchen nicht mehr übertragen, sondern ertheilen den elektrischen Massen, bis sie zu den nächsten Metalltheilchen gelangen, eine bestimmte Geschwindigkeit, die aber durch die Verbindung, in welche jene elektrischen Massen mit diesen nächsten Metalltheilchen treten, wieder aufgehoben wird, was dieselbe Wirkung hat, wie wenn die elektrischen Kräfte, welche jene Geschwindigkeit hervorgebracht hatten, auf diese nächsten Metalltheilchen übertragen worden wären. Alle diese Kräfte, welche aus der Verbindung elektrischer Massen mit einzelnen Metalltheilchen hervorgehen, nennt man *Widerstandskräfte*, welche das Metall der Bewegung der Elektricität in seinem Innern entgegensetzt, aus denen das *Ohm'sche Gesetz* folgt, dass die Elektricität in den metallischen Leitern in einer gleichförmigen Bewegung nur dann beharren kann, wenn sie fortwährend von einer gleich grossen Kraft vorwärts getrieben wird, und dass der Strom augenblicklich verschwindet, sobald die treibende Kraft aufhört. — Es folgt also hieraus, dass auch bei Leitern, durch den *Widerstand* der Leiter, alle Kräfte, welche unmittelbar auf die Elektricität im Leiter wirken, mittelbar auf den Leiter selbst übertragen werden.

In der *Elektrolyse* hat man es nun mit keinem metallischen Leiter zu thun, welcher in Ruhe verharrt, während die elektrischen Fluida sich in ihm bewegen, sondern mit einem aus verschiedenartigen ponderabelen Theilchen zusammengesetzten Körper (Wasser), von denen die eine Art (Wasserstofftheilchen) der Bewegung der *positiven* Elektricität folgt, die andere Art (Sauerstofftheilchen) der Bewegung der *negativen* Elektricität. Es entsteht also die Frage, woher die Kräfte rühren, welche diese verschiedene Bewegung der beiden Bestandtheile des Wassers hervorbringen? Die elektrolytischen Gesetze beweisen, dass diese Bewegungen, wenn auch keine unmittelbare, doch eine mittelbare Wirkung der elektrischen Kräfte sein müssen. Wenn nun die elektrischen Kräfte unmittelbar nur auf die mit den Wasserstoff- und Sauerstofftheilchen verbundenen elektrischen Massen wirken, so beweist das Faktum, dass die Wasserstofftheilchen der Bewegung der positiven, die Sauerstofftheilchen der Bewegung der negativen Elektricität folgen, dass jene mit freier positiver, diese mit freier negativer Elektricität verbunden im Wasser enthalten sein müssen, wobei es dahin gestellt bleibt, ob sie ausser der

freien Elektricität auch noch eine Quantität neutralen Fluidums enthalten. Es mag auch unerörtert bleiben, wie stark diese Verbindung der Wasserstofftheilchen mit der freien positiven und der Sauerstofftheilchen mit der freien negativen Elektricität im Wasser sei; ob sie so stark sei, dass sie gar nicht gelöst werde, also die Elektricität bei der Elektrolyse sich nur mit ihrem ponderabelen Träger bewege, oder ob sie sich verhalte wie in metallischen Leitern, so dass der Elektricität ausser der Bewegung mit dem ponderabelen Träger auch noch eine von demselben unabhängige Bewegung zukomme. Nur könnte in letzterem Falle das Gesetz der Zersetzung verschiedener zusammengesetzten Körper durch denselben Strom nach Proportion der chemischen Äquivalente keine strenge Gültigkeit haben, wie es nach den neuesten Untersuchungen der Fall zu sein scheint.

Werden nun die elektrischen Kräfte, welche unmittelbar nur die elektrischen Fluida zu scheiden suchen, durch irgend ein Band, was diese Fluida mit den Bestandtheilen des Wassers verbindet, auf diese Bestandtheile übertragen, so kann eine nähere Bestimmung der *chemischen Scheidungskräfte*, welche die Trennung der ponderabelen Bestandtheile hervorbringen, durch die genaue Kenntniss der elektrischen Scheidungskräfte gewonnen werden, und es beruht hierauf das besondere Interesse, welches die Elektrolyse vor andern Methoden der chemischen Zersetzung besitzt. Die Elektricität lässt sich nämlich wie ein Instrument benutzen, durch welches wir an jedes Wasserstoff- und Sauerstofftheilchen im Wasser einen Faden knüpfen und beide Fäden in entgegengesetzter Richtung mit bekannten Kräften spannen können, bis die Wasserstoff- und Sauerstofftheilchen von einander gerissen werden.

Um dieses Instrument zu benutzen und dadurch wirklich die zur Trennung chemisch verbundener Theile erforderlichen Kräfte nach bekannten Maassen zu bestimmen, mussten *die elektrischen Gesetze mit numerischer Bestimmung ihrer Constanten* gegeben sein. Nachdem dies geschehen ist, wollen wir auch diese Anwendung von den gewonnenen Resultaten noch zu machen versuchen.

Die Kräfte, welche die elektrischen Fluida in Strombewegung versetzen, werden *elektromotorische Kräfte* genannt. Diese besondere Benennung (welche zur Unterscheidung *dieser Art von Kräften* und nicht blos ihrer Wirkungen gebraucht wird) hat ihren Grund blos darin, dass diese Kräfte bisher nicht nach bekannten Maassen gemessen,

sondern nur auf indirecte Weise durch die Wirkungen der von ihnen hervorgebrachten Ströme (Wärmewirkungen, chemische und magnetische Wirkungen) bestimmt werden konnten, wodurch sie zwar unter einander verglichen, aber absolut nach keinem bekannten Maasse ausgedrückt und daher auch mit andern bekannten Kräften nicht verglichen werden konnten. Dieser Grund fällt weg, wenn man diese Kräfte nach den im vorhergehenden Artikel angegebenen Gesetzen bestimmt, wodurch sie in bekannten Maassen ausgedrückt werden. Auch diejenigen Kräfte, welche man nicht unmittelbar nach obigen Gesetzen berechnen kann, erhält man in bekannten Maassen ausgedrückt, durch Vergleichung mit jenen. — Da man endlich die Vertheilung des Widerstands in einer geschlossenen Kette genau bestimmen kann und bei einem constanten Strome nach dem Ohm'schen Gesetz elektromotorische Kraft und Widerstand überall in gleichem Verhältniss stehen müssen, so lernt man dadurch auch die Vertheilung der elektromotorischen Kräfte auf die verschiedenen Theile der Kette kennen. Ist also in einer Kette ein Voltameter eingeschaltet, so lassen sich die im Wasser des Voltameters wirkenden elektrischen Scheidungskräfte, durch welche das Wasser zersetzt wird, genau ermitteln.

Es tritt nun aber beim Wasser der besondere Umstand ein, dass es in reinem Zustand einen sehr schlechten Stromleiter bildet und sehr schwer zersetzbar ist. Alle elektrolytischen Messungen beziehen sich daher auf Wasser, was mit Schwefelsäure oder anderen Stoffen vermischt ist: für verschiedene Mischungen erhält man verschiedene Resultate in Beziehung auf Zersetzbarkeit. Es ist daher nothwendig, sich zunächst auf eine bestimmte Mischung zu beschränken, und es soll hier also nach Horsford's in Poggendorff's Annalen 1847, Bd. 70, S. 238, mitgetheilten Untersuchungen eine Mischung von Wasser und Schwefelsäure von 1,25 spec. Gewicht gewählt werden, welche unter allen Mischungen von Wasser und Schwefelsäure am leichtesten zersetzt wird.

Der *Widerstand*, welchen diese Mischung dem Strome entgegensetzt, ist von Horsford für gleiche Länge und Querschnitt

696700 Mal

grösser als der Leitungswiderstand des Silbers gefunden worden, oder, wenn man das Leitungsverhältniss von Silber zu Kupfer nach Lenz (Poggendorff's Annalen Bd. 34. 418, Bd. 45. 105) wie 1 : 0,7417 setzt,

516750 Mal

grösser als der Leitungswiderstand des von Lenz gebrauchten Kupfers. — Nach den in den »Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen« Bd. 5 (Über die Anwendung der magnetischen Induction auf Messung der Inclination mit dem Magnetometer) mitgetheilten Messungen ist der Widerstand eines Kupferdrahts von 1 Millimeter Länge und 1 Milligramm Masse ($= \frac{1}{8,427}$ Quadratmillimeter Querschnitt) nach absolutem Maasse des *magnetischen* Systems

$$= 2310000$$

gefunden worden,*) d. i. für einen Kupferdraht von 1 Millimeter Länge und 1 Quadratmillimeter Querschnitt

$$= 274100.$$

Hieraus ergiebt sich der Widerstand obiger Mischung nach *magnetischem* Widerstandsmaass für 1 Millimeter Länge und 1 Quadratmillimeter Querschnitt

$$= 141640 \cdot 10^6.$$

Es sind aber in dieser Mischung dem Volumen nach nahe 9 Theile Wasser auf 1 Theil Schwefelsäure enthalten und es kommt daher von dem ganzen Querschnitt nur $\frac{9}{10}$ auf das reine Wasser. Setzt man voraus, dass der ganze Strom blos durch das Wasser geht (weil wenn ein Theil des Stromes durch die Schwefelsäure geleitet würde, dieser einen Nebenstrom bildete, welcher bei Betrachtung der Zersetzung des Wassers ausgeschlossen werden müsste), so würde der Widerstand blos auf Wasser (unter Einfluss der benachbarten Schwefelsäure) bezogen für 1 Milligramm Länge und 1 Quadratmillimeter Querschnitt

$$= 127476 \cdot 10^6$$

zu setzen sein.

Soll nun aber bei diesem *Widerstande* die Stromintensität nach *magnetischem* Maasse $= 106\frac{2}{3}$ sein, nämlich so stark, dass, nach Art. 1 S. 224 1 Milligramm Wasser in 1 Secunde zersetzt wird, so müsste die elektromotorische Kraft für jedes Millimeter nach *magnetischem* Maasse

$$106\tfrac{2}{3} \cdot 127476 \cdot 10^6$$

*) An der angeführten Stelle findet man den Widerstand verschiedener Kupfersorten angegeben, unter denen der obige, dem von Jacobi zu seinem Widerstands-Etalon gebrauchten Kupfer entsprechende, Werth der grösste ist. Dieser Werth ist gewählt worden, weil Lenz, mit Jacobi zu gemeinschaftlichen Arbeiten oft verbunden, sich bei seinen Versuchen wahrscheinlich auch der nämlichen Kupfersorte wie Jacobi bedient hat.

betragen, was mit $\frac{2\sqrt{2}}{c} = \frac{1}{155370 \cdot 10^6}$ zu multipliciren ist, um dieselbe Kraft nach *mechanischem* Maasse ausgedrückt zu erhalten.

Diese Zahl bedeutet nun aber nach dem vorhergehenden Artikel den *Unterschied der Kräfte*, welche in der Richtung des Stroms auf *jede Einheit* der freien positiven Elektricität (in den Wasserstofftheilchen) einer 1 Millimeter langen Wassersäule und auf *jede Einheit* der freien negativen Elektricität (in den darin befindlichen Sauerstofftheilchen) wirken, und diese Zahl muss daher, um die *ganze wirksame Kraft* zu erhalten, noch mit $n$ multiplicirt werden, wenn $n$ Einheiten freier positiver oder freier negativer Elektricität in den Wasserstoff- oder Sauerstofftheilchen der 1 Millimeter langen Wassersäule enthalten sind.

Der Wasserstoff von 1 Milligramm zerlegten Wassers giebt aber an die Elektrode, an der er sich entwickelt, seine freie positive Elektricität ab, welche darauf durch die Elektrode weiter strömt (oder, was in der Wirkung einerlei ist, durch Zuführung von negativer Elektricität daselbst neutralisirt wird,) und den Querschnitt in 1 Secunde durchfliesst. Da nun aber die Stromintensität nach *elektrolytischem* Maasse $= 1$ ist und nach Art. 15 bei dieser Stromintensität $106\frac{2}{3} \cdot 155370 \cdot 10^6$ Einheiten positiver und eben so viel negativer Elektricität durch den Querschnitt in 1 Secunde hindurchgehen, so ergiebt sich (wenn die Hälfte der an der Elektrode frei gewordenen positiven Elektricität durch die Elektrode weiter strömt, während die andere Hälfte von der durch die Elektrode zugeführten negativen Elektricität neutralisirt wird),

$$\tfrac{1}{2} n = 106\tfrac{2}{3} \cdot 155370 \cdot 10^6.$$

Multiplicirt man also obige Zahl mit

$$\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot n = 2 \cdot 106\tfrac{2}{3},$$

so giebt das Product

$$2 \cdot (106\tfrac{2}{3})^2 \cdot 127476 \cdot 10^6$$

den *Unterschied der Kräfte*, welche in der Richtung des Stroms auf die in den Wasserstofftheilchen von 1 Milligramm Wasser, welches eine 1 Millimeter lange Säule bildet, enthaltene freie positive, und auf die in den Sauerstofftheilchen enthaltene negative Elektricität (unter Einfluss der benachbarten Schwefelsäure) wirken müssen, wenn die Zersetzung des Wassers mit der Geschwindigkeit von 1 Milligramm in der Secunde erfolgen soll, und zwar ist dieser *Kraftunterschied* durch obige Zahl im Verhältniss zu derjenigen Kraft bestimmt, welche der Masse eines

Milligramms während einer Secunde die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Secunde ertheilt.

Das Gewicht eines Milligramms ist eine Kraft, welche der Masse eines Milligramms in 1 Secunde die Geschwindigkeit von 9811 Millimetern in der Secunde ertheilt; dividirt man daher die angegebene Zahl mit 9811, so erhält man jenen *Kraftunterschied* im Milligrammengewicht ausgedrückt

$$= \frac{2}{9811} \cdot (106\tfrac{2}{3})^2 \cdot 127476 \cdot 10^6 = 2 \cdot 147830 \cdot 10^6.$$

Man kann dieses Resultat auf folgende Weise aussprechen: *Wären alle Theilchen Wasserstoff in 1 Milligramm Wasser einer 1 Millimeter langen Säule an einen Faden geknüpft, und an einen andern Faden alle Theilchen Sauerstoff; so müssten beide Fäden in entgegengesetzten Richtungen jeder mit dem Gewicht von*

147830 *Kilogrammen*

*oder etwa* 2956 *Centnern gespannt werden, um eine Zersetzung des Wassers mit solcher Geschwindigkeit hervorzubringen, nach welcher* 1 *Milligramm Wasser in der Secunde zerlegt werden würde.* Die Spannung bleibt dieselbe für Säulen von verschiedenem Querschnitt, wächst aber porportional mit der Länge der Säule.

Sollte das Wasser unter gleichen Verhältnissen mit geringerer Geschwindigkeit zerlegt werden, z. B. mit der Geschwindigkeit von 1 Milligramm in 2956 Secunden, so würde obige Spannung proportional kleiner sein, z. B. nur 1 Centner betragen. Überhaupt würde die Spannung hienach beliebig klein sein können, immer würde Zersetzung erfolgen, nur aber mit desto geringerer Geschwindigkeit, je kleiner die Spannung wäre. Doch gilt dies nur unter der Voraussetzung, dass die *Widerstandskraft*, welche das Wasser seiner Zersetzung (der Bewegung des Wasserstoffs und Sauerstoffs in entgegengesetzten Richtungen) entgegensetzt, analog der *Widerstandskraft*, welche nach dem Ohm'schen Gesetze metallische Leiter der Bewegung der positiven und negativen Elektricität in ihrem Innern entgegensetzen, der Geschwindigkeit der Zersetzung proportional sei.*) Es ist aber selbst bei metallischen Leitern sehr wahr-

*) Nach dem Ohm'schen Gesetze ist das Verhältniss der Widerstandskraft, welche ein Leiter der Bewegung der Elektricität in seinem Innern entgegensetzt, zur Geschwindigkeit dieser Bewegung eine *Constante*, welche der *Widerstand* des Leiters genannt wird.

scheinlich, dass das Ohm'sche Gesetz der Wirklichkeit nicht genau entspreche, sondern dass streng genommen die Widerstandskraft aus zwei Theilen bestehe, von denen der eine der Geschwindigkeit proportional, der andere constant ist, weil dadurch allein die besseren Leiter (Metalle) mit den schlechteren (Isolatoren) unter ein gemeinschaftliches Gesetz gebracht werden können. Dasselbe gilt wahrscheinlich auch von der Widerstandskraft, welche das Wasser der Bewegung des Wasserstoffs und Sauerstoffs nach entgegengesetzten Richtungen in seinem Innern entgegensetzt. Der *Widerstand* (die Widerstandskraft dividirt durch die Stromgeschwindigkeit) wird dann durch die Summe einer Constanten $w$ und eines der Stromgeschwindigkeit umgekehrt proportionalen Theils $\frac{k}{i}$ dargestellt. Substituirt man nun diese Summe für den *Widerstand* im Ohm'schen Gesetze, so erhält man die Stromintensität $i$ durch die elektromotorische Kraft $E$ und durch die angegebene Summe auf folgende Weise ausgedrückt:

$$i = \frac{E}{w + \frac{k}{i}},$$

oder

$$E = k + wi.$$

Bei den metallischen Leitern ist $k$ sehr klein gegen die bei den Messungen vorkommenden Werthe von $wi$; bei den Isolatoren verschwindet $wi$ gegen $k$.

Sind nun auch keine genauen Versuche über das Wasser vorhanden, aus denen der Werth der Constanten $k$ bestimmt werden könnte; so sind doch Versuche vorhanden, durch welche bewiesen wird, dass diese Constante, wenn auch einen kleinen, doch keinen ganz verschwindenden Werth hat. Leitet man nämlich magnetisch inducirte Ströme durch Wasser, so lässt sich aus den messbaren Stromwirkungen entnehmen, dass dieselbe Induction, je nachdem sie schneller oder langsamer ausgeführt wird, mehr oder weniger Wasser zersetze, was nicht der Fall sein dürfte, wenn $k = 0$ wäre. — Bei elektrolytischen Messungen pflegt $wi$ so gross zu sein, dass $k$ dagegen nicht in Betracht kommt.

Man bezeichnet die Kräfte, welche der Trennung des Wasserstoffs und Sauerstoffs im Wasser Widerstand leisten, als *chemische Affinitätskräfte*, die man aber bisher nicht im Stande war, in bekannten Maassen auszudrücken. In diesem Artikel sollte an einem Beispiele gezeigt werden, wie die Resultate der vorhergehenden Untersuchung zur wirklichen

Ausführung einer solchen Bestimmung benutzt werden können. Es wird dadurch der Weg zur näheren Erforschung der *Gesetze der chemischen Affinitätskräfte* gebahnt, wozu aber zahlreichere Messungen dieser Kräfte nöthig sind, wovon hier nur eine Messung als Beispiel gegeben werden sollte.

## 20.

### *Elektricitätsgehalt der Leiter.*

Die Intensität des durch einen Leiter gehenden Stroms ist proportional der Geschwindigkeit, mit welcher die im Leiter enthaltene positive und negative Elektricität *durch den Querschnitt des Leiters* fliesst, und hängt daher von zwei Faktoren ab: 1) von der in jedem *Längenelemente* des Leiters enthaltenen Elektricitätsmenge (welche die *Capacität* des Leiters genannt werden kann), 2) von der Geschwindigkeit, mit welcher diese Elektricitätsmenge (positive und negative nach entgegengesetzter Richtung) sich im Leiter fortbewegt. Lässt sich nun auch die Intensität des Stromes messen, das heisst die positive und negative Elektricitätsmenge nach bekannten Maassen bestimmen, welche *durch den Querschnitt des Leiters* fliesst, so lässt sich doch weder die in einem *Längenelement* des Leiters enthaltene Elektricitätsmenge noch die *Geschwindigkeit*, mit welcher sich dieselbe im Leiter fortbewegt, einzeln bestimmen: es würde dies nur in solchen Fällen geschehen können, wo die eine Elektricität sich nicht allein bewegte, sondern die Leitertheilchen, in denen sie enthalten wäre, mit fortführte.

Ob nun dieser Fall beim Überspringen der Elektricität von einem Conductor zum andern (durch eine Luftschicht), wobei kleine Theilchen von dem einen Conductor abgerissen und zum andern Conductor hinübergeführt werden, statt finde, ist zwar auf experimentellem Wege nicht ermittelt, und wird sich auch nicht vollständig und sicher ermitteln lassen; doch scheint es unter gewissen Verhältnissen faktisch festzustehen, dass nur von dem positiv geladenen Conductor kleine Theilchen abgerissen und zum negativen Conductor hinüber geführt werden. Auch unterliegt es keinem Zweifel, dass diese kleinen abgerissenen Theilchen mit freier positiver Elektricität geladen sind und dass durch dieselben der Übergang einer bestimmten Elektricitätsmenge von einem Conductor zum andern vermittelt werde. Ob aber nur der Übergang eines Theils oder aller positiver Elektricität von jenem Conductor zu

diesem auf diese Weise vermittelt werde, ferner ob in diesen kleinen abgerissenen Theilchen blos freie positive Elektricität oder ausserdem auch eine bestimmte Menge neutralen Fluidums enthalten sei, endlich wie sich dabei die negative Elektricität des andern Conductors verhalte, ist bisher keiner näheren Erörterung unterworfen worden.

Was zunächst das Verhalten der Elektricität des negativ geladenen Conductors betrifft, von welcher unter den erwähnten Verhältnissen kein Theilchen abgerissen und zum positiven Conductor geführt wird, so scheint daraus hervorzugehen, dass die negative Ladung dieses Conductors unter jenen Verhältnissen irgend eine Verzögerung erlitten, und dass daher, ehe diese Ladung die zum Abreissen kleiner Theilchen erforderliche Stärke erreicht habe, die vom positiv geladenen Conductor abgerissenen Theilchen schon zum negativen gelangen und durch Mittheilung ihrer positiven Ladung das Wachsthum der negativen Ladung verhindern. Unter diesen Verhältnissen würde also gar keine Elektricität vom negativ geladenen Conductor zum positiv geladenen übergehen.

Was die andere Frage betrifft, ob die abgerissenen Theilchen blos freie positive Elektricität enthalten, oder ob sie ausserdem eine bestimmte Quantität neutrales Fluidum mit sich führen, so lässt sich eine bestimmte Ansicht hierüber nur auf das Faktum der äussersten Feinheit der abgerissenen Theilchen begründen.

Es ist nämlich bekannt, dass, wenn eine grössere und kleinere Kugel nach der Berührung getrennt werden, die in beiden enthaltene freie Elektricität sich zwischen ihnen nach einem bestimmten Verhältnisse theilt, und zwar so, dass die mittlere Dicke der an der Oberfläche jeder Kugel befindlichen Elektricitätsschicht nicht gleich, sondern dass die an der Oberfläche der kleineren Kugel grösser ist, als die an der Oberfläche der grösseren, und zwar dass das Verhältniss sich dem Verhältniss

$$1,6449 : 1$$

desto mehr nähert, je ungleicher beide Kugeln sind.

Ein abgerissenes Theilchen kann nun als eine äusserst kleine Kugel betrachtet werden, und es wird daher, wenn man die Dicke der an der Oberfläche des positiv geladenen Conductors vorhandenen Elektricitätsschicht mit $\varepsilon$ bezeichnet, die Dicke der an der Oberfläche des abgerissenen Theilchens vorhandenen $= 1,6449 \cdot \varepsilon$ zu setzen sein. Während nun bekanntlich bei dem positiv geladenen Conductor $\varepsilon$ gegen den

Krümmungshalbmesser seiner Oberfläche verschwindet, lässt sich keineswegs annehmen, dass auch 1,6449 · ε gegen den Halbmesser des kleinen abgerissenen Theilchens verschwinde, im Gegentheil darf man bei der äussersten Kleinheit dieses Theilchen voraussetzen, dass sein Halbmesser kleiner oder wenigstens nicht grösser sei als 1,6449 · ε. Alsdann folgt aber, dass diese Schicht freier positiver Elektricität das ganze Theilchen erfülle und dass also kein von dieser Schicht eingeschlossener Raum vorhanden sei, der eine bestimmte Menge neutralen Fluidums enthielte. Die kleinen abgerissenen Theilchen würden also blos freie positive Elektricität enthalten.

Was endlich die Frage betrifft, ob von dem positiv geladenen Conductor die freie Elektricität nur von den abgerissenen Theilchen zum negativen Conductor hinübergeführt werde, oder ob daneben eine andere Quantität positiver Elektricität ohne ponderabelen Träger sich selbst einen Weg zum negativ geladenen Conductor bahne, so kann nur der Mangel alles physischen Grundes geltend gemacht werden, von dem es abhinge, dass der eine Theil der Elektricität, unter ganz gleichen Verhältnissen, sich unabhängig von seinem ponderabelen Träger bewegen sollte, während der andere seinen ponderabelen Träger mit nachziehen müsste. Da es also von einem Theile der übergehenden Elektricität faktisch feststeht, dass sie ihren ponderabelen Träger mit fortzieht, so muss dasselbe von aller übergehenden Elektricität so lange angenommen werden, bis das Gegentheil bewiesen wird.

Es würde hier also der Fall eines Stromes wirklich vorliegen, bei welchem sich die Leitertheilchen, welche nur positive Elektricität enthalten, fortbewegen. Nun lässt sich nach den gewonnenen Maassbestimmungen die fortbewegte Elektricitätsmenge, welche von dem einen Conductor zum andern übergegangen ist (durch Messung der Stromintensität) genau bestimmen; folglich bleibt nur übrig, auch die Menge der ponderabelen Masse genau zu bestimmen, welche gleichzeitig von dem positiven Conductor abgerissen und an den negativen Conductor angesetzt worden ist. So klein diese ponderabele Masse auch sein mag, so lässt sie sich doch deutlich beobachten und es ist danach anzunehmen, dass auch ihr Gewicht mit den feinsten Wagen, die wir besitzen, sich werde bestimmen lassen.

Jedenfalls wird sich ergeben, dass selbst für sehr grosse Elektricitätsmengen, welche vom positiv geladenen Conductor zum negativ

geladenen übergehen, die ponderabele Masse der mit fortgerissenen Leitertheilchen sehr klein sei, dass folglich die in jedem *Längenelemente* des Leiters enthaltene Elektricitätsmenge ausserordentlich gross sei. Je grösser aber diese Elektricitätsmenge ist, desto kleiner ist, bei gegebener Stromintensität, die *Geschwindigkeit*, mit welcher sich diese Elektricitätsmenge im Leiter fortbewegt, und es darf daher diese geringe Geschwindigkeit, mit welcher sich die elektrischen Fluida in ihren Leitern bewegen, in keiner Weise mit der ausserordentlich grossen Geschwindigkeit verwechselt werden, mit welcher die Störung des Gleichgewichts der elektrischen Fluida durch metallische Leiter fortgepflanzt wird, auf welche die bekannten von Wheatstone gemachten Versuche sich beziehen.

Dass die in einem Längenelemente eines *metallischen Leiters* enthaltene Elektricitätsmenge sehr gross, und die Geschwindigkeit, mit welcher sich diese Elektricitätsmenge im Leiter bewegt, bei allen wirklich dargestellten Strömen sehr klein sei, liess sich nach Analogie aus dem für *feuchte Leiter* (Wasser) in Artikel 15 gefundenen Resultate im voraus erwarten. Denn es ist dort gefunden worden, dass bei einem Strome, dessen Intensität nach *elektrolytischem* Maasse = 1 ist, eine positive Elektricitätsmenge von $106\frac{2}{3} \cdot 155370 \cdot 10^6$ Einheiten zusammen mit $\frac{1}{9}$ Milligramm Wasserstoff in der einen Richtung, und eine gleich grosse negative Elektricitätsmenge mit $\frac{8}{9}$ Milligramm Sauerstoff verbunden in entgegengesetzter Richtung durch den Querschnitt des Leiters in 1 Secunde geht, woraus folgt, dass in 1 Milligramm Wasser $106\frac{2}{3} \cdot 155370 \cdot 10^6$ Einheiten positiver und gleich viel negativer Elektricität enthalten sein müsse, die sich aber (zusammen mit ihren ponderabelen Trägern) nur mit der geringen Geschwindigkeit von $\frac{1}{2}$ Millimeter in der Secunde fortbewegen, wenn der Querschnitt des feuchten Leiters nur 1 Quadratmillimeter gross ist. Ist der Querschnitt grösser, so ist die Geschwindigkeit nach Verhältniss noch kleiner.

## 21.

### *Anwendung auf Maasse.*

Die in der Physik gebräuchlichen Maasse werden in *Grundmaasse* und *abgeleitete Maasse* eingetheilt. In der allgemeinen Mechanik, wo alle Kräfte einzeln als gegeben betrachtet werden, lassen sich alle Maasse

auf die drei bekannten Grundmaasse für *Raum*, *Zeit* und *Masse* zurückführen. — In allen denjenigen Theilen der Physik, wo das *Gravitationsgesetz* vorausgesetzt werden darf, lassen sich alle Maasse blos auf die beiden Grundmaasse für *Raum* und *Zeit* zurückführen, aus denen mit Hülfe des Gravitationsgesetzes auch das Maass der *Masse* abgeleitet wird. Man kann nämlich diejenige Masse zum Maasse nehmen, welche, wenn sie in einem Punkte concentrirt wäre, auf eine andere Masse in der Einheit der Entfernung nach dem Gravitationsgesetze eine Kraft ausübt, die ihr in der Zeiteinheit eine Geschwindigkeit ertheilt gleich der Längeneinheit in der Zeiteinheit.

Es ist nun interessant zu bemerken, dass auch dieses Maasssystem noch einer Vereinfachung fähig ist, und dass es möglich ist alle in der Physik gebrauchten Maasse *aus dem einzigen Grundmaass für Raum* abzuleiten, wenn man zwei Grundgesetze der Natur zu diesem Zwecke voraussetzen darf, nämlich ausser dem *Gravitationsgesetze ponderabeler Massen* das *Grundgesetz der elektrischen Wirkung*. Denn mit Hülfe des letzteren kann auch *das Maass der Zeit aus dem Raummaasse abgeleitet werden*. Man kann nämlich diejenige Zeit zum Maasse nehmen, in welcher sich zwei mit gleichförmiger relativer Geschwindigkeit bewegte elektrische Massen um die Längeneinheit einander nähern oder von einander entfernen müssen, wenn sie nach diesem Gesetze gar keine Wirkung auf einander ausüben sollen.

Wählt man das *Millimeter* zum Raummaasse, so würde unter Voraussetzung des Grundgesetzes der elektrischen Wirkung aus diesem Raummaass ein Zeitmaass abgeleitet werden, welches der

4 39450 *Millionste Theil einer Secunde*

wäre; denn wenn zwei mit gleichförmiger relativer Geschwindigkeit bewegte elektrische Massen in diesem kleinen Zeitraume um 1 Millimeter sich einander nähern oder von einander entfernen, so üben sie nach dem Grundgesetz der elektrischen Wirkung gar keine Wirkung auf einander aus.

Nachdem auf diese Weise aus dem Raummaass das Zeitmaass abgeleitet worden ist, kann ferner aus diesen beiden Maassen unter Voraussetzung des Gravitationsgesetzes auch das Maass der Masse abgeleitet werden. Es ist nämlich nach dem Gravitationsgesetze die Erde eine Masse, welche, wenn sie in einem Punkte concentrirt wäre, einer andern Masse in einer dem Erdhalbmesser gleichen Entfernung die

Beschleunigung = 9811 ertheilt, wenn das Millimeter zum Raummaass und die Secunde zum Zeitmaass gebraucht werden. Nimmt man nun statt der Secunde das eben abgeleitete Zeitmaass, welches 439450 Millionen Mal kleiner ist, so ist das abgeleitete Beschleunigungsmaass $439450^2$ Billionen Mal grösser, und es ist nach diesem grösseren Maasse obige Beschleunigung

$$= \frac{9811}{439450^2 \cdot 10^{12}}.$$

Setzt man nun den Erdhalbmesser $= 6370 \cdot 10^6$ (Millimeter), so ergiebt sich nach dem Gravitationsgesetze die Erde als eine Masse, welche, wenn sie in einem Punkte concentrirt wäre, einer andern Masse in der Einheit der Entfernung die Beschleunigung

$$= \frac{9811 \cdot 6370^2 \cdot 10^{12}}{439450^2 \cdot 10^{12}}$$

ertheilt, folglich ist eine Masse, welche $\frac{439450^2}{9811 \cdot 6370^2}$ oder fasst die Hälfte von der Erdmasse beträgt, diejenige Masse, welche nach dem Gravitationsgesetze, unter Annahme des Millimeters als Raummaasses und mit Hülfe des daraus schon abgeleiteten Zeitmaasses, als *abgeleitetes Massenmaass* erhalten wird.

Aus dem Millimeter als Raummaass und aus dem daraus eben abgeleiteten Zeit- und Massenmaasse werden endlich alle übrigen in der Physik gebrauchten Maasse auf bekannte Weise abgeleitet.

Nach diesem Systeme, wo alle Maasse aus dem einzigen Grundmaasse des Raums abgeleitet werden, ist die Anziehungskraft zweier Massen $m$, $m'$ in der Entfernung $r$ gleich $\frac{mm'}{rr}$ und die Abstossungskraft zweier Elektricitätsmengen $e$, $e'$ in der Entfernung $r$ gleich $\frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{dr^2}{dt^2} + 2r\frac{ddr}{dt^2}\right)$, ohne dass diesen Ausdrücken oder einzelnen Gliedern derselben constante Factoren beizufügen sind.

# Anhang.

## I. Beschreibung der Torsionswage.

Um eine ungleiche Rückwirkung der von den geladenen Kugeln durch Influenz elektrisirten Wände der Torsionswage auf die bewegliche Kugel möglichst zu vermeiden, ist die Wage in ungewöhnlich grossem Maassstabe ausgeführt. Der Kasten, in welchem die Kugeln hingen, war parallelepipedisch 1,16 Meter lang, $0^{m}87$ breit und $1^{m}44$ hoch. Die 12 Kanten des Parallelepipeds waren aus quadratischen Pfosten ($80^{mm}$ Seite) von hartem Holze gezimmert. Nachdem das Gerüst auf einem grossen fundamentirten Stein festgestellt war, wurde als Deckel eine schwere Holzplatte aufgelegt, die Seitenwände aber wurden in der Weise mit scharf angespanntem Wachstuch bekleidet, dass die Kanten der Pfosten nicht in das Innere des Raumes hineinragten. Nach dieser Bekleidung, welche zum Einhängen der Apparate blos das obere Viertel einer Wand offen liess, wurde die Festigkeit des Kastens durch angeschraubte Streben noch sehr vermehrt. Bei der Messung selbst wurde die Öffnung, nachdem die Standkugel eingebracht war, durch einen Schieber geschlossen. Ausserdem war aber der ganze Kasten mehrfach mit Tüchern und Decken, die auf dem Steine noch auflagen, behängt, um jeden Luftzug abzuhalten. Dennoch war es nöthig, Nachts in dem ungeheizten Zimmer zu beobachten, weil das Öffnen und Schliessen der Thüren in andern Theilen des Gebäudes und die ungleiche Erwärmung namentlich des Fussbodens durch die Sonne zu Luftströmungen Veranlassung wurden, welche ein Schwanken der beweglichen Kugel zuweilen bis zu einem halben Grade hervorbrachten. Nachts aber, wenn die Luft draussen nicht zu unruhig war, schwankte die Kugel nicht um eine Minute.

Über der Mitte des Deckels, dessen Durchschnitt Fig. 2 mit *D* bezeichnet ist, war der Torsionskreis *T* befestigt, dessen Alhidade *AA'* die einzelne Minute durch ihre Nonien ablesen liess und zur feineren Regulirung der Torsion durch einen Hook'schen Schlüssel *H*, oder nach dessen Auslösung auch frei durch die Hand geführt werden konnte. Weiter bedeuten die Buchstaben der Figur:

*a* den hartgezogenen Messingdraht (Nr. 12) 398$^{mm}$ lang, in der Axe der Alhidade befestigt;

*b* einen kleinen Messingcylinder mit Seitenschraube, um ihn am unteren Ende von *a* festzuklemmen. Unten an ihm ist

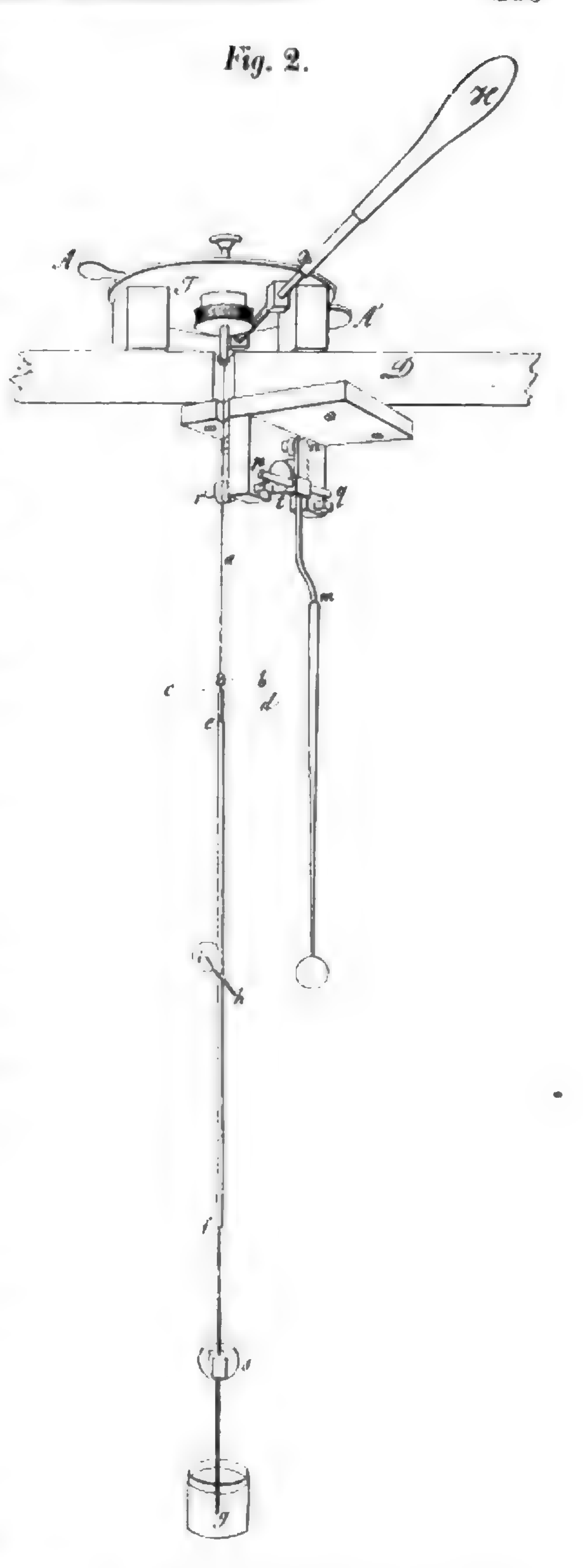
*c* eine 5$^{mm}$ vorragende Schraubenspindel, entweder um die Körper anzuschrauben, durch deren Schwingungsdauer der Torsionscoefficient bestimmt werden sollte, oder den Messingdraht

*d*, an welchen die 5$^{mm}$ dicke, 450$^{mm}$ lange cylindrische Stange *ef* von reinem Schellack angeschmolzen war.*)

*hi* bedeutet den Schellackhebel für die bewegliche Kugel, der sich beiderseits bei etwa 60$^{mm}$ Länge bis zu 2$^{mm}$5 Dicke verjüngte.

*fg* ist ein Draht, unten einen Zoll weit in Olivenöl tauchend, mit einem in Holz gefassten Spiegel *s*. Das Öl hat die Wirkung, nicht nur die Schwankungen der beweglichen Kugel, sondern auch die durch Erschütterungen entstandenen Pendelbewegungen der

*Fig. 2.*



*) Gegen die Grösse des oberen Theiles der Figur, ist die Länge *ef*, wie überhaupt die Länge *Tg* zu gering gezeichnet. Die Kugeln waren vom Deckel weiter entfernt.

langen Stange in kürzester Zeit zu beruhigen, während es andererseits durchaus kein Hinderniss ist, dass der Hebel der allergeringsten Torsionsänderung folgt.

Die beiden Kugeln der Drehwage bestanden aus sehr dünnem Argentanblech, waren fein polirt und vergoldet, und blos durch Erhitzen an das Schellack angeklebt.

Die lange, unten sich verdünnende vertikale Schellackstange für die *Standkugel* war an eine gekrümmte Messingstange *mn* geklebt. Mit dieser war eine horizontale Axe *pq* mit zwei Stahlspitzen und rechtwinklig dazu ein Messingstab *rt* mit einem Laufgewichte fest verbunden. Die Spitzen standen auf Messinglagern, *q* in einem conischen Loch, *p* in einem Schlitz. Das Laufgewicht drückte das obere Ende der Messingstange *mn* gegen eine Stellschraube, so dass jedesmal nach erneutem Aus- und Einbringen die Standkugel genau dieselbe Lage in der Torsionswage bekommen musste. Drückte man zum Laden der beweglichen Kugel die Messingstange *mn* nach vorn, bis der Stab *tr* gegen eine Stellschraube trat, so befand sich die geladene Standkugel neben der beweglichen, zog sie an und lud sie, ohne dass letztere erst einen grossen Bogen zu beschreiben brauchte.

Dem Spiegel *s* gegenüber war in der Wand der Torsionswage eine mit einem Planglase verschlossene Öffnung. Aussen in einiger Entfernung befand sich eine horizontale Skala, deren Spiegelbild in einem Fernrohr beobachtet werden konnte. Die Entfernung der Skala war so gewählt, dass, wenn die Drehung des Hebels der Torsionswage eine Minute betrug, die Skala im Fernrohr sich um einen Skalentheil bewegte. Zugleich war die Skala so gestellt, dass dann, wenn die Mittelpunkte der beiden Kugeln mit der Drehaxe genau einen rechten Winkel bildeten, ihr in der Mitte gelegener Nullpunkt, von dem aus sie nach beiden Seiten numerirt war, grade im Faden des Fernrohrs erschien.

Dies war die Lage der Kugeln, in der sie beobachtet werden sollten und die auf diese Weise mit grosser Schärfe immer erkannt werden konnte. Hatte sich nach ihrer Elektrisirung die bewegliche Kugel weiter von der Standkugel entfernt, so konnte der am Fernrohr befindliche Beobachter sogleich ablesen, um wie viele Grade oder Minuten ihr Stand durch die Torsion corrigirt werden musste. Andererseits war an dem Hook'schen Schlüssel eine Scheibe angebracht, welche die Drehung dieses Schlüssels in Minuten der Drehung der Alhidade erkennen

liess, und so konnte der die Torsion regulirende zweite Beobachter, ohne auf den Nonius zu sehn, auf Commando*) die Correction herbeiführen. Einige Übung in der rechtzeitigen Ertheilung und Ausführung dieses Commandos und die vortreffliche Wirkung des Öls brachten es bald dahin, dass in verhältnissmässig sehr kurzer Zeit die durch das Laden in heftige Bewegung gerathene bewegliche Kugel vollkommen ruhig so stand, dass die Mittelpunkte der beiden Kugeln mit der Drehaxe einen Winkel bildeten, der um wenige Minuten grösser als ein Rechter war, d. h. dass im Fernrohr der Nullpunkt der Skala um einige Theilstriche vom Faden des Fernrohrs abstand. Der Elektricitätsverlust führte dann durch die vorhandene Torsion von selbst die Kugel allmählig näher an die Standkugel heran, so dass der Zeitpunkt, in welchem der Nullpunkt der langsam wandernden Skala den Faden des Fernrohrs passirte, mit Schärfe zu bestimmen war. Darauf wurde die Torsion abgelesen.

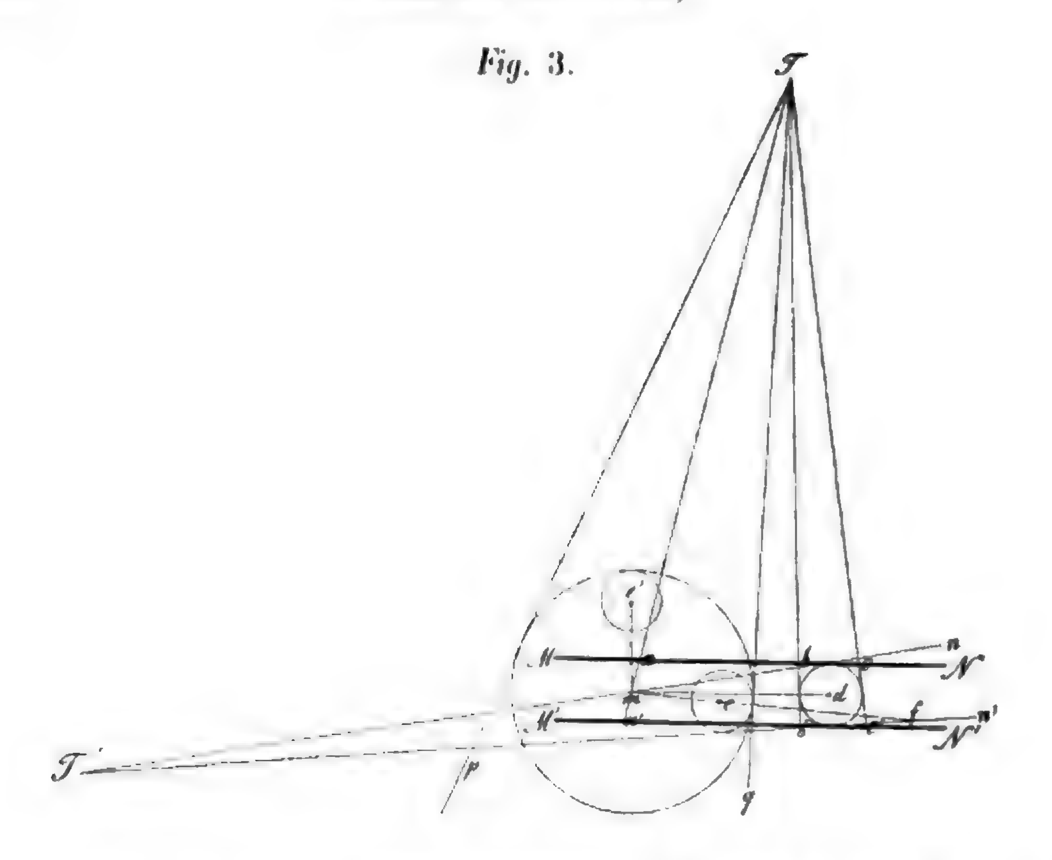
Derjenige Stand, bei welchem die Mittelpunkte der beiden Kugeln mit der Drehaxe der Torsionswage genau einen rechten Winkel bildeten, ist folgendermaassen gefunden.

Nachdem statt der Schellackstange an dem kleinen Cylinder des Torsionsdrahtes ein unten beschwerter feiner Faden befestigt war, dessen Projection Fig. 3 $m$ die Drehaxe vorstellt, wurde ein Theodolith $T$ in der Entfernung von einigen Metern aufgestellt und die Entfernung $Tm$ genau gemessen. Darauf wurde ein in Millimeter getheilter Maassstab von Elfenbein horizontal in die Lagen $MN$ und $M'N'$ gebracht, so dass er jedesmal parallel mit $md$ stand und die Standkugel in der halben Höhe tangirte. Der vertikale Faden im Fernrohr des Theodolithen liess die Längen $ab$, $ac$, $a'b'$ und $a'c'$ bei der starken Vergrösserung auf den zehnten Theil eines Millimeters schätzen. Es ist dann

$$md = \tfrac{1}{4}(ab + ac + a'b' + a'c').$$

*) Will man den Hebel einer nicht geladenen Torsionswage aus einer Lage in eine andere bringen, ohne dass lange andauernde Oscillationen entstehen, so mache man, wenn der Hebel noch ruht, die halbe Correction plötzlich, die andere Hälfte dann eben so plötzlich in dem Augenblicke, wo der Hebel seine grösste Elongation erreicht und umkehren will. Dann wird er desto ruhiger stehen, je weniger der Widerstand der Luft gegen sein Trägheitsmoment in Betracht kommt. Bei der geladenen Torsionswage erreicht man auf diese Weise den Zweck angenähert.

Fig. 3.



Darauf wurde ein zweiter Theodolith in einen solchen Punkt $T'$ gestellt, dass der vertikale Faden seines Fernrohrs die Drehaxe $m$ deckte und die Standkugel tangirte. Nachdem $Tm$ gemessen war, wurde das Fernrohr in die Lage $T'n$ gedreht, so dass der Faden die andere Seite der Standkugel tangirte, und blieb dann unverrückt so stehen.

Jetzt hängte man die Schellackstange mit der beweglichen Kugel wieder an den Torsionsdraht und maass mit dem Theodolithen $T$ den Winkel $pTq$. Die vor Lichtreflexen geschützte bewegliche Kugel zeichnete sich auf weissem Hintergrunde sehr scharf ab und wies dem Theodolithen bei langsamer Drehung die Tangenten des Kreises, innerhalb dessen sie sich bewegte. Der Abstand des Mittelpunktes der beweglichen Kugel von der Drehaxe ist also

$$me = Tm \sin \tfrac{1}{2} pTq - r',$$

wobei $r'$ der vorher gemessene Radius der beweglichen Kugel ist.

Nun wurde die Standkugel herausgenommen, der Kasten der Torsionswage, um Luftströmungen zu vermeiden, ganz geschlossen bis auf zwei kleine Öffnungen in der schon bekannten Richtung $T'n'$, und durch den Torsionsdraht die bewegliche Kugel so gestellt, dass sie von der Richtung $T'n'$ tangirt wurde.

Die bewegliche Kugel musste jetzt um $90^0 + dme$ gedreht werden,

wenn ihr Mittelpunkt in die Lage $e'$ kommen sollte, welche mit $m$ und $d$ einen rechten Winkel beschreibt. Nun ist der Winkel

$$dme = mfT' + mT'f - nmd,$$

während

$$mfT' = \text{arc sin} \frac{T'm \sin mT'n' - r'}{me},$$

$$mT'f = 2 \cdot \text{arc sin} \frac{r}{T'm + md \cos nmd},$$

$$nmd = \text{arc sin} \frac{r}{md} \text{ *)}.$$

Da hier alles gegeben ist, so liess sich $dme$ leicht berechnen, und es wurde nun die Drehung der beweglichen Kugel um $90^0 + dme$ mittelst des Torsionskreises vorgenommen und der Nullpunkt der Beobachtungsskala richtig gestellt.

### II. Beschreibung der Tangentenboussole.

Der zu dem Multiplicator verwendete Kupferdraht war vorzüglich gut mit Seide besponnen und darauf in seiner ganzen Länge von fast ¾ Meilen durch Collodium gezogen.**) Von der grossen Rolle, auf welcher er sich dann befand, wurde er, durch Hülfe eines Flaschenzuges sehr gleichmässig gespannt, auf den kreisförmigen Ring der Tangentenboussole in 5635 Windungen aufgewunden. Dieser Metallring, der eine Rinne von rechteckigem Querschnitt bildete, war überall, wo sich der Draht an ihn anlegte, vorher in der Hitze dick mit Siegellack überzogen. In den Ring wurde nachher ein 20 Pfund schwerer Kupferring als Dämpfer gestellt. Alles Übrige solcher Einrichtungen ist bekannt.

Die Hauptsache war, die Überzeugung zu erlangen, dass wirklich alle Windungen der Tangentenboussole von dem Entladungsstrom durchlaufen wurden und nicht etwa ein Überspringen eines Theiles derselben durch einen in der Tiefe der Windungen vielleicht nicht sichtbaren

---

*) Diese vielen Umstände wurden durch die Undurchsichtigkeit des hängenden Schellackstabes geboten.

**) Versuche, ob dadurch das Isolationsvermögen wirklich wächst, sind nicht angestellt, man sollte es aber annehmen. Jedenfalls erreicht man dadurch, dass die Seide nicht nur auf dem Drahte sehr fest haftet, sondern auch, dass sie an der Oberfläche nicht leicht rauh wird. Das Verfahren ist einfach: Von der Originalrolle leitet man den Draht um eine kleine feste Rolle mit horizontaler Axe und von da in grosser Entfernung zu einer grossen Rolle, auf die er vorläufig aufgewunden wird. Die kleine feste Rolle taucht zur Hälfte in ein Gefäss mit Collodium.

Funken geschah. Nun war ein in Marburg oft gebrauchter kleiner Multiplicator von 1000 Windungen zur Hand, und es liess sich aus den Dimensionen der beiden Instrumente vorhersehn, dass sie gegen die Entladung einer Leidener Flasche ungefähr gleiche Empfindlichkeit haben würden. Beide Multiplicatoren wurden so verbunden, dass dieselbe durch Wassersäulen verzögerte Entladung einer grösseren Leidener Flasche durch die Windungen beider fliessen musste. Wenn nun nicht nur das vorhergesehene Verhältniss der Empfindlichkeit eintrat, sondern bei einer Steigerung der Ladung sowohl die Angaben beider Boussolen unter einander proportional blieben, als auch den Angaben eines Sinuselektrometers entsprachen, welches, mit der Leidener Flasche verbunden, deren einzelne Ladungen vergleichen liess, so konnte man überzeugt sein, dass die grosse Tangentenboussole ihrem Zwecke entsprach. Bei allen Entladungen, welche durch ein besonders construirtes Pendel regulirt wurden, blieb der Knopf der Flasche dieselbe Zeit und zwar nur $\frac{2}{3}$ Secunden lang mit dem Multiplicator in Verbindung, um von dem wieder auftretenden Rückstande nur einen sehr kleinen und zwar proportionalen Theil zur Wirkung kommen zu lassen. Folgendes sind die Resultate:

| Nr. | *a.* Ablenkung $\varphi$ des Sinus-elektromet. | *b.* $\sqrt{\sin\varphi}$. | *c.* Kleiner Multiplicat. Elongation in Skalenth. | *d.* Tangenten-boussole. Elongation in Skalenth. | $\frac{d}{c}$ | $\frac{d}{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 9° 31′ | 0,4078 | 41,75 | 170,40 | 4,1060 | 417,85 |
| 2. | 19° 59′ | 0,5845 | 59,50 | 244,85 | 4,1151 | 418,91 |
| 3. | 34° 57′ | 0,7569 | 76,95 | 316,10 | 4,1078 | 417,62 |
| 4. | 49° 54′ | 0,8746 | 88,97 | 365,45 | 4,1076 | 417,85 |

Jede der Zahlen unter *c* und *d* ist das Mittel aus 2 bis 3 Messungen, die unter einander höchstens um 1 Skalentheil differirten. Die verlangte Proportionalität stellt sich also sehr vollkommen heraus. Nun war der Abstand des Spiegels von der Skala bei dem kleinen Multiplicator 1633, bei dem grossen 6437,6 Skalentheile und ihre Empfindlichkeit verhält sich also, wie oben ungefähr gefordert wurde, nämlich wie 1 : 1,0423.

Diese Messungen, von denen die zweite offenbar bei der Tangentenboussole einen Beobachtungsfehler voraussetzen lässt, zeigen bei allen drei Instrumenten eine ausserordentliche Feinheit in der Vergleichung der disponiblen Ladung einer Leidener Flasche.

# Inhalt.

---

## Berichtigung.

Seite 244 Zeile 14 von unten lies $c^3$ statt $e^3$.

---

## Verbesserung.

In der Abhandlung: »Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondre über Diamagnetismus« in den Abhandlungen der K. Sächs. Ges. der Wissensch. I. Art. 26. S. 572. Zeile 20—22 soll es heissen:

»Durch Ausführung der Integration erhält man für $y$ folgenden Ausdruck:

$$y = \tfrac{2}{3}\, n\mu \frac{X}{D}, \text{ wenn } X < D$$

$$y = n\mu\left(1 - \tfrac{1}{3}\frac{DD}{XX}\right), \text{ wenn } X > D.«$$

## ZEHNTER BAND. (XV. Bd.) Mit 7 Tafeln. hoch 4. 1874. brosch. Preis 21 ℳ.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbes. über das Princip der Erhaltung der Energie. 1871. 1 ℳ 60 ₰.
P. A. HANSEN, Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen. 1871. 3 ℳ 60 ₰.
C. BRUHNS und E. WEISS, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Leipzig und Wien. 1872. 2 ℳ.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Neunte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Schwerspathes. Mit 4 Tafeln. 1872. 2 ℳ.
—— Elektrische Untersuchungen. Zehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Aragonites. Mit 3 Tafeln. 1872. 2 ℳ.
C. NEUMANN, Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. 1873. 3 ℳ 80 ₰.
P. A. HANSEN, Von der Bestimmung der Theilungsfehler eines gradlinigen Maassstabes. 1874. 4 ℳ.
—— Ueber die Darstellung der graden Aufsteigung und Abweichung des Mondes in Funktion der Länge in der Bahn und der Knotenlänge. 1874. 1 ℳ.
—— Dioptrische Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen Kugelgestalt. Zweite Abhandlung. 1874. 2 ℳ.

## ELFTER BAND. (XVIII. Bd. Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1878. brosch. Preis 21 ℳ.

G. T. FECHNER, Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung. 1874. 2 ℳ.
C. NEUMANN, Ueber das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz. 1874. 3 ℳ.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Elfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Kalkspathes, des Berylles, des Idocrases und des Apophyllites. Mit 3 Tafeln. 1875. 2 ℳ.
P. A. HANSEN, Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter. 1875. 6 ℳ.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zwölfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Gypses, des Diopsids, des Orthoklases, des Albits und des Periklins. Mit 4 Tafeln. 1875. 2 ℳ.
W. SCHEIBNER, Dioptrische Untersuchungen, insbesondere über das Hansen'sche Objectiv. 1876. 3 ℳ.
C. NEUMANN, Das Weber'sche Gesetz bei Zugrundelegung der unitarischen Anschauungsweise. 1876. 1 ℳ.
W. WEBER, Elektrodynam. Maassbestimmungen, insbes. über die Energie der Wechselwirkung. Mit 1 Tafel. 1878. 2 ℳ.

## ZWÖLFTER BAND. (XX. Bd.) Mit 13 Tafeln. hoch 4. 1883. brosch. Preis 22 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dreizehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Apatits, Brucits, Coelestins, Prehnits, Natroliths, Skolezits, Datoliths und Axinits. Mit 3 Tafeln. 1878. 2 ℳ.
W. SCHEIBNER, Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1879. 5 ℳ.
—— Supplement zur Abhandlung über die Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1880. 1 ℳ 50 ₰.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierzehnte Abhandlung: Ueber die photo- und thermoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes. Mit 3 Tafeln. 1879. 2 ℳ.
C. BRUHNS, Neue Bestimmung der Längendifferenz zwischen der Sternwarte in Leipzig und der neuen Sternwarte auf der Türkenschanze in Wien. 1880. 2 ℳ 40 ₰.
C. NEUMANN, Ueber die peripolaren Coordinaten. 1880. 1 ℳ 50 ₰.
—— Die Vertheilung der Elektricität auf einer Kugelcalotte. 1880. 2 ℳ 40 ₰.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfzehnte Abhandlung: Ueber die Aktino- und piezoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles und ihre Beziehung zu den thermoelektrischen. Mit 4 Tafeln. 1881. 2 ℳ.
—— Elektrische Untersuchungen. Sechzehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Helvins, Mellits, Pyromorphits, Mimetesits, Phenakits, Pennins, Dioptases, Strontianits, Witherits, Cerussits, Euklases und Titanits. Mit 3 Tafeln. 1882. 2 ℳ.
—— Elektrische Untersuchungen. Siebzehnte Abhandlung: Ueber die bei einigen Gasentwickelungen auftretenden Elektricitäten. 1883. 1 ℳ 80 ₰.

## DREIZEHNTER BAND. (XXII. Bd.) Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1887. brosch. Preis 30 ℳ.

G. T. FECHNER, Ueber die Frage des Weber'schen Gesetzes und Periodicitätsgesetzes im Gebiete des Zeitsinnes. 1884. 2 ℳ 80 ₰.
—— Ueber die Methode der richtigen und falschen Fälle in Anwendung auf die Maassbestimmungen der Feinheit oder extensiven Empfindlichkeit des Raumsinnes. 1884. 7 ℳ.
W. BRAUNE u. O. FISCHER, Die bei der Untersuchung von Gelenkbewegungen anzuwendende Methode, erläutert am Gelenkmechanismus des Vorderarms beim Menschen. Mit 4 Tafeln. 1885. 2 ℳ.
F. KLEIN, Ueber die elliptischen Normalcurven d. $n^{ten}$ Ordnung u. zugehörige Modulfunctionen d. $n^{ten}$ Stufe. 1885. 1 ℳ 80 ₰.
C. NEUMANN, Ueber die Kugelfunctionen $P_n$ und $Q_n$, insbesondere über die Entwicklung der Ausdrücke $P_n(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$ und $Q_n(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$. 1886. 2 ℳ 40 ₰.
W. HIS, Zur Geschichte des menschlichen Rückenmarkes und der Nervenwurzeln. Mit 1 Tafel und 10 Holzschnitten. 1886. 2 ℳ.
H. BRUNS, Über eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung. 1886. 2 ℳ.
R. LEUCKART, Neue Beiträge zur Kenntniss des Baues und der Lebensgeschichte der Nematoden. Mit 3 Taf. 1887. 7 ℳ.
C. NEUMANN, Über die Methode des arithmetischen Mittels, erste Abhandlung. Mit 11 Holzschnitten. 1887. 3 ℳ 20 ₰.

## VIERZEHNTER BAND. (XXIV. Bd.) Mit 54 Tafeln u. 1 geolog. Karte. hoch 4. 1888 brosch. Preis 42 ℳ.

J. WISLICENUS, Über die räumliche Anordnung der Atome in organischen Molekulen und ihre Bestimmung in geometrisch-isomeren ungesättigten Verbindungen. Mit 186 Figuren. 2. Abdruck. 1889. 4 ℳ.
W. BRAUNE und O. FISCHER, Untersuchungen über die Gelenke des menschlichen Armes. 1. Theil: Das Ellenbogengelenk von O. Fischer. 2. Theil: Das Handgelenk von W. Braune und O. Fischer. Mit 12 Holzschnitten und 15 Tafeln. 1887. 5 ℳ.
J. P. MALL, Die Blut- und Lymphwege im Dünndarm des Hundes. Mit 6 Tafeln. 1887. 5 ℳ.
W. BRAUNE und O. FISCHER, Das Gesetz der Bewegungen in den Gelenken an der Basis der mittleren Finger und im Handgelenk des Menschen. Mit 2 Holzschnitten. 1887. 1 ℳ.
O. DRASCH, Untersuchungen über die papillae foliatae et circumvallatae des Kaninchen und Feldhasen. Mit 8 Tafeln. 1887. 4 ℳ.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Achtzehnte Abhandlung: Fortsetzung der Versuche über das elektrische Verhalten der Quarz- und der Boracitkrystalle. Mit 3 Tafeln. 1887. 2 ℳ.
W. HIS, Zur Geschichte des Gehirns sowie der centralen und peripherischen Nervenbahnen. Mit 3 Tafeln und 27 Holzschnitten. 1888. 3 ℳ.
W. BRAUNE und O. FISCHER, Über den Antheil, den die einzelnen Gelenke des Schultergürtels an der Beweglichkeit des menschlichen Humerus haben. Mit 3 Tafeln. 1888. 1 ℳ 60 ₰.
G. HEINRICIUS und H. KRONECKER, Beiträge zur Kenntniss des Einflusses der Respirationsbewegungen auf den Blutlauf im Aortensysteme. Mit 5 Tafeln. 1888. 1 ℳ 80 ₰.
J. WALTHER, Die Korallenriffe der Sinaihalbinsel. Mit 1 geolog. Karte, 7 lithogr. Tafeln, 1 Lichtdrucktafel und 34 Zinkotypen. 1888. 6 ℳ.
W. SPALTEHOLZ, Die Vertheilung der Blutgefässe im Muskel. Mit 3 Tafeln. 1888. 1 ℳ 80 ₰.
S. LIE, Zur Theorie der Berührungstransformationen. 1888. 1 ℳ.
C. NEUMANN, Über die Methode des arithmetischen Mittels, zweite Abhandlung. Mit 19 Holzschnitten. 1888. 6 ℳ.

## FÜNFZEHNTER BAND. (XXVI. Bd.)

B. PETER, Monographie der Sternhaufen G. C. 4460 und G. C. 1440, sowie einer Sterngruppe bei o Piscium. Mit 2 Tafeln und 2 Holzschnitten. 1889. 4 ℳ.
W. OSTWALD, Über die Affinitätsgrössen organischer Säuren und ihre Beziehungen zur Zusammensetzung und Constitution derselben. 1889. 5 ℳ.
W. BRAUNE u. O. FISCHER, Die Rotationsmomente der Beugemuskeln am Ellbogengelenk des Menschen. Mit 5 Tafeln und 6 Holzschnitten. 1889. 3 ℳ.
W. HIS, Die Neuroblasten und deren Entstehung im embryonalen Mark. Mit 4 Tafeln. 1889. 3 ℳ.
W. PFEFFER, Beiträge zur Kenntniss der Oxydationsvorgänge in lebenden Zellen. 1889. 5 ℳ.
A. SCHENK, Ueber Medullosa Cotta und Tubicaulis Cotta. Mit 3 Tafeln. 1889. 2 ℳ.
W. BRAUNE und O. FISCHER, Über den Schwerpunkt des menschlichen Körpers mit Rücksicht auf die Ausrüstung des deutschen Infanteristen. Mit 17 Tafeln und 18 Figuren im Text. 1889. 8 ℳ.

*Leipzig, Oktober 1889.* S. Hirzel.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

H. D'ARREST
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

# RESULTATE AUS BEOBACHTUNGEN

DER

# NEBELFLECKEN UND STERNHAUFEN.

ERSTE REIHE.

Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1856.

# ABHANDLUNGEN

DER

# KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

---

**ERSTER BAND:** Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Erster Band. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. broch. Preis 4 Thlr. 16 Ngr.

Inhalt:

- A. F. MÖBIUS, über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. (Einzeln 24 Ngr.)
- P. A. HANSEN, allgemeine Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1 - 2\alpha H + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von $\alpha$. (Einzeln 12 Ngr.)
- A. SEEBECK, über die Querschwingungen elastischer Stäbe. (Einzeln 10 Ngr.)
- C. F. NAUMANN, über die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. (Einzeln 10 Ngr.)
- W. WEBER, elektrodynam. Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). (Einzeln 1 Thlr.)
- F. REICH, neue Versuche mit der Drehwaage. (Einzeln 20 Ngr.)
- M. W. DROBISCH, Zusätze zum florentiner Problem. (Einzeln 16 Ngr.)
- W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus.) (Einzeln 20 Ngr.)

**ZWEITER BAND:** Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Erster Band. Mit einer Karte. hoch 4. 1850. broch. Preis 6 Thlr.

Inhalt:

- A. WESTERMANN, Untersuchungen über die in die attischen Redner eingelegten Urkunden. 2 Abhandlungen. (Einzeln 1 Thlr.)
- F. A. UKERT, über Dämonen, Heroen und Genien. (Einzeln 24 Ngr.)
- TH. MOMMSEN, über das römische Münzwesen. (Einzeln 1 Thlr. 20 Ngr.)
- E. v. WIETERSHEIM, der Feldzug des Germanicus an der Weser. (Einzeln 1 Thlr.)
- G. HARTENSTEIN, Darstellung der Rechtsphilosophie des Hugo Grotius. (Einzeln 20 Ngr.)
- TH. MOMMSEN, über den Chronographen vom Jahre 354. Mit einem Anhange über die Quellen der Chronik des Hieronymus. (Einzeln 1 Thlr. 10 Ngr.)

**DRITTER BAND:** Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Zweiter Band.

Hiervon ist bis jetzt erschienen:

- W. ROSCHER, zur Geschichte der Englischen Volkswirthschaftslehre im sechzehnten und siebzehnten Jahrhundert. 1851. 1 Thlr.
- ——— Nachträge. 1852. 8 Ngr.
- J. G. DROYSEN, Eberhard Windeck. 1853. 24 Ngr.
- TH. MOMMSEN, Polemii Silvii laterculus. 1853. 16 Ngr.
- ———. Volusii Maeciani distributio partium. 1853. 6 Ngr.
- J. G. DROYSEN, zwei Verzeichnisse, Kaiser Karls V. Lande, seine und seiner Grossen Einkünfte und anderes betreffend. 1854. 20 Ngr.
- TH. MOMMSEN, die Stadtrechte der latinischen Gemeinden Salpensa und Malaca in der Provinz Baetica. 1855. 1 Thlr.
- ——— Nachträge. 1855. 16 Ngr.

# RESULTATE AUS BEOBACHTUNGEN

DER

# NEBELFLECKEN UND STERNHAUFEN

VON

H. D'ARREST.

---

ERSTE REIHE.



Die Reihe mikrometrischer Ortsbestimmungen von Messier'schen und Herschel'schen Nebelflecken, welche ich auf der Leipziger Sternwarte im Mai 1855 begann, und von der im Nachfolgenden die Resultate des ersten Jahrganges mitgetheilt werden, wurde in der Absicht unternommen, durch direkte Verbindung der Nebelflecken mit benachbarten Sternen aus Bessel's und Argelander's Zonen, in einer Anzahl genauer Positionen für die gegenwärtige Zeit, eine Grundlage zu erhalten, auf welche sich späterhin eine Untersuchung über die Bewegung, sei es nun einzelner Nebelflecken selbst, oder vielleicht des Fixsternsystems gegen die Nebelflecken überhaupt, stützen könne. Eine derartige Untersuchung, welche über die Beziehungen, in welchen die so mannigfaltigen und räthselhaften Nebel des Himmels zu unserm Fixsternsysteme stehn, Resultate von grösserer Tragweite und grösserer Sicherheit zu versprechen scheint, als das ausschliessliche Betrachten der Gegenstände, selbst mit den vorzüglichsten Instrumenten und in den bestgeeigneten Klimaten sie gewähren kann, ist gegenwärtig wohl noch gänzlich unausführbar. Von den älteren Arbeiten über die Nebelflecken (denen ich durch diese erste Reihe nur einen verhältnissmässig kleinen Beitrag hinzufüge, nämlich etwa 600 einzelne, neubestimmte Positionen gegenüber den 3300, welche z. B. Sir John Herschel's Verzeichniss der nördlichen Nebelflecken bietet), hatten die ausgedehnteren der beiden Herschel vorzüglich die Auffindung der Objekte, die physische Beschaffenheit, die Auflöslichkeit, die Verdichtungsstufen, endlich die so ungleichförmige Vertheilung an der scheinbaren Himmelskugel zum Zwecke; dagegen besitzen die Positionen, wie der Einblick in die erwähnten Kataloge lehrt, und wie es nach der Natur der grossen, lichtstarken Reflektoren, welche zu jenen Beobachtungen angewandt wurden, un-

vermeidlich war, nicht den Grad von Genauigkeit, welcher sich bei der grössten Mehrzahl der Nebelflecken in diesem Punkte erreichen lässt. Die kleinen Herschel'schen Nebel, meist kreisrund oder elliptisch, sind aber einer genaueren Bestimmung ihres Ortes fähig, als die Mehrzahl der teleskopischen Kometen. Selbst abgesehen von der Möglichkeit, die bei den Nebeln gegeben ist, einen und denselben Ort in verschiedenen Nächten beliebig oft wiederholt zu beobachten, gewährt die bei den Nebelflecken vorherrschende Verdichtung in der Mitte, die bisweilen bis zu einer fixsternartigen Concentration, häufig wenigstens bis zu einem deutlichen und wohl zu fixirenden Kerne fortschreitet, der Beobachtung einen sicheren Anhalt. Diejenigen Nebel dagegen, deren Ort sich aus verschiedenen Gründen niemals wird genau bestimmen lassen, sind, meinen bisherigen Erfahrungen zufolge, die weniger zahlreichen. Die geringere Genauigkeit, mit welcher man sich, im Vergleich zu den Fixsternbeobachtungen, in diesem Theile der Sideralastronomie allerdings stets wird begnügen müssen, kann aber überhaupt keinen hinreichenden Erklärungsgrund geben für die spärliche Beachtung, welche die Ortsbestimmung der Nebelflecke seither gefunden hat; denn die keinenfalls grössere Genauigkeit, welche bei den Kometenbeobachtungen erreicht wird, hat unterdessen bekanntlich zu zahlreichen und wichtigen Ergebnissen geführt. Vielmehr scheint es, als ob über die Sichtbarkeit der Nebelflecken (abgesehn von den hellen und allgemein bekannten, meist von Messier und Méchain entdeckten, Objekten) nicht ganz richtige Ansichten verbreitet sind. Auch mir ist die Erfahrung überraschend gewesen, dass in einem Fernrohre von kaum viereinhalbzölliger Oeffnung, also in einem der kleinsten unter den heutzutage gebräuchlichen, einer ziemlich zuverlässigen Abschätzung zufolge, nahe tausend Nebelflecke wahrnehmbar sind, d. h. etwa der dritte Theil aller derjenigen, welche durch die grössten Spiegelteleskope in unsern Breiten bekannt geworden sind.*) Man wird schon in dieser ersten Reihe der nachfolgenden Beobachtungen einige Gegenstände finden, welche von den beiden Herschel als schwach oder sehr schwach bezeichnet

---

*) So sagt z. B. Mädler in seiner *Astronomie*, 4. Aufl. 1852, S. 473: »Ein Fernrohr von 5 Fuss Brennweite und etwa 5 Zoll Oeffnung zeigt nur etwa 200 Nebel.« Wie mich dagegen ein mit dem Himmel sehr vertrauter Astronom versichert, lässt schon ein Fraunhoferscher Kometensucher mehr als 300 Nebel erkennen.

wurden, obgleich solche lichtschwache Nebel, bei der grossen Fülle der helleren, bisher nur zufällig mitgenommen und fast niemals eigentlich aufgesucht sind.

Der Angabe des mittleren Ortes für den Anfang des Jahres 1850, wie er aus den angestellten Vergleichungen jeder einzelnen Nacht folgte, habe ich eine kurze Bemerkung über Helligkeit, Gestalt und Grösse, in der die Nebel gegenwärtig erscheinen, jedesmal hinzugefügt. Diese nebenher gehenden Notizen, auf welche wegen der geringen Kraft des Instrumentes freilich kein grosses Gewicht zu legen ist, drängen sich dem Beobachter, selbst wenn er die Position als Hauptzweck im Auge hat, unwillkürlich auf, sobald er die Bemerkung macht, dass Nebel der ersten Herschel'schen Klasse, also die hellen Nebel, in nicht ganz seltenen Fällen lichtschwächer sind, als Objekte der zweiten oder gar der dritten Klasse, d. h. derjenigen Abtheilungen, welchen vor 70 Jahren die schwachen oder sehr schwachen Nebelflecken zugetheilt wurden. Ich stelle hier einige Fälle zusammen, in welchen der heutige Anblick der Nebel, zumeist in der Helligkeit, auffällig differirt von den betreffenden Angaben in den Herschel'schen Katalogen. Mit H. bezeichne ich in der üblich gewordenen Weise die Kataloge Sir W. Herschel's, mit h. die beiden Nebelverzeichnisse von Sir J. Herschel. Im Verlaufe dieser Abhandlung werden auch die so häufig zu wiederholenden Namen der beiden gefeierten Astronomen der Kürze wegen meist nur mit diesen Buchstaben bezeichnet werden.

Heller als nach den früheren Angaben zu erwarten, fanden sich folgende Nebelflecken:

H. II. 99 ist erster Klasse.

H. II. 101 sehr hell, bestimmt erster Klasse.

H. III. 44 ist erster Klasse; bei H. und h. übereinstimmend sehr schwach.

H. III. 743 bei H. recht schwach (*considerable f.*), bei h. schwach; ist in starker nächtlicher Dämmerung ziemlich hell und als ein planetarischer Nebel deutlich erkennbar.

H. IV. 69 bei H. und h. schwach, zeigt eine sehr auffallende Nebelatmosphäre.

Schwächer als nach dem Verhältnisse der Fernröhre zu erwarten stand, sind in gegenwärtiger Zeit:

H. I. 1 gehört zur zweiten Klasse; desgl. die Nebel I. 23, I. 104.

H. I. 55 bei H. recht hell, ist kaum zur zweiten Klasse zu rechnen; desgl. der Nebel I. 131.

H. I. 62 bei H. recht hell; nicht wahrnehmbar.

H. I. 102 ist nicht erster Klasse.

H. I. 119. Sehr hell bei H.; hell bei h.; gegenwärtig äusserst lichtschwach, nur mit Anstrengung wahrnehmbar.

H. I. 152 bei H. sehr hell, war zu lichtschwach zur Beobachtung. Andere auffällige Abweichungen in Grösse und Gestalt wird man in den Beobachtungen finden. Werden nun auch Verschiedenheiten, wie die obigen, ihren Grund vermuthlich nicht in wirklich eingetretenen Aenderungen haben, da bekanntlich der Anblick der Nebelflecken ausserordentlich vom jedesmaligen Zustande der Atmosphäre abhängig ist; so werden die im Folgenden gegebenen Beschreibungen, zusammengehalten mit den viel vollkommneren Angaben der älteren Beobachter, doch immerhin Geltung haben für ein sechsfüssiges Fraunhofer'sches Fernrohr von der angegebenen Oeffnung. Durch mehrmalige Wiederholung dieser Notizen in verschiedenen Nächten und unter verschiedenen atmosphärischen Zuständen, habe ich gesucht ihnen grössere Zuverlässigkeit zu geben; auch werden einzelne Irrungen dadurch hoffentlich unschädlich geworden sein.

Bei Gelegenheit der Reduction meiner eigenen Beobachtungen habe ich es nicht unterlassen können, sämmtliche von den einzelnen Nebeln vorhandene ältere Positionen, welche theilweise einer ordentlichen Berechnung mit Zugrundelegung der genauen Sternörter bisher sogar entbehrten, auf die Epoche von 1850 zu reduciren, und mit den jetzigen Resultaten zu vergleichen. Es war ursprünglich im Plane, die, wie ich vermuthen durfte, ziemlich kleine Anzahl der im hiesigen Fernrohre sichtbaren Nebelflecken durch wiederholte Beobachtungen in verschiedenen Nächten, ganz nach Art der Kometenörter zu bestimmen, und daraus einen Katalog der definitiven Positionen abzuleiten, denen sich die Abweichungen von den früheren Beobachtungen hinzufügen liessen. Als sich indessen während der Arbeit die Zahl der wahrnehmbaren Objekte über jede Erwartung vergrösserte, während andrerseits, gerade bei den Nebelbeobachtungen, die eine erhebliche Ausbeute liefernden Nächte in unserm Klima leider so selten sind, verzögerte sich in vielen Fällen die öftere Wiederholung der Bestimmungen. Zum Theil wirkte auch dahin das Interesse, welches der ungewohnte Anblick so mannig-

facher Erscheinungen, wie ihn vorzüglich die planetarischen Nebelflecken bieten, unwillkürlich hervorruft. Die Bildung eines solchen Kataloges muss deshalb auf spätere Zeit verschoben bleiben. Indessen schien es mir doch nicht unwichtig, das für die Ortsbestimmung vorhandene Material für die wiederbeobachteten Nebel schon jetzt übersichtlich zusammenzustellen. Die Oerter aus den Beobachtungen von Lacaille, Messier, Méchain, Oriani, besonders aber aus den Vergleichungen mit Fixsternen beim älteren Herschel, dann die Mittel aus den Ortsbestimmungen von Sir J. Herschel, endlich die Oerter von Laugier, sind deshalb den neuen Positionen in aller Kürze vorangestellt. Bei jedem wiederbeobachteten Nebel lehrt der Anblick, welches Material aus früherer Zeit für den Ort vorhanden ist. Im Allgemeinen ist hiernach jedes Urtheil über die möglicherweise bei den Nebelflecken stattfindenden Bewegungen gegenwärtig noch so gut wie ganz haltlos; einiger Ausnahmefälle erwähne ich weiter unten. Zugleich ergiebt sich auch der Werth, den unter den ausgedehnteren Beobachtungsreihen der erwähnten Astronomen jede einzelne für die Ortsbestimmung hat.

Man wird in der gegenwärtigen Beobachtungsreihe viele Gegenstände finden (etwa 110), von denen keine anderen Beobachtungen bisher vorlagen, als die mit zwanzigfüssigen Spiegelteleskopen bei den beiden Herschel'schen Durchmusterungen erhaltenen; bei Weitem weniger zahlreich sind diejenigen Nebel, welche hier zuerst, seit ihrer Entdeckung in Slough vor mehr als 70 Jahren, verificirt wurden. Von neuen Nebeln endlich kommen nur drei oder vier vor: die Zahl der noch unbekannten, helleren Nebelflecken kann an der nördlichen Halbkugel nur äusserst gering sein. Zwei dieser neuen Nebel (Rectasc. 185° 33' und 185° 40') gehören zu den sehr hellen, und ich muss aus diesem Grunde fast befürchten, dass ältere Beobachtungen derselben, trotz sorgfältigen Nachsuchens, mir entgangen seien.*)

*) Hora XII ist bekanntlich durch ausserordentlichen Nebelreichthum ausgezeichnet, und bei den bisweilen in den älteren Beobachtungen vorkommenden Irrungen lässt sich die Identität der wiederbeobachteten Objekte vielleicht nicht immer genau feststellen. — Ich benutze diese Veranlassung, um einen vor vier Jahren begangenen Irrthum zu verbessern. Der in Nr. 809 der *Astronomischen Nachrichten* von mir als neu angezeigte Nebelfleck war schon im Jahre 1845 von Herrn Hind aufgefunden worden; vergl. Astron. Nachr. Nr. 549, Bd. XXIII. S. 356.

## Genauigkeit der älteren Ortsbestimmungen der Nebelflecken.

Lacaille's Katalog. Von den Positionen, die Lacaille in den Pariser Memoiren für 1755 veröffentlicht hat, habe ich nur fünf wiederbeobachtet, da bei Weitem die meisten Objekte hohen südlichen Declinationen angehören. Die Unterschiede von den Mitteln meiner Oerter, so genommen, wie sie algebraisch an die früheren Beobachtungen angebracht werden müssen, um die jetzigen zu erhalten, sind folgende:

| Rectasc. | Unterschiede in AR. | Unterschiede in Decl. |
|---|---|---|
| 202° 11′ | . . . . . ″ | + 17″ |
| 243 37 | — 95 | — 5 |
| 268 40 | — 1 | + 2 |
| 276 49 | — 72 | + 46 |
| 292 37 | — 146 | — 55 |

Es sind dabei Lacaille's eigene Angaben beibehalten worden, etwas abweichend von der Reduction im Kataloge der *British Association*. Man wird aus diesen wenigen Unterschieden nichts folgern können, als dass die hundertjährige eigene Bewegung jedenfalls sehr gering ist.

Messier's Katalog. Die Verzeichnisse von Messier in den Pariser Memoiren für 1771, und erweitert in den Bänden der *Connaissance des temps* für 1783 und 1784, haben bekanntlich, weil sie die ersten umfänglicheren Nebelkataloge waren, lange Zeit in Ansehn gestanden. Indessen ist die Unzulänglichkeit der Messier'schen Fadenmikrometer aus seinen zahlreichen Kometenbeobachtungen bekannt. Es ist sehr zu beklagen, dass die Nebelpositionen ausserdem durch offenbare Irrthümer von mehreren Minuten häufig entstellt sind, und dass sie aus diesem Grunde bei der, späteren Zeiten vorbehaltenen, Ermittelung der eigenen Bewegungen nicht von Nutzen werden sein können. Eine Ausnahme hiervon werden indessen diejenigen Nebelflecke machen, deren Ort für die damalige Zeit durch die stets sorgfältigen Beobachtungen Méchain's verbürgt und gesichert wird. Mittelwerthe aus den Positionen von Messier und Méchain werden etwa innerhalb der Bogenminute zuverlässig sein. Diese letzteren bestätigen gegenwärtig wenigstens dies allgemeine Ergebniss, dass starke eigene Bewegungen bei den helleren Nebelflecken nicht vorhanden sind.

Sir William Herschel's Kataloge. Ueber die Genauigkeit der

Positionen in den grossen Sammlungen neuentdeckter Nebelflecken (*Philos. Transact.* für die Jahre 1786, 1789 und 1802) besitzen wir von dem Beobachter selbst ausreichende Angaben, welche sich, wie zu erwarten war, bei angestellten Vergleichungen vollkommen bewähren. Bei der bekannten Aufstellungsweise der grossen H.'schen Teleskope bleibt es zwar anerkennenswerth, dass die mit einem so unvollkommenen Apparate, mit Hülfe von Schnuren, Rollen, Zifferblättern und Zeigern bewerkstelligten Vergleichungen mit Flamsteed'schen Sternen, noch den Grad von Genauigkeit erreichten, den sie, mit ganz seltenen Ausnahmen, in der That besitzen; dennoch ist es bedauerlich, dass auch dieser mit beispielloser Ausdauer gesammelte Schatz kaum in einzelnen Fällen einst Schlüsse auf die Bewegungen erlauben wird. Nur wo sehr zahlreiche Vergleichungen mit nahegelegenen Sternen vorkommen, reicht die Genauigkeit der Oerter bis innerhalb der Bogenminute. Herschel selbst giebt über die Erfolge seiner fortgesetzten Bemühung, in den Oertern grössere Genauigkeit zu erlangen, Folgendes an:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Vor December 13 1783 | Unsicherheit | in AR. | 15′ | in Decl. | 8′ | bis | 10′; |
| gegen Ende des J. 1784 | ,, | ,, ,, | 7 | ,, ,, | 4 | ,, | 5; |
| bis September 1785 . . | ,, | ,, ,, | 3 | ,, ,, | 3 | ,, | 4; |
| späterhin . . . . . . | ,, | ,, ,, | 1½ | ,, ,, | 1½ | ,, | 2. |

Diese Beobachtungen umfassen den langen Zeitraum von 1782 bis 1802, doch fällt bei Weitem die grösste Masse in die Jahrgänge 1784 und 1785, welche nur geringere Güte besitzen. Sondert man nun die wirklich vorkommenden Unterschiede nach den Jahren, ohne Rücksicht auf die Klasse, denen die Gegenstände zugehören, so kommen für die gegenwärtig mehrfach wiederbeobachteten Nebel nachstehende Tafeln der Abweichungen:

Aus dem Jahre 1782.

| Nebel. | AR. | Decl. | |
|---|---|---|---|
| IV. 1 | — 19″ | — 16″ | 11 Vergleichungen. |

Aus dem Jahre 1783.

| Nebel. | AR. | Decl. | Nebel. | AR. | Decl. |
|---|---|---|---|---|---|
| I. 1 | + 28″ | — 39″ | I. 13 | — 12″ | — 35″ |
| I. 2 | — 8 | — 49 | II. 4 | — 41 | +155 |
| I. 3 | — 6 | — 3 | IV. 2 | + 65 | — 48 |
| I. 4 | + 11 | — 37 | V. 1 | — 4 | +141 |

## Aus dem Jahre 1784.

| Nebel. | AR. | Decl. | Nebel. | AR. | Decl. |
|---|---|---|---|---|---|
| I. 17 | — 77" | + 48" | II. 99 | +513" | — 50" |
| I. 18 | — 88 | + 26 | II.123 | —822 | —289 |
| I. 21 | —232 | — 5 | II.203 | +159 | — 89 |
| I. 27 | + 22 | + 93 | II.205 | —230 | + 59 |
| I. 28 | — 22 | + 5 | II.207 | —206 | —131 |
| I. 30 | +136 | — 34 | II.233 | — 7 | +186 |
| I. 35 | +227 | +457 | II.247 | +469 | —158 |
| I. 38 | — 17 | +123 | II.249 | — 5 | + 17 |
| I. 47 | + 15 | — 99 | II.251 | — 45 | +187 |
| I. 48 | +111 | — 9 | III. 44 | —215 | +106 |
| I. 51 | —231 | +411 | IV. 10 | —107 | + 59 |
| I. 52 | + 13 | +170 | IV. 16 | — 30 | + 85 |
| I. 53 | + 66 | +550 | IV. 18 | +942 | +112 |
| I. 55 | — 74 | — 4 | IV. 19 | —188 | + 17 |
| I. 56 | —172 | + 54 | IV. 20 | — 89 | — 25 |
| I. 59 | + 49 | +180 | VI. 9 | + 29 | + 54 |
| I. 60 | —643 | — 5 | VI. 12 | —202 | + 87 |
| II. 41 | —105 | — 72 | VIII. 20 | +373 | + 74 |
| II. 44 | +148 | —260 | VIII. 24 | + 12 | —104 |
| II. 55 | +413 | + 73 | VIII. 26 | —653 | —110 |

## Aus dem Jahre 1785.

| Nebel. | AR. | Decl. | Nebel. | AR. | Decl. |
|---|---|---|---|---|---|
| I. 61 | + 6" | + 9" | I.112 | + 54" | — 9" |
| I. 63 | — 92 | + 24 | II.282 | — 45 | — 12 |
| I. 64 | — 38 | — 30 | II.362 | + 80 | — 49 |
| I. 70 | — 65 | + 55 | II.452 | +551 | + 91 |
| I. 75 | —332 | + 45 | II.481 | — 76 | —451 |
| I. 87 | +964 | + 7 | II.500 | + 50 | + 20 |
| I. 88 | — 49 | + 11 | IV. 23 | +113 | —132 |
| I. 89 | — 37 | — 21 | IV. 24 | — 31 | —106 |
| I. 90 | +148 | +241 | IV. 26 | — 36 | + 82 |
| I. 100 | — 63 | + 72 | IV. 27 | + 79 | + 40 |
| I. 103 | +505 | . . .*) | IV. 34 | —399 | + 61 |
| I. 105 | — 81 | — 52 | IV. 35 | + 91 | — 2 |
| I. 106 | + 50 | + 2 | VII. 12 | — 19 | + 65 |
| I. 107 | — 27 | —115 | VIII. 38 | + 33 | — 17 |

*) Decl. etwa 20 Min. zu gross.

Aus dem Jahre 1786.

| Nebel. | AR. | Decl. | Nebel. | AR. | Decl. |
|---|---|---|---|---|---|
| I. 127 | + 26″ | — 9″ | IV. 38 | + 3″ | + 15″ |
| I. 128 | — 46 | + 8 | IV. 39 | — 65 | + 88 |
| I. 151 | + 45 | — 17 | IV. 44 | —551 | +231 |
| I. 156 | — 29 | + 54 | VI. 22 | + 54 | + 55 |

Aus dem Jahre 1787.

| Nebel. | AR. | Decl. | Nebel. | AR. | Decl. |
|---|---|---|---|---|---|
| I. 163 | — 29″ | + 20″ | IV. 50 | +115″ | —129″ |
| IV. 45 | + 76 | — 30 | IV. 51 | + 79 | + 49 |

Aus dem Jahre 1788.

| Nebel. | AR. | Decl. | Nebel. | AR. | Decl. |
|---|---|---|---|---|---|
| I. 217 | +174″ | — 55″ | VIII. 73 | + 59″ | + 89″ |
| VIII. 48 | — 96 | +141 | | | |

Aus dem Jahre 1790.

| Nebel. | AR. | Decl. | Nebel. | AR. | Decl. |
|---|---|---|---|---|---|
| IV. 64 | + 33″ | + 39″ | IV. 69 | — 39″ | +102″ |

Aus dem Jahre 1791.

| Nebel. | AR. | Decl. |
|---|---|---|
| IV. 71 | — 63″ | + 51″ |

Die grösseren Fehler, welche in den Jahren 1784 und 1785 noch vorkommen, fallen späterhin fast gänzlich hinweg, und die Fehlergränze sinkt damit in den späteren Jahren bis zu der oben angegebenen Grösse, und vielleicht noch unter dieselbe hinab.

Sir John Herschel's Kataloge. Wir besitzen bekanntlich in den beiden Nebelverzeichnissen, welche Sir J. Herschel von 1825 bis Mitte 1832 für den nördlichen Himmel, und während der Jahre 1834 bis 1838 für die südliche Hemisphäre in 810 Beobachtungsnächten zu Stande brachte, die vollständigste und vorzüglichste aller Arbeiten über die Nebelflecken. Ausgeführt mit einem zwanzigfüssigen Spiegelteleskope, und alle früheren Bestimmungen an Zahl und Genauigkeit weit hinter sich zurücklassend, werden diese beiden Kataloge bei allen zukünftigen Untersuchungen über die Nebel stets die erste zuverlässige

Grundlage bieten. Was die Genauigkeit der Positionen ins Besondere angeht, so schätzt der Urheber selbst den möglichen Fehler einer einzelnen Rectascension auf anderthalb Zeitsekunden, und auf eine halbe Bogenminute den einer einzelnen Declination. In den Kapbeobachtungen erweitert er diese Gränze auf resp. 30 und 45 Bogensekunden.*) Bei der trefflichen Form, in welcher diese Beobachtungen veröffentlicht worden sind, lässt sich durch Vergleichung der einzelnen Resultate untereinander die Sicherheit der Positionen in der üblichen Weise ermitteln. Eine derartige Vergleichung habe ich zwar nicht über die sämmtlichen wiederholt beobachteten Oerter ausgedehnt, indessen habe ich doch für verschiedene Declinationszonen genug Vergleichungen der Herschel'schen Oerter untereinander angestellt, um für den wahren Fehler derselben ziemlich constante Resultate zu erhalten. Es ergaben sich bei dieser Untersuchung, bei welcher nur als zweifelhaft bezeichnete Beobachtungen und solche von losen und zerstreuten Sternhaufen ausgeschlossen wurden, folgende Grössen für den Nordkatalog:

Rectascensionen.

| Declination. | Beob. | Nebel | $[nn]$ | $\varepsilon . \cos\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| + 30° bis + 25° | 187 | 64 | 358,64 | 1ˢ009 |
| + 25 „ + 15 | 215 | 84 | 341,64 | 1,023 |
| + 5 „ — 5 | 153 | 68 | 183,29 | 0.990 |
| — 15 „ — 25 | 31 | 13 | 54.69 | 1,105 |

Declinationen.

| Declination. | Beob. | Nebel. | $[nn]$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|
| + 30° bis + 25° | 198 | 65 | 94983 | 18″02 |
| + 25 „ + 15 | 246 | 93 | 151037 | 21,33 |
| + 5 „ — 5 | 172 | 74 | 83380 | 19.67 |
| — 15 „ — 25 | 37 | 15 | 15918 | 18,14 |

$\varepsilon$ bedeutet den wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen Position. $[nn]$ die Summe der Quadrate der Abweichungen des Mittels von den einzelnen Positionen. Südlichere Gegenstände kommen im Nordkataloge nicht mehrfach beobachtet vor. Für denselben kann man demzufolge die Gränzen der Unsicherheit annehmen zu

15″ in Rectasc. und 19″5 in Decl.,

*) *Philos. Transact.* 1833 pag. 493 und *Results of astron. Observ. made at the Cape of Good Hope*, London 1847, pag. 6.

beide etwas geringer als die ursprüngliche Schätzung. Diese Gränzen verengen sich, wie es scheint, noch um eine Kleinigkeit für die Kapbeobachtungen, doch habe ich für diese nicht hinreichend viele Vergleichungen angestellt.

Laugier's Katalog. Im Jahre 1853 hat Hr. Laugier in den *Comptes Rendus* der Pariser Akademie *) die Positionen von 53 meist helleren Nebelflecken veröffentlicht, welche er in den Jahren 1848 und 1849, wie ich glaube, mit dem Gambey'schen Aequatoreal der Pariser Sternwarte bestimmt hat. Dies sind ohne Zweifel zum grössten Theil die genauesten der gegenwärtig bekannten Oerter; sie wurden namentlich in der besondern Absicht beobachtet, als Grundlagen zu späterer Untersuchung etwaiger Eigenbewegungen dienen zu können. Von diesen habe ich bisher 31 wiederbeobachtet, nämlich mit einer Ausnahme alle diejenigen, welche nicht in grosser Nähe beim Zenith oder nördlich von demselben culminiren. Bei der kurzen Zwischenzeit, welche zwischen Laugier's und meinen Beobachtungen liegt, kann die nachstehende Vergleichung unserer Resultate für die Epoche 1850 natürlich keinen andern Zweck haben, als die Sicherheit kennen zu lernen, welche beiderseits in den Positionen erreicht worden ist. Hier, wie oben bereits geschehn, sind die Differenzen so angesetzt, wie sie an Laugier angebracht, die Mittel aus meinen Beobachtungen wiedergeben.

| Nr. bei Laugier. | AR. | Decl. | Nr. bei Laugier. | AR. | Decl. |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | — 4" | — 1" | 31 | — 2" | —11" |
| 6 | —26 | 0 | 32 | + 9 | — 3 |
| 7 | +12 | +30 | 38 | . . . | +16 |
| 9 | — 6 | — 1 | 39 | — 2 | +11 |
| 10 | +11 | —15 | 40 | —25 | — 9 |
| 12 | +10 | +21 | 42 | — 2 | + 6 |
| 17 | + 2 | + 3 | 43 | — 6 | + 2 |
| 20 | . . . | . . . | 45 | 0 | +51 |
| 22 | +19 | — 6 | 46 | +23 | — 9 |
| 23 | — 3 | +13 | 47 | — 6 | —45 |
| 24 | + 3 | 0 | 49 | +27 | +75 |
| 25 | —13 | — 6 | 50 | — 4 | + 4 |
| 26 | —11 | + 4 | 51 | — 3 | + 6 |
| 27 | . . . | . . . | 52 | — 8 | —26 |
| 28 | — 7 | — 3 | 53 | + 4 | + 2 |
| 29 | — 8 | 0 | | | |

*) *Comptes Rendus* Déc. 1835 T. XXXVII.

Bemerkungen. Nr. 10. Verglichen mit dem Mittel meiner Oerter der beiden im Nebel befindlichen Sterne.

- 38. Laugier's Rectascension ist etwa 43ˢ irrig, womit auch die grosse Abweichung von h. wegfällt, welche a. a. O. aufgeführt wird.
- 40. Die in den *Compt. rend.* angesetzte grosse Differenz gegen h. beruht auf einer fehlerhaften Vergleichung.
- 42. Laugier's Rectascension vorher verbessert; sie scheint mit falscher Praecession von 1847 reducirt. Es erledigt sich damit die grosse, in den *Compt. rend.* aufgeführte Abweichung von h.'s Orte.
- 45. Laugier's Declination zu südlich, wie auch eine Position im Kapkataloge bezeugt.
- 47. Ein ziemlich zerstreuter Sternhauf; ich habe einen nördlich belegenen Stern, L. hat wohl die Mitte beobachtet.
- 49. Laugier's Ort kann ich nach wiederholten Beobachtungen nicht für genau halten; vielleicht ist die Decl. eine Minute verschrieben.

Im Allgemeinen ist diese Uebereinstimmung wohl befriedigend zu nennen, wenn man die bisweilen ungünstigen Umstände bei Beobachtungen der Nebelflecken bedenkt, umsomehr als ein Theil der Abweichungen, wenn auch der kleinere, doch den Vergleichungssternen zur Last fallen wird. Ist es gestattet, die Güte der beiderseitigen Beobachtungen einstweilen gleich zu setzen, so findet sich, wenn ich nur die Decl. 45, 47, 49 dabei aufschliesse,

der wahrscheinliche Fehler eines Laugier'schen Ortes und ebenso des Mittels aus durchschnittlich drei meiner einzelnen Positionen

in Rectasc. 5″83, in Decl. 5″70

also nahezu dieselbe Genauigkeit, mit welcher man sich heutzutage bei den Kometenbeobachtungen in den meisten Fällen begnügen muss. Es kann nicht befremden, dass ich aus Vergleichungen meiner Beobachtungen untereinander deren wahrscheinlichen Fehler etwas geringer gefunden habe.

**Das Instrument und die Anordnung bei den Leipziger Beobachtungen.**

Das Fernrohr, das bei den nachstehenden Beobachtungen angewandt wurde, ist das hiesige Fraunhofer'sche von 6 Fuss Brennweite und 52 Linien Oeffnung. Ich fand es in der Regel am Vortheilhaftesten, mich der schwächsten, 42maligen Vergrösserung zu bedienen, denn die

schwachen Nebel verschwinden meist spurlos bei Anwendung stärkerer Okulare; nur zum Erkennen sehr feiner Fixsterne, etwa der nächststehenden Begleiter bei den planetarischen Nebelflecken, lassen sich mit Vortheil die stärksten Vergrösserungen gebrauchen. Letztere gehen in einem vortrefflichen Satze von Okularen, welche die Herren Pistor und Martins einem für den Refraktor construirten Fadenmikrometer beigegeben haben, etwa bis zum 350fachen.

Die Beobachtungen geschahen, ganz nach Art der Beobachtungen der Kometen, mit einem Fraunhofer'schen Doppelring-Mikrometer. Es wurden in einer Nacht meist je drei, bisweilen vier Durchgänge eines Nebels und seines Vergleichsternes, mit nördlichen und südlichen Durchgängen abwechselnd, beobachtet. Wegen der Unsicherheit, die in den Oertern der verglichenen Sterne noch zurückbleibt, habe ich häufig in der Beschreibung auch die beobachteten Rectascensions- und Declinations-Differenzen angesetzt, und — was für das Erkennen von Eigenbewegungen sich hoffentlich einst erspriesslich erweisen wird — die Lage der Nebel gegen die allernächsten Sterne, oft nur der 10, 11... Gr., häufig bestimmt. In diesem letzteren Punkte bin ich nur dem Beispiele Sir J. Herschel's gefolgt; indessen konnte ich diese Differenzen häufiger messen, weil die eigentliche Beschreibung der Gegenstände, bei einem Instrumente von verhältnissmässig so geringer Kraft, ohnehin nur Nebensache sein konnte. Alle diese Messungen wurden ohne Ausnahme mit den Ringen gemacht; wo nur Schätzungen vorkommen, ist dies jedesmal besonders bemerkt.

Von der Sicherheit, welche hier in den Positionen erlangt wurde, hat oben die Vergleichung mit dem Laugier'schen Nebelverzeichniss schon eine Vorstellung gegeben. Die Ermittelung genauer Werthe der wahrscheinlichen Beobachtungsfehler, aus der Vergleichung der einzelnen Oerter mit ihren Mitteln, verspare ich zwar bis nach Vollendung der zweiten Reihe dieser ohne Unterbrechung fortgeführten Nebelbeobachtungen; indessen kann ich hier, nach einer vorläufigen Berechnung anführen, dass der wahrscheinliche Fehler einer definitiven Position, d. h. des Mittels aus den Beobachtungen von drei Nächten, meist auf neun Durchgängen beruhend, in beiden Coordinaten 4 bis 5 Bogensekunden nicht übersteigen wird.

Bei der fast vollständigen Unkenntniss, in der wir uns rücksichtlich der Nebelflecken befinden, sobald es sich um Anderes, als ihre physische Beschreibung handelt, mag es zum Schlusse dieser Erörterungen gestattet sein, die an sich wenig erheblichen, meist negativen Resultate zusammenzustellen, welche die begonnene Wiederbeobachtung in Verbindung mit der Berechnung des älteren Materials bisher ergab.

Von Eigenbewegungen bei den Nebelflecken können wir gegenwärtig keinen einzigen zuverlässigen Fall nennen. Zwei oder drei Mal differiren die Abstände von sehr nahen Sternen allerdings erheblich von den Beobachtungen bei h., indessen bleibt es dabei vorläufig noch ungewiss, ob nicht Irrungen bei den früheren Vergleichungen vorfielen. Von etwa drittehalb Hundert Nebeln lässt es sich im Gegentheile sehr wahrscheinlich machen, dass eigene jährliche Bewegungen im Betrage von mehr als einer Bogensekunde nicht vorhanden sind. Streng beweisen endlich lässt sich vollständige Unmerklichkeit der Eigenbewegung während der letzten 60 Jahre bei einigen unter den planetarischen Nebelflecken.*) Vergl. die Bemerkung am Schlusse der Beobachtungen.

Dass dem entsprechend auch die jährliche Parallaxe nur einen äusserst kleinen Werth haben kann, zeigt direkt eine später zu veröffentlichende Reihe mikrometrischer Vergleichungen des planetarischen Nebels H. IV. 64 mit einem 3 Bogenminuten auf dem Parallel entfernt stehenden Fixsterne neunter Grösse.

Bei den bisher neubestimmten Doppelnebeln lässt sich keine relative Ortsveränderung, weder im Positionswinkel, noch in der Distanz erweisen, obschon die Vergleichungen 25, bisweilen 70 Jahre zurückliegen.

Von den »Satelliten« der planetarischen Nebelflecke, jenen meist äusserst feinen Sternchen fast unmittelbar am Rande der hellen Scheiben, habe ich, wie leicht erklärlich, nur die wenigsten wahrgenommen. Die wiedergesehenen aber standen noch unverrückt in den von Sir J. Herschel so sorgfältig bestimmten Stellungen, oder können sich im Laufe des letzten Vierteljahrhunderts nur um sehr kleine Grössen daraus entfernt haben.

---

*) Ich weiss nicht, ob der Umstand schon bemerkt worden ist, dass einige der eigentlichen planetarischen Nebel, in Meridianinstrumenten von gewöhnlichen Fixsternen nicht unterschieden, schon in den Beobachtungen der *Histoire Céleste* und bei Bessel vorkommen. Was in neueren Lehrbüchern der Astronomie von den planetarischen Nebelflecken bisweilen gesagt wird, sollte das Gegentheil vermuthen lassen.

## Beobachtungen der Nebelflecken.

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ' " | ° ' " | | |
| 44 | 8 4 54 | +40 52 47 | H. V. 18. — 1784 4 Beob. | |
| | 3 10 | 51 52 | h. — 1828 1 Beob. | |
| | 2 54 | 51 25: | Sehr hell; über 2' gr., erster Klasse. In der Mitte merklich heller, scheint länglich, doch sehe ich vermuthlich nur den Kern. Diam. in AR. 10ˢ5. | 57 |
| 46 | 8 6 1 | −14 40 18 | H. II. 452. — 1785 (1). Die eingeklammerte Ziffer bedeutet die Anzahl der Beobachtungen. | |
| | 15 33 | 41 38 | h. — 1830, 1831 (3). | |
| | 15 13 | 41 51 | Aeusserst schwach und nicht gross; kleine ** in der Nähe; Decl. etwas unsicher. * 9 Gr. praec. 27ˢ und steht 1' südlich. . . . . . . . | 31 |
| | 15 10 | 41 47 | Klein, sehr schwach; * 8.9 Gr. praec. 27ˢ, 50" südlich. * 11.12 Gr. praec. 10ˢ. Ort unsicher; kleine ** in der Nähe. Beob. durch Wolken unterbrochen. . . . . . . . . . . . | 59 |
| 51 | 8 36 20 | +40 3 48 | Messier 32, beob. 1764 Aug. 3. Decl. für diesen und den nächstfolgenden Nebel 50' vergrössert. — Der Begleiter des grossen Andromedanebels, entdeckt von Legentil 1749. | |
| | 38 8 | 2 30 | h. — 1828 (2). | |
| | 38 16 | 2 40 | Bessel's Ort in Zone 440, 1828 Oct. 24. Lalande hat den Nebel nicht beobachtet. Der Unterschied von einem vorangehenden * 7.8 Gr. betrug<br>1828,8 . . . 40ˢ21 in AR. 10' 37" in Decl.<br>1855,7 . . . 39,83 » » 10 19 » » | |
| | 37 59 | 3 ... | Zeitsekunde? Hell = * 9 Gr. 30" im Durchm. * 12 Gr. folgt 10ˢ2. . . . . . . . . | 31 |
| | 38 11 | 2 19 | Sehr hell, 40" gr. In der Mitte = * 8 Gr.; * 10.11 Gr. folgt 11ˢ etwas nördlich. . . . . . . | 32 |
| | 38 8 | 2 24 | Sehr hell, Durchm. = 30"; in der Mitte heller = * 8.9 Gr. . . . . . . . . . . . | 35 |
| 50 | 8 35 23 | +40 27 46 | Messier 31, beob. 1764 Aug. 3; siehe die Beob. des vorigen Nebels. | |
| | 38 12 | 27 13 | Ort von d'Agelet im Jahre 1783 Sept. 15. Hergeleitet aus Vergleichung mit $\alpha$, $\vartheta$, $\varrho$ Andromedae, $\gamma$ Pegasi und * 6 Gr. Lalande 1213; *Hist. Cél.* p. 554. | |
| | 38 23 | 26 51 | *Hist. Cél.* Nr. 1145 vom J. 1799 Sept. 4. p. 477. | |
| | 38 25 | 26 55 | Der grosse Andromedanebel; keine Beschreibung, der Kern lässt sich recht sicher beobachten. | 57 |
| | 38 24 | 26 42 | (ditto) | 60 |
| | 38 22 | 26 ... | (ditto) | 61 |

| h. | Rectascension 1850. ° ' " | Declination 1850. ° ' " | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| 61 | 10 3 7 | —26 9 3 | H. V. 1. — 1783 (6) entdeckt von Carol. Herschel. | |
| = | 2 13 | 6 20 | h. im Nordkataloge aus 1 Beob. 1830. | |
| 2345 | 1 13 | 7 16 | h. im Südkataloge aus 2 Beob. 1835 – 36. | |
| | 2 18 | 8 0 | Bei etwas dunstigem Himmel zwischen Wolkenstreifen recht hell und ausserordentlich gross, 3′ breit, 15′ lang. Der Ort lässt sich nicht genau bestimmen, da der mittlere und hellste Theil mehrere Minuten umfasst; geschätzt nach einer Zeichnung zwischen Argelander'schen **. | 32 |
| | 3 33 | 6 13 | Sehr hell, sehr gross, im Sucher (35 Millim. Oeffnung) deutlich sichtbar, 2½ br., 12 bis 15′ lg. Der linsenförmige Nebel ist in der Mitte beträchtlich heller; Positionswinkel 42° geschätzt. | 33 |
| | 2 49 | 5 54 | Gesehn wie sonst; Positionsw. 46° geschätzt. . | 58 |
| 117 | 19 12 56 | + 8 45 18 | H. I. 151. — 1786 (1). | |
| | 13 49 | 45 2 | h. aus 1 Beob. 1828. | |
| | 13 46 | 45 3 | * 10 Gr. steht 2′ südlich. Nur ziemlich hell, 40″ im Diam. . . . . . . . . . . . . . | 29 |
| | 13 33 | 45 4 | 1′ gross, ziemlich hell; * 10.11 Gr. steht 2′ südl.; andere kleine ** nahe bei dem Nebel. In der Nähe ist H. III. 556 = h. 119 bestimmt nicht sichtbar. . . . . . . . . . . . . | 30 |
| | 13 18: | 44 59 | Gut sichtbar; in der Mitte heller, 50″ Durchm.; steht mitten zwischen 2 **; * 10 Gr. 2′ südl., * 12.13 Gr. 2′ nördl. . . . . . . . . . | 31 |
| | 13 45 | 45 ... | Durchm. = 35″. Nur AR. beobachtet wegen des Mangels an Uebereinstimmung in den frühern; diesmal sehr genau aus 2 ** bestimmt. . . | 34 |
| 128 | 20 58 12 | — 7 39 35 | H. I. 100. — 1785 (1). | |
| | 57 9 | 38 31 | h. — 1826 bis 1831 3 Beob. | |
| | 57 3 | 38 9 | Ziemlich hell, 40″ gr., rund. * 7.8 Gr. praec. 133ˢ85 etwas nördlich. . . . . . . . . | 24 |
| | 57 14 | 38 29 | Gesehn wie Nacht 24: Durchm. 30″. . . . . . | 25 |
| | 57 11 | 38 32 | Ziemlich hell, 45″ gross; i. d. Mitte beträchtlich heller. * 7.8 Gr. praec. 134ˢ38. H. III. 431 in der Nähe ist bestimmt nicht wahrnehmbar. . | 29 |
| 132 | 21 20 39 | — 7 50 40 | H. II. 4. — 1783 (6). | |
| | 21 0 | 47 18 | h. — 1827 (1). | |
| | 20 ... | 48 ... | Gesehn, nicht beobachtet. Heller als der benachbarte Nebel H. II. 282, schwächer als I. 100. | 31 |
| | 19 55 | 48 9 | Ein kleiner runder Nebel, Durchm. 25″; äusserst schwach, merklich schwächer als der benachbarte H. I. 100. * 6 Gr. folgt 49ˢ9 und steht 36″ nördlich. . . . . . . . . . . . | 24 |
| | 20 0 | 48 5 | Klein und ziemlich schwach. * 6 Gr. folgt etwas nördl. 49ˢ25. Etwas unsichere Beobachtung. | 25 |
| | 19 59 | 48 0 | Gesehn wie früher. * 6 Gr. folgt 50ˢ1, während Sir John Herschel sagt 47ˢ5; der * kommt vor bei Lalande u. Bessel, und hat keine merkliche eigene Bewegung; ob der Nebel dergleichen besitzt, wird andrerseits durch H.'s 6 Beob. zweifelhaft. . . . . . . . . | 29 |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | h m s | ° ′ ″ | | |
| Nova ! | 21 40 20 | — 8 10 12 | * 11 Gr. scheint neblig und wurde irrthümlich statt h. 137 beobachtet. * 8.9 Gr. folgt 33ˢ u. steht 1½′ nördlich. . . . . . . . . . | 25 |
| | 40 ± | 10 ± | Ort nur geschätzt; bei sehr klarer Luft etwas unsicher, ob der schwache * wirklich neblig ist. | 31 |
| | 40 18 | 10 4 | Gesehn; Ort gut. . . . . . . . . . . . | 34 |
| 137 | 21 54 20 | — 8 6 12 | H. II. 282. — 1785 (2). | |
| | 56 57 | 5 48 | h. — 1828 eine zweifelhafte Beobachtung. | |
| | 53 32 | 6 54 | Aeusserst schwach, kaum = h. 132, klein. * 8.9 Gr. praec. 19ˢ, etwas südlich. . . . . . | 29 |
| | 53 37 | 6 49 | Statt h.'s Angabe — Nebel folgt * 8 Gr. südl., Distanz 10′ — heisst es gegenwärtig: Nebel folgt * 8.9 Gr. nördl., Distanz 5′. Indessen stimmen doch H.'s 2 Beob. gut mit der gegenwärtigen Position. . . . . . . . . . | 30 |
| | 53 36 | 6 58 | Wie in den früheren Nächten, kaum zu erkennen. * 9 Gr. praec. südlich in 5′ Entfernung; Δ AR. = 19ˢ08 Δ Decl. = 1′ 46″. . . . | 31 |
| 2436 | 25 27 30 | —11 2 42 | H. II. 481. — 1785 (1); die Identität nicht zweifelhaft. | |
| | 26 50 | 10 1 | h. im Südkataloge. 1835 (1) »schwach«. | |
| | 26 22 | 9 55 | Ziemlich deutlich trotz heller ** im Felde, klein. * 8 Gr. folgt fast 3′ nördl. in 9′ Entfernung; darauf kommt ζ Ceti. . . . . . . . . | 61 |
| | 26 13 | 10 ... | 30″ gross; * 8.9 Gr. folgt 35ˢ1; Declinat. nicht beobachtet, weil der Nebel im Dunste kaum wahrnehmbar. . . . . . . . . . . | 63 |
| | 26 8 | 10 31 | Sehr schwach und klein, kaum zu erkennen; * 8.9 Gr. folgt 35ˢ7. . . . . . . . . . | 69 |
| 160 | 25 55 ... | —10 27 ... | = H. I. 62. Keinen Nebel erster Klasse gesehn. | 61 |
| | . . . . . . | . . . . . . | Nicht mit Sicherheit wahrgenommen; ist jedenfalls schwächer als der vorhergehende Nebel H. 481. . . . . . . . . . . . . | 69 |
| 162 | 26 4 38 | +39 59 9 | Piazzi'scher *, Ort des *Br. Ass. Cat.* Ich erkenne keine Spur von Nebel um diesen *. . . . | 60 |
| 165 | 26 27 7 | —14 28 14 | H. I. 105. — 1785 (1). | |
| = | 25 46 | 28 27 | h. im Nordkataloge nach 1 Beob. vom J. 1830. | |
| 2443 | 25 53 | 28 46 | h. im Südkataloge gleichfalls nur 1 Beob. von 1835. | |
| | 25 41 | 28 30: | Nicht sehr hell; Durchm. 25...30″. Decl. geschätzt, AR. gut. * 9 Gr. folgt 139ˢ85 und steht 3′ 55″ nördlich. . . . . . . . . | 25 |
| | 25 47 | 29 5 | Etwa 1′ gross, in der Mitte merklich heller. Bei sehr schönem Himmel keineswegs sehr hell. Position sicher durch verschiedene Vergleichsterne. . . . . . . . . . . . . | 29 |
| | 25 50 | 29 8 | Mattes Licht, rund, 50″ im Durchmesser. . . | 34 |
| 181 | 27 15 35 | +18 16 38 | H. I. 112. — 1785 (1). | |
| | 16 31 | 16 52 | h. — 1830, 1831 (2). | |
| | 16 23 | 16 21 | 1½′ gross, rund, ziemlich schwach. Kern = * 11 Gr. * 8.9 Gr. praec. etwas südlich. . . | 69 |
| | s. flg. S. | | | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | 27 46 35 | +18 16 39 | 95″ gross, rund, mattes, verwaschenes Licht, doch I. Klasse. . . . . . . . . . . | 70 |
| 193 | 30 5 46 | +10 16 32 | H. I. 152. — 1785 (2). | |
| | 29 49 16 | 16 21 | h. nach 1 Beob. 1828. | |
| | . . . . . . | . . . . . . . | Gesehn, doch zu schwach zur Beobachtung. * 10 Gr. praec. südlich in 80″ Entfern. Bei H. sehr hell, gegenwärtig ganz schwach. . . | 61 |
| 223 | 34 57 52 | − 1 47 42 | H. IV. 23. — 1785 (1). | |
| | 59 38 | 49 0 | h. — 1827 (1). | |
| | 59 49 | 49 49 | Hell und gross; 1½′ Durchm. bei Mondschein. h. 224 ist nicht sichtbar. . . . . . . . . | 64 |
| | 59 41 | 50 0 | Kreisrund, ziemlich hell, 80″ Diam. Die in der Mitte beträchtlich hellere Scheibe = * 11 Gr. | 69 |
| | 59 45 | 49 54 | Rund, hell; eine kleine Nebelscheibe, umgeben von einer schwächeren Atmosphäre, die wohl 2′ im Durchm. haben mag. III. 261 bestimmt nicht sichtbar. . . . . . . . . . . . | 70 |
| 229 | 35 43 22 | − 1 46 52 | H. II. 278. — 1785 (1). | |
| | 43 30 | 45 50 | h. — 1827 (1). | |
| | 43 54 | 46 16 | Nicht klein, doch sehr schwach. * 12 Gr. folgt 3′ südlich; * 5.6 Gr. 75 Ceti folgt $1^m 6^s21$, 258″ nördlich. . . . . . . . . . . . | 60 |
| 242 | 37 46 9 | +38 23 39 | H. I. 156. — 1786 (2). | |
| | 45 11 | 24 39 | h. — 1828 (1). | |
| | 45 49 | 24 46 | Hell, ansehnlich gross und länglich (2′ lg.). * 9 Gr. folgt $33^s7$ etwas nördl., 2 andere ** praecediren. Der Nebel verschwindet vor Schluss der Beobachtungen; Ort deshalb wohl nicht genau. . . . . . . . . . . . . . . | 35 |
| | 45 41 | 24 23 | Hell, mittelmässig gross, lang und schmal. * 10 Gr. praec. $2^s4$, 2′ südl. * 9.10 Gr. folgt $33^s5$ nahe im Parallel. . . . . . . . . . . | 44 |
| | 45 29 | 24 27 | Recht hell, länglich. 2 ** 10.11 Gr. praecediren südlich. Es folgen auf den Nebel: * 11.12 Gr. $23^s5$, * 11.12 Gr. $31^s0$, * 10 Gr. $34^s5$. . . | 58 |
| 244 | 37 46 26 | − 7 20 59 | H. I. 102. — 1785 (2). | |
| | 46 34 | 19 54 | h. — 1826 (3). | |
| | 46 ... | 19 ... | Nicht gefunden, Auge ermüdet; gewiss nicht I. Klasse. . . . . . . . . . . . . . | 58 |
| | . . . . . . | . . . . . . . | Kein Nebel erster Klasse am Orte. . . . . | 60 |
| 254 | 38 27 8 | − 8 54 26 | H. I. 63. — 1785 (1). | |
| = | 25 29 | 53 52 | h. im Nordkatalog 1830 und 1831 2 Beob. | |
| 2193 | 26 1 | 53 54 | h. im Südkatalog 1835 (1). | |
| = | 26 2 | 54 2 | Laugier's Ort 1848—1849. | |
| Lg. 6 | 25 45 | 54 1 | Sehr hell, 40″ gross; in der Mitte verdichtet zu * 10 Gr.; * 8 Gr. praec. $105^s35$ nahe auf dem Parallel. Ein sehr guter Ort. . . . . . | 58 |
| | 25 18 | 53 59 | 45″ gross. Ziemlich hell, im Δ mit 2 ** 10 Gr., denen der Nebel an Helligkeit gleich. * 9 Gr. praec. $103^s44$. Die Verschiedenheit in AR. unerklärlich, 3 gute Vergleichungen. . . . . | 61 |
| | s. flg. S. | | | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | 38 25 44 | — 8 54 3 | Klein, rund, leidlich hell = * 10.11 Gr. 35″ Diameter; * 8 Gr. folgt südlich. . . . . . | 60 |
| 258 | 38 31 10 | — 0 11 24 | H. I. 1. — 1783 (7). | |
| | 31 5 | 11 48 | h. — 1827 (2). | |
| | 31 38 | 12 24 | Zur Beobachtung zu schwach; kaum II. Klasse zu nennen; der Ort nahe richtig durch Zeichnung mittelst zweier hellen Bessel'schen **; * 10 Gr. geht ganz nahe nördlich voran. . . . | 29 |
| | 32 5 | 11 56 | Ort wiederum nur geschätzt; ausserordentlich schwach; nicht klein, aber bestimmt nicht erster Klasse. . . . . . . . . . . | 31 |
| | 31 20 | 11 48 | Recht schwach; * 10 Gr. praec. 3ˢ und steht 50′ nördlicher. H. fand den Nebel 1783 ansehnlich hell, h. im J. 1827 dagegen schwach. . | 35 |
| 262 | 38 45 32 | — 0 39 37 | Messier 77, beobachtet 1780; Mittel aus Messier und Méchain. | |
| | 44 51 | 38 30 | h. — 1827 (1). | |
| | 45 10 | 39 22 | Laugier's Ort, Nr. 4. | |
| | 45 ... | 39 ... | Hell, in der Mitte beträchtlich heller, rund; Ort nicht beobachtet. * 9.10 Gr. folgt 5ˢ, Distanz kleiner als 2′, Positionswinkel 125° geschätzt. | 29 |
| | 45 4 | 39 17 | Sehr hell, Durchm. 30″. * 10 Gr. folgt 5ˢ, Entfernung 105″, Positionswinkel 131° geschätzt. * 9 Gr. folgt 2ᵐ 15ˢ9 und 44″ nördlich. . . | 31 |
| | 45 7 | 39 25 | Heller Nebel. * 9.10 Gr. folgt 5ˢ9 etwas südlich. | 35 |
| | 45 8 | 39 28 | Ziemlich hell, sehr condensirt in der Mitte. Beobachtet von dem hier anwesenden Dr. Gould 1855 Novbr. 8. . . . . . . . . . | 45 |
| 264 | 39 39 42 | — 8 12 23 | H. I. 64. — 1785 (2). | |
| | 39 20 | 12 24 | h. — 1831 (1). | |
| | 39 10 | 12 49 | Ziemlich matter, 1½′ grosser Nebel; nicht »sehr hell«. Scheint länglich. . . . . . . . | 29 |
| | ...... | 12 46 | Gesehn bei dunstigem Himmel, schwach, 90″ gr. | 35 |
| | 39 2 | 13 3 | 80″ gr., vermuthlich länglich. * 6 Gr. praec. südl. | 58 |
| | 38 59 | 12 54 | Recht deutlich, 75″ gr., rund. * 13 Gr. praec. auf dem Parallel 22ˢ7. Am Nordrande des Nebels scheint ein feiner * zu haften. . . . | 61 |
| ... | 40 54 46 | +36 53 16 | Nebelstern? Bessel's Ort aus Zone 527. Kein Nebel wahrnehmbar; ist möglicherweise ein Komet gewesen. * 9 Gr. praec. 24ˢ. . . . | 62 |
| | 54 38 | 53 19 | * 9.10 Gr. ohne Spur von Nebulosität oder Durchmesser. * 9 Gr. praec. 24ˢ22 und steht 76″ nördlich. . . . . . . . . . . . | 63 |
| 2523 | 48 46 10 | —15 56 17 | H. I. 106. — 1785 (2). Ansehnlich hell. | |
| | 47 4 | 56 1 | h. im Südkataloge 1835 (1). Ziemlich schwach. | |
| | 47 4 | 56 7 | Ziemlich deutlich, 80″ gr. * 7 Gr. Lalande 6251 (Argel. Zone 341) praec. 8ˢ1 und steht 234″ südlich; Positionsw. geschätzt 33°. Positionsw. bei h. 31°, Δ AR. = 7ˢ5. . . . . . . | 69 |
| | 46 57 | 56 16 | Leidlich hell, rund. * 7.8 Gr. praec. 7ˢ62, 4′ südl. Diam. 40″. Positionsw. des *'s 208°. | 70 |
| | s. flg. S. | | | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | 18 46 59 | —15 56 21 | Klein und schwach. * 7 Gr. südlich vorangehend in Positionsw. 209°. . . . . . . . . . | 71 |
| ... | 50 1 59 | —21 51 39 | H. I. 60. — 1784 (1). | |
| | 49 54 9 | 51 43 | Nicht sehr heller, doch ziemlich grosser und kenntlicher Nebel. * 8 Gr. praec. nördl. $64^s5$. | 31 |
| | 54 17 | 51 49 | 60″ gr., schwach, doch I. Klasse. * 8 Gr. praec. $65^s26$. Der *ort (Argelander Z. 346 Nr. 26) durch weitere Vergleichungen gesichert. . . | 60 |
| | 54 21 | 51 39 | Trotz tiefen Standes recht deutlich; * 9 Gr. folgt $93^s$, u. steht $3\frac{1}{4}$′ sdl. H. hat in AR. über 10′ mehr. | 70 |
| 2566 | 53 4 4 | —23 30 21 | H. I. 58. — 1784 (2). | |
| | 52 59 30 | 30 52 | h. im Südkataloge 1835 (2). | |
| | 59 15 | 31 ... | Sehr tief, kaum etwas schwächer als der vorhergehende I. 60. Sehr deutlich zwischen 1 ** 9 und 10 Gr. . . . . . . . . . . . | 70 |
| | 59 12 | 31 ... | Tief stehend, sehr schwach; keine Decl. beob. | 71 |
| 2570 | 53 22 7 | —19 2 13 | H. I. 107. — 1783 (2). | |
| | 22 4 | 4 17 | h. im Südkataloge 1 Beob. vom J. 1835. | |
| | 21 44 | 4 ... | Ein grosser, heller Nebel. * 7.8 Gr. Lalande 6904 folgt $2^m$ $33^s$. Beobachtung durch Wolken unterbrochen. . . . . . . . . . . | 64 |
| | 21 50 | 4 8 | Gross, hell, scheint auflöslich. 80″ im Diam. * 7 Gr. folgt 7′ südl. . . . . . . . . . . | 68 |
| | 21 28 | 4 9 | Ziemlich matt, aber sehr ausgedehnt; Diam. in AR. $5^s5$; * 7.8 Gr. folgt $2^m$ $34^s$. . . . . | 69 |
| 311 | 59 58 46 | +30 20 11 | H. IV. 69. — 1790 (1). | |
| | 57 43 | 22 54 | h. — 1827 (2). | |
| | 58 9 | 22 ... | Nebelstern 9 Gr. mit einer starken, sogleich auffälligen Atmosphäre (H. »schwach«), zwischen 2 ** 8 Gr. Lalande 7656 folgt $1^s22$ in 8′ Entf. | 63 |
| | 58 5 | 22 22 | Selbst bei ☾schein ist die Atmosphäre erkennbar; * 9 Gr. Ein anderer * 9 Gr. praec. $1^m$ $30^s3$ und steht 80″ nördl. * 8 Gr. Bessel Z. 398 folgt $1^s27$. . . . . . . . . . . . | 64 |
| | 58 8 | 22 23 | Heller ☾schein; Ort gut. * 8 Gr. folgt südl. $1^s36$. | 67 |
| 2618 | 61 49 27 | —13 8 32 | H. IV. 26. — 1785 (2). | |
| | 18 44 | 7 0 | h. — 1836 (1). AR. $90^s$ vergr. S. Astr. Nachr. XLI, p. 173. | |
| | 18 51 | 7 13 | Sehr heller, planetarischer Nebelfleck, schon bei schwacher Vergrösserung auffallend; bläuliches, fixsternartiges Licht; 22″ Diam. = * 9 Gr. (nicht 11 Gr. Lassell). . . . . . . | 57 |
| | 18 48 | 7 11 | Planetarischer Nebel, 20 bis 30″ gross = * 9 Gr. 2 ** 11 Gr. folgen. * 9 Gr. praec. $119^s2$. . | 60 |
| | 18 53 | 7 7 | Planetarischer Nebel = * 8.9 Gr., beträchtliche Scheibe. * 12 Gr. praec. $49^s$. Trotz seiner Helligkeit kommt der Nebelstern weder in der *Hist. Cél.* noch in Bessel's Zonen vor. * 9 Gr. praec. $118^s5$. Eine Abbildung dieses Nebels hat Lassell auf Malta gemacht; *Mem. R. Astr. Soc.* Vol. XXIII, p. 60; Taf. II. Fig. 4. . . . | 61 |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ' " | ° ' " | | |
| ... | 63 18 6 | +19 9 55 | Entdeckt von Hind, Astr. Nachr. Nr. 839. Ein recht heller Nebel, 1' im Durchm.; am Nordostrande desselben * 10 Gr., der auf den Mittelpunkt des Nebels $2^s20$ folgt und etwa 35" davon nördlich steht. . . . . . . . . . | 44 |
| | 18 20 | 9 46 | Ziemlich hell, * 10 Gr. folgt nördlich in unmittelbarer Nähe, $\Delta$ AR. = $1^s84$, $\Delta$ Decl. = 47". | 57 |
| | 18 12 | 9 43 | Klein, schwach; dunstige Luft. * 11 Gr. folgt 2 oder $3^s$. . . . . . . . . . . . | 63 |
| | 18 8 | 9 52 | Nicht klein, etwa 50"; im ☾schein (5 Tage alt) gut sichtbar. * 10 Gr. folgt $2^s7$, 32" nördl. | 64 |
| 315 | 65 2 2 | +34 57 10 | H. I. 217. — 1788 (2). | |
| | 5 50 | 56 16 | h. — 1826, 1827 3 Beob. | |
| | 6 23: | 56 15 | AR. auszuschliessen, eine unsichere Beob. Nebel gross und leidlich hell bei dunstigem Himmel. * 9.10 Gr. geht in 2' Entfernung $6^s5$ (?) nördl. voran; * 7.8 Gr. praec. $1^m$ $4^s$ fast auf dem Parallel. *) . . . . . . . . . . . . | 63 |
| | 4 54 | 56 6 | Ueber 1½' gross, doch recht matt (schöne Luft). * 10 Gr. steht 140" nördlich. . . . . . | 68 |
| | 4 58 | 56 23 | Schwach, 1½' Diam., rund, verwaschen an den Rändern. Im $\Delta$ mit 2 ** 9.10 und 11 Gr. * 7.8 Gr. praec. $57^s6$ etwas südlich; * 9.10 folgt $1^s07$, 2' nördlich. . . . . . . | 70 |
| 318 | 65 45 7 | + 0 32 49 | H. II. 7. — 1783 3 Beob. | |
| | 45 38 | 31 32 | h. — 1827 1 Beob. | |
| | 45 27 | 32 6 | Schwach, klein, 18". * 12 Gr. folgt $5^s$, etwas nördlich. Positionsw. 53°. . . . . . . | 68 |
| 319 | 66 3 46 | — 5 25 24 | H. I. 158. — 1786 2 Beob. | |
| | 3 52 | 24 20 | h. — 1826 und 1830 4 Beob. | |
| | 3 43 | 24 56 | Klein, rund, schwach, 20" im Durchm. Verschiedene ** 10 Gr. praecediren. * 12 Gr. 2' südl. Der Nebel ist nur unter sehr günstigen Umständen erkennbar, II. Klasse. . . . . . | 68 |
| 348 | 75 30 43 | +16 19 37 | h. — 1832 1 Beob. | |
| | 30 ... | 19 ... | Hauf von 13 ** 9.10, 10 Gr. und vielen kleinen, paarweis in auffälliger Anordnung. Der Zusammenhang mit dem nachfolgenden, reicheren Cumulus ist wohl unverkennbar. . . . | 68 |
| 349 | 75 63 41 | +16 33 47 | H. VII. 4. — 1784 (2). | |
| | 50 11 | 33 34 | h. — 1832 2 Beob. | |
| | 50 ... | 33 ... | Ein sehr grosser, ausserordentlich reicher Hauf kleiner **; im vorangehenden Theile 3 ** 10 Gr. die hellsten. Die compacteste Stelle folgt auf * 9.10 Gr. $43^s$ und steht 2¼' südl. . . | 68 |

*) Zu h. 315. Der verglichene * Lalande 8336 hat vielleicht eine kleine, eigene Bewegung; *Hist. Cél.* und Bessel (Zone 402 und 308) geben für 1855 Jan. 0 aus je zwei Beobachtungen:

AR. 64° 55' 23"0 Decl. + 34° 56' 27"9 Lalande 1794.
55 28,7 56 21,2 Bessel 1828 und 1832.

Für den Ort des Nebels habe ich mich ausschliesslich an Bessel's Position gehalten.

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ' " | ° ' " | | |
| ... | 79 30 37 | −24 39 31 | Messier 79. — 1780 im Mittel aus den Beob. von Messier und Méchain. | |
| | 30 1 | 40 35 | Laugier's Ort Nr. 7. | |
| | 30 16 | 40 3 | Ausgezeichnet heller Nebel, 55" gr.; in der Mitte beträchtlich heller = * 9.10 Gr. * 9 Gr. Nr. 28 Argelander Z. 274 folgt 5$^s$91 und steht 9' 46" südlich. . . . . . . . . . . . . . . | 58 |
| | 30 6 | 40 2 | Sehr hell, 70" gross, rund. * 9 Gr. folgt 6$^s$71 etwa 10' südlich entfernt . . . . . . . | 60 |
| | 30 15 | 40 11 | Rund. vorzüglich hell; über 1' gross. * 8.9 Gr. Argelander folgt 6$^s$07. . . . . . . . | 61 |
| 357 | 81 22 41 | +21 50 23 | Messier 1. — 1758 Sept. 12. | |
| | 21 56 | 54 25 | h. — 1827 1 Beob. | |
| | 22 42 | 54 32 | Laugier Nr. 9. | |
| | 22 27 | 54 30 | Schöner elliptischer Nebel, hell; Durchm. in AR. 14$^s$5. Verhältniss der Axen geschätzt 5 : 3. Beob. von Dr. Gould 1855 Novbr. 8. . . . | 45 |
| | 22 39 | 54 25 | Sehr hell, elliptisch, 3' im Durchm. * Rümker 1484 folgt 1$^m$ 55$^s$ nahe im Parallel. . . . | 50 |
| | 22 41 | 54 31 | Grosse Axe, 3½' lang, zeigt etwas nördlich von einem 23$^s$3 nachfolgenden * 10 Gr. Der Nebel scheint auflöslich. . . . . . . . . . | 52 |
| | 22 35 | 54 36 | Ebenso gesehn; nicht ganz regelmässig elliptisch; ausserordentlich hell. Diam. in AR. 16$^s$. * 10 Gr. folgt 24$^s$2. Abbildungen bei Sir J. Herschel und Lassell, letzterer in *Mem. R. Astr. Soc.* XXIII, Taf. II. Fig. 1. . . . . . . . | 58 |
| 362 | 82 1 41 | − 4 27 14 | h. — 1827 1 Beob. | |
| a | 81 59 13 | 35 49 | Seltsam gezeichnete Gruppe von 15 bis 20 ** 7...10 Gr., füllt den innern Ring (19'). Ort dreier ** 7.8 Gr. aus Bessel's Z. . . . . . | 50 |
| b | 81 59 14 | 31 38 | | |
| c | 82 1 31 | 28 1 | | |
| | ...... | ...... | Die ** kommen in der *Hist. Cél.* nicht vor. Ich finde aus Meridiandurchgängen für 1850 81° 59' 14", 81° 59' 13", 82° 1' 22". . . . . | 65 |
| 364 | 82 1 29 | − 6 0 45 | H. V. 31. — ι Orionis *Br. Ass. Cat.* Der den * umgebende Nebel, wie ich vermuthe, sichtbar im Fraunhofer in den Nächten 50, 51 und sonst öfter. | |
| 363 | 82 9 3 | − 1 18 6 | H. V. 34. — ε Orionis *Br. Ass. Cat.* Von dem grossen Nebel, der diesen hellen * umgiebt, ist im Fraunhofer keine Spur zu erkennen; der Himmelsgrund ist, wenn der * hinter den Ringen steht, in der Nähe ebenso dunkel, als sonst in dieser Region. . . . . . . . | 25 |
| | ...... | ...... | Ebenso gesehn in den besten Winternächten, 50, 51, 52 und sonst vielfach. | |
| 365 | 83 35 2 | + 8 59 54 | H. IV. 34. — 1785 2 Beob. | |
| | 28 23 | 9 0 39 | h. — 1828 2 gut stimmende Beob. | |
| | 28 21 | 0 57 | Kleiner, deutlich planetarischer Nebel (Diam. 15" geschätzt); bläuliches Licht = * 10.11 Gr. | 50 |
| | s. flg. S. | | | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | 83 28 22 | + 9 0 57 | Planetarisch, klein, schwach = * 11 Gr. ☾ anwesend; Durchm. 15 bis 20″ . . . . | 57 |
| | 28 26 | 0 50 | Sehr matt, Wolken, ☾. Nur AR. beob., Decl. geschätzt. . . . . . . . . . . . . . . | 58 |
| | 28 24 | 0 55 | Kleiner, planetar. Nebelfleck, 15″ im Durchm. * 10.11 Gr. folgt 25ˢ6 auf dem Parallel. Lassell hat ihn abgebildet. . . . . . . . | 60 |
| ... | 83 31 55 | — 2 18 40 | H. IV. 24. — 1785 1 Beob. Kommt nicht vor bei h. | |
| | 31 20 | 20 21 | * 8 Gr. nach Lalande und Bessel, sehr gut stimmend. Neblig gesehn, südlich folgend auf ζ Orionis. Ein vorangehender * 8 Gr. zeigt sich nicht neblig. . . . . . . . . . . . | 52 |
| | 31 29 | 20 28 | Der nicht kleine Nebel um * 8 Gr. recht deutlich erkennbar, wenn der * hinter dem Ringe und ζ Orion. aus dem Felde. . . . . . . . | 53 |
| | 31 24 | 20 35: | Den Nebel kaum erkannt. * 8.9 Gr. verglichen mit ζ Orion. AR. sehr genau; * 8 Gr. praec. | 54 |
| 367 | 84 8 37 | +12 49 2 | h. — 1832 1 Beob. | |
| | 8 46 | 49 11 | Ort nach den sehr gut übereinstimmenden Positionen von Lalande u. Bessel. * 6.7 Gr. um den ich bei aufgehendem ☾ keinen Nebel erkenne. | 57 |
| | 8 48 | 49 ... | Meridianbeobachtung. . . . . . . . . | 65 |
| | 8 43 | 49 2 | * 7 Gr. ist 10842, 43 Lalande. * 8 Gr. folgt 21ˢ2. Um den * kein Nebel erkennbar bei schönem Himmel. * 10.11 Gr. praec. 6ˢ. . . . . | 74 |
| 368 | 84 46 20 | + 0 1 20 | Messier 78. — 1780. Ort im Mittel aus Messier und Méchain. | |
| | 45 30 | — 0 0 26 | h. — 1827 2 Beob. | |
| | 45 35 | + 0 1 36 | Laugier Nr. 10. | |
| a | 45 31 | 0 55 | Der erste von 3 ** 9.10 und 10 Gr. mit etwas Nebel, 90″ gross. In heller Morgendämmerung. Der zweite, gleichfalls 9.10 Gr. folgt 1ˢ und steht 50″ nördlich. In den *Harvard Observations* Vol. I, part 2, p. 158 werden diese beiden ** 11 Gr. gesetzt. . . . . . . . | 25 |
| | 45 32 | 0 58 | Praecedens von 2 ** 10 Gr. mit hellem, meist nachfolgendem Nebel; der andere * folgt 1ˢ6 und steht 50″ nördl. . . . . . . . . . | 49 |
| | 45 34 | 0 48 | * 10 Gr. Der Nebel beim ☾schein (10 Tage alt) kaum zu erkennen. * 9.10 Gr. praec. 37ˢ8 und steht 2′ südlich. . . . . . . . . . | 54 |
| b | 84 45 58 | + 0 1 48 | Der zweite der vorigen Nebelsterne. . . . . | 49 |
| | 45 61 | 1 42 | * 10 Gr., schwächer als der vorige. . . . . | 54 |
| | 45 63 | 1 51 | Derselbe; der Nebel trotz hellen ☾scheins noch wahrnehmbar. 100″ gross. . . . . . . | 56 |
| 372 | 88 11 1 | +23 19 22 | H. VIII. 26. — 1784 (1). AR. irrig. | |
| | 87 59 32 | 17 35 | h. — 1827 (1). | |
| | 88 0 8 | 17 34 | Haufen von etwa 25 bis 30 **; Durchm. 6′. Beobachtet den hellsten 9 Gr. * 9.10 Gr. in 2½′ Distanz Δ AR. = + 2ˢ2, 122″ nördlich, die übrigen merklich schwächer. . . . . . | 72 |
| | s. flg. S. | | | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | 88 0 7 | +23 17 30 | Dieselbe Beschreibung; Ort * 9 Gr. — 1 H. Geminorum folgt $2^m$ 59ˢ8; Decl. geschätzt. . . | 73 |
| 373 | 88 41 46 | −10 36 16 | 3 Monocerotis, Ort nach *Br. Ass. Cat.* und Lord Wrottesley. Die Atmosphäre des *'s ist im Fraunhofer unter den günstigsten Umständen nicht zu erkennen; Nacht 69 und sonst öfter. | 69 |
| 375 | 89 35 47 | +24 1 37 | H. VI. 17. — 1784 (2). | |
| | 33 9 | 6 18 | h. — 1827 (1). | |
| | 33 20 | 5 53 | Heller, grosser Nebel, im Ringmikrometer wie ein Comet, doch von unregelmässiger Gestalt, fast 3′ im Diam. Mit stärkerer Vergrösserung ein Hauf feiner **; * 10 Gr. folgt südlich in 1′ Entfernung. . . . . . . . . . . | 72 |
| | 33 24 | 5 34 | Ein recht feiner *hauf, anscheinend mit Nebel, 4′ gr., etwas irregulär gestaltet. * 10 Gr. folgt am südl. Rande, viele kleine ** rund herum. | 74 |
| 378 | 89 64 2 | − 6 15 12 | H. IV. 44. — 1786 (1), offenbar irrig in AR. | |
| | 54 51 | 11 42 | h. — 1831 1 Beob. | |
| | 54 54 | 11 22 | * 7 Gr. Ort nach Bessel's Zonen (Lalande hat in AR. — 14″, in Decl. — 4″). Der Nebel um den * nicht erkennbar. . . . . . . . . . | 60 |
| | 54 53 | 11 ... | Beobachtung am Passageinstrumente. . . . | 65 |
| | 54 47 | 11 25 | * 7 Gr. verglichen mit 1994 *Br. Ass. Cat.*, des letzteren Ort nach Bessel und Lord Wrottesley genommen (*A Cat. of* 1009 *Stars*). . . . . | 68 |
| | 54 48 | 11 17 | Nebel um den * 7.8 Gr. bei sehr schönem, dunkelm Himmel bestimmt nicht erkannt. . . | 69 |
| 377 | 89 58 30 | +24 33 51 | Messier 35. 1764 Declin.? | |
| | 53 56 | 20 49 | h. — Eine Beob. 1827. | |
| | 55 ... | 20 ... | Ausserordentlich grosser, reicher, glänzender Hauf unregelmässig zerstreuter **; der bedeutendste Theil etwa 20′ im Diameter. Ungefähre Position der Mitte. . . . . . . . | 72 |
| | 54 ... | 21 ... | Mitte; kein besonders ausgezeichneter * zur Ortsbestimmung. Eine eigentliche Verdichtung zur Mitte hin ist nicht vorhanden. Dieser Sternhauf zeigt sich noch gegenwärtig genau so, wie ihn Sir W. Herschel beschreibt in seiner letzten Abhandlung über die Sternhaufen; *Phil. Trans.* 1818, Vol. 108. Auch Lassell hat ihn neuerdings beschrieben. . . . . . . . | 73 |
| 379 | 89 59 42 | +14 0 57 | H. VIII. 24. — 1784 (1). | |
| | 59 49 | 13 58 27 | h. — 1832 (1). | |
| | 59 58 | 13 59 11 | Bessel's Ort, * 8.9 Gr. in einem sehr schönen, geordneten, aber armen Haufen von ** 10, 11...12 Gr., der hellste an der nordwestlichen Ecke. . . . . . . . . . . . . | 57 |
| | 59 55 | 59 15 | = Lalande 11638. * 9 Gr. praec. 13ˢ12 und steht 41″ nördlich. . . . . . . . . . | 58 |
| | 59 54 | 59 10 | Duplex 8.9 Gr. 5 hellere ** und einige 20 11 Gr. * 9 Gr. praec. 12ˢ32 auf dem Parallel. . . | 60 |

| h. | Rectascension 1850 | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| ... | 90 6 29 | — 6 23 11 | H. IV. 19. — 1784 (1). | |
| | 3 18 | 23 ... | * 10 Gr. mit deutlichem Nebel umgeben; ein anderer * 10 Gr. steht 1½′ südlich davon. . | 60 |
| | 3 22 | 22 50 | * 10 Gr. mit heller, sehr deutlicher Nebelatmosphäre. 90″ südlicher ein gleich heller * ohne Nebel. . . . . . . . . . . . . . . | 69 |
| | 3 23 | 22 59 | * 10 Gr. im Nebel, 1′ Durchm. Ein anderer * = Gr. 87″ südlich. . . . . . . . . | 70 |
| 381 | 90 33 3 | — 6 18 25 | H. IV. 38. — 1786 (2). | |
| | 33 5 | 18 51 | h. — 1831 (1). | |
| | 33 1 | 18 ... | * 9 Gr. mit kleinem, schwachem, nachfolgendem Nebel. . . . . . . . . . . . . . | 60 |
| | 33 7 | 18 9 | Doppelstern 9 Gr. mit etwas Nebel. * 10 Gr. folgt 14ˢ0 etwas nördl. Weder Lalande noch Bessel hat den * beobachtet. Eine auffallende Menge Nebel IV. Kl. in dieser Gegend des Himmels. | 69 |
| | 33 6 | 18 11 | Duplex 8.9 Gr. neblig; * 10 Gr. folgt 13ˢ. . . | 70 |
| 383 | 90 58 3 | — 6 10 31 | H. IV. 20. — 1784 (1). | |
| | 57 7 | 11 55 | h. — 1830, 1831 (2). | |
| | 56 38 | 11 ... | * 12 Gr. (nicht 10.11 Gr.), fast zu schwach zur Beobachtung. . . . . . . . . . . | 60 |
| | 56 37 | 10 53 | * 11 Gr. mit kleiner aber unverkennbarer Nebelscheibe; deutlich unterschieden von 2 unmittelbar vorhergehenden ** derselben Grösse. | 69 |
| | 56 28 | 10 59 | * 11.12 Gr. in schwacher, 20″ grosser Nebelscheibe. 2 ** derselben Gr. praec.; heute erscheinen auch diese wie mit schwachem Nebel. | 70 |
| 387 | 93 59 49 | — 4 37 1 | h. — Eine Beob. vom Jahre 1830. | |
| | 59 33 | 36 58 | * 7 Gr. nach Bessel (kommt bei Lalande nicht vor). Ein unbedeutender Hauf sehr feiner ** folgt. | 58 |
| | 59 26 | 37 ... | Im Meridian beob. * 7.8 Gr. folgt 31ˢ4 etwas südlich. . . . . . . . . . . . . . | 64 |
| | 59 34 | 36 53 | * 7.8 Gr., ein etwas schwächerer * folgt 31ˢ1; unbedeutendes Objekt. . . . . . . . | 69 |
| 398 | 97 39 4 | — 1 21 29 | H. VIII. 48. — 1786 (1). | |
| | 37 58 | 20 11 | h. — 1827 (1). | |
| | 37 28 | 19 8 | * 8 Gr. = Weisse VI. 931. Hauf zerstreuter ** 9, 10, 11... Gr. . . . . . . . . . | 69 |
| | 37 ... | 19 ... | Ist Lalande 12736 = * 8 Gr., aber die *Hist. Cél.* giebt 2ˢ weniger. Steht in einem unbedeutenden Hauf, wie sich viele in dieser Gegend befinden. Ort nicht beobachtet. . . . . . | 74 |
| 399 | 97 43 37 | + 8 52 45 | H. IV. 2 — 1783 (4). | |
| | 44 40 | 52 12 | h. — 1828 (3). | |
| | 44 32 | 52 18 | Laugier Nr. 12. 1848—49. Siehe die Bemerk. zu Nacht 77. | |
| | 44 44 | 51 55 | * 10 Gr. mit recht hellem, fächerartigem Nebelansatz, der nördlich vorangeht, 50″ gr. Positionsw. der Axe 337°. Doppelstern 8 Gr. folgt 1ᵐ 58ˢ39; * 9.10 Gr. folgt nördlich 6ˢ01, Distanz 130″ (mehr als 2′). . . . . . . | 68 |

s. flg. S.

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | 97 44 37 | + 8 52 3 | * 10 Gr. mit hellem Nebel nach Nord. Nördlich davon folgt ein = heller * 6ˢ4. . . . . . . | 72 |
| | 44 46 | 51 54 | * 10.11 Gr. mit sehr auffälligem Nebel, der schon vor Eintritt voller Dunkelheit erkennbar. * 10 (nicht 9) Gr. folgt nördlich 5ˢ8. Doppelstern seq. folgt 1ᵐ 58ˢ35. — Abbildungen bei h., Lassell und Lord Rosse (letzterer in den *Phil. Trans.* 1850, Taf. 37, Fig. 10. — Der grosse Declinationsunterschied mit Laugier wird davon herrühren, dass L. den Ort des nördl. belegenen Nebels bestimmte, ich dagegen den * am Südende des Nebels. Vom nachfolgenden Doppelstern ist der südl. folgende der hellere; Bessel setzte, trotz des beträchtlichen Unterschieds, beide ** 8 Gr. (Σ 953 *Catal. Dorpat.*) | 77 |
| 401 | 98 10 46 | +10 1 11 | H. V. 27. = VIII. 5. — 15 Monocerotis, Ort nach *Br. Ass. Cat.* Der Nebel um diesen * nicht erkennbar im Fraunhofer; 10 kleine ** dicht dabei; Doppelstern folgt 12ˢ etwas südl. . . | 50 |
| | . . . . . . | . . . . . . | Dieselbe Beschreibung; Doppelstern 10 Gr. in 11ˢ5 Entf. folgt fast im Parallel. . . . . | 60 |
| | . . . . . . | . . . . . . | Nebel nicht wahrnehmbar. . . . . . . . . | 69 |
| 440 | 107 43 59 | −15 23 1 | H. VII. 12. — 1785 (1) Caroline Herschel. | |
| | 44 9 | 22 16 | h. — 1827 (1). | |
| | 43 42 | 22 1 | Ein 7′ grosser Hauf zahlreicher, sehr zerstreuter ** 11.12 Gr. Hellster 10 Gr. in der Mitte beobachtet. * 8.9 Gr. Argelander Z. 342 folgt 26ˢ5 aus dem Parallel. . . . . . . . . | 53 |
| | 43 38 | 21 52 | 10′ grosser, sehr reicher Hauf von ** 10...12 Gr. Ort des hellsten im nördlich vorangehenden Theile. * 9 Gr. folgt 26ˢ72 auf dem Parallel. Der Hauf von unregelmässiger Gestalt, die ** darin ziemlich gleichförmig verstreut. . . . | 77 |
| 441 | 108 7 21 | −24 41 4 | H. VII. 17. — * 6 Gr. 30 Canis maj. *Br. Ass. Cat.* in einem reichen, grossen Hauf von ** 11.12... Gr. * 9 Gr. folgt 6ˢ4 etwas nördl.; * 7.8 Gr. folgt auf dem Parallel 30ˢ4. . . . . . . . | 52 |
| | 7 18 | 41 2 | Nach Argelander Z. 280. * 6.7 Gr. in einem reichen Haufen unregelmässig über 8′ zerstreuter ** 10.11... Gr. * 10 Gr. folgt 6ˢ0, * 7.8 Gr. folgt 30ˢ6. . . . . . . . . . . . . | 58 |
| | 7 16 | 41 3 | Verglichen mit einem nachfolgenden * 7.8 Gr. Lacaille 2726. . . . . . . . . . . . | 53 |
| | 7 19 | 41 ... | Am Passageinstrumente. . . . . . . . . | 73 |
| 450 | 110 3 17 | +21 13 26 | H. IV. 45. — 1787 (2). | |
| | 4 43 | 12 11 | h. — 1827 1 Beob. Dieser helle planetar. Nebel nirgend anderswo beobachtet. | |
| | 4 31 | 12 57 | * 8.9 Gr. schon bei schwacher Vergrösserung von seltsamem Ansehn, einem planetarischen Nebel ähnlich: * mit sehr starkem Nebel 20″ Diam. 97″ nördl. davon steht * 8 Gr. Lalande | |
| | s. flg. S. | | | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | | | 14512. Der Nebelstern blau, die blassröthliche Farbe des Begleiters ist unzweifelhaft. * 8 Gr. folgt 0ˢ42, während er nach Sir John Herschel vorhergehn soll in Posit. 355°. . . | 64 |
| | 110 4 32 | +21 12 55 | Die Zusammenstellung des blauen Nebelsternes und des nördlich folgenden rothen *'s ist ganz wie bei IV. 64 = h. 3095. . . . . . . | 71 |
| | 4 34 | 12 56 | Planetarischer Nebel 9 Gr. * 8 Gr. folgt 0ˢ22, 99″ nördl. Bessel hat keinen von beiden. Der Nebelstern selbst durch dichten Dunst deutlich von andern ** unterschieden. — H. in der Abhandl. von 1791 nennt den nördlichen * (8 Gr.) 10.11 Gr. — Abgebildet Fig. 15 bei Lord Rosse. . . . . . . . . | 72 |
| 459 | 112 24 59 | —14 9 1 | H. VIII. 38. — 1785 (2). | |
| | 25 23 | 9 0 | h. — 1827 (1). | |
| | 25 33 | 9 21 | Ziemlich grosse, glänzende Gruppe, nicht reich, ** 9.10.11 Gr. der hellste duplex 7.8 Gr. * 8 Gr. folgt 5ˢ, 2½′ nördl. Lalande's Ort. . . . | 73 |
| | 25 34 | 9 15 | Struve Posit. med. 899. Ort des seq. Die innere Gruppe des Haufs 6′ gross. . . . . . . | 72 |
| | 25 29 | 9 20 | Sternhauf, lose, zerstreute ** 8.9... Gr. * 7 Gr. Lalande 14868 praec. 31ˢ5. Ort des duplex, Mitte beobachtet. . . . . . . . . . | 74 |
| | 25 31 | 9 19 | Sehr grosse, reiche Gruppe von ** 7.8.9... Gr. Ort des sequens eines schönen Doppelsterns. Lalande 14888 folgt etwa 5ˢ; * 6 Gr. praec. 32ˢ15 etwas südlich. . . . . . . . . | 77 |
| 463 | 113 44 59 | —14 29 31 | Messier 46. 1771. Den planetar. Nebel in diesem Hauf hat M. nicht wahrgenommen. | |
| | 44 11 | 28 26 | h. — 1827 (1). | |
| | 44 27 | 30 39 | Sehr grosser Hauf vieler hundert ** 10.11.12... Gr., 24′ im Durchm.; Ort der gedrängtesten Stelle. Schon im lichtschwachen Sucher auffällig. . . . . . . . . . . . . . | 64 |
| | 44 ± | 29 ± | Ort nicht genau zu bestimmen; ein ausserordentlich grosser und reicher Sternhauf, in welchem die ** unverkennbar gruppenweise gehäuft sind. Am Nordrande des inneren Theiles steht der planetarische Nebel IV. 39 (siehe d. folg.). . . . . . . . . . . . . | 64 |
| 464 | 113 45 12 | —14 24 29 | H. IV. 39. — 1786 (1 Beob.). | |
| = | 44 11 | 23 6 | h. — 1827 (1). | |
| 3093 | 43 57 | 22 52 | Lichtschwacher, grosser, planetarischer Nebelfleck, elliptisch, grosse Axe 50″. * 12 Gr. folgt 1ˢ südlich vom Centrum, h. sagt nördlich. . . . . . . . . . . . | 71 |
| | 44 8 | 22 59 | Planetar. Nebel von ziemlich schwachem Lichte, Diam. in AR. über 3ˢ. * 12 Gr. am Südrande. Schlecht zu beobachten. . . . . | 79 |
| | 44 17 | 23 13 | Gut sichtbar im Ringmikrometer. Diam. 3ˢ. * 12 Gr. folgt 2ˢ südl. Die Ringgestalt, die Lord | |

| h | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | | | Rosse dem schön elliptischen Nebel beilegt (*Philos. Transact.* 1850 p. 513) trotz der Grösse des Gegenstandes nicht erkannt. . . . . | 81 |
| 3095 | 113 47 50 | −17 52 16 | H. IV. 64. — 1790 (2). | |
| | 48 36 | 51 56 | h. im Südkataloge. — 1836 (1). | |
| | 48 22 | 51 37 | Planetarischer Nebel, deutlich schon im Ringmikrometer auffallend. Durchm. 13″ geschätzt. Hell = * 9 Gr. * 8.9 Gr. folgt $12^s55$. . . | 53 |
| | 48 21 | 51 35 | Heller, bläulicher Fleck, 9′ gross. Der nachfolgende * 8.9 Gr. scheint, vielleicht durch Contrast, gelbröthlich. Vergl. die vorangehenden Beobachtungen von h. 450. . . . | 57 |
| | 48 25 | 51 39 | Gesehn wie früher. Argelander hat nur den Begleiter, Lalande keinen von beiden. Wegen der merkwürdigen Gestalt dieses Nebels siehe die Abbildung Lassell's im 23. Bde. der *Mem. Roy. Astr. Soc.* Taf. II Fig. 7. — Mir erscheint die kleine Scheibe fast kreisrund. . . . . | 58 |
| | 48 20 | 51 37 | Dieser Nebel wurde späterhin zur Bestimmung der Geschwindigkeit seines Lichtes noch vielmal mit dem benachbarten * verglichen. . . | 60 |
| | 48 26<br>u. s. | 51 36<br>w. | Der nachfolgende * ($12^s$ später) ist in der That orangefarben, wie Lassell zuerst bemerkt. . | 61 |
| 466 | 114 34 2 | −24 19 45 | h. — Eine Beob. vom Jahre 1831. | |
| | 34 0 | 18 59 | * 6 Gr. Argelander's Ort, Z. 362, 1851 Febr. 23. Mit Vergrösserung Pistor III ein paar feine ** 13 Gr. im Glanze des hellen erkennbar. . . | 65 |
| | 33 52 | 19 5 | = Lalande 15131, 1799 März 22. * 6 Gr. Ein nicht bemerkenswerther Gegenstand. . . . | 66 |
| | 33 58 | 19 ± | Meridianbeobachtung. . . . . . . . . . | 73 |
| 496 | 121 33 47 | − 5 19 31 | H. VI. 22. — 1786 (4) Caroline Herschel. | |
| | 34 31 | 20 41 | h. — 1826 bis 1830 (3). | |
| | 34 ... | 20 ... | Ein sehr grosser, reicher *hauf; sehr zerstreute ** 10.11... Gr. In der innersten, nicht sehr compacten Gruppe ein feiner Doppelstern in einem Bogen von 5. Es mögen nahe an 100 ** sein. . . . . . . . . . . . . . . . | 60 |
| | 34 39 | 18 32 | Ort des Doppelsterns 10.11 Gr. nahe bei der Mitte. Die innere Gruppe ist 6′ gross, doch erstrecken sich die zerstreuten ** des Haufs über mehr als 20′. . . . . . . . . | 71 |
| | 34 44 | 18 41 | Derselbe Doppelstern im Hauf; kommt nicht vor bei Struve; * 9 Gr. praec. $2^s5$. . . . . | 73 |
| 513<br>=<br>3127 | 126 36 22 | −15 37 46 | H. IV. 35. — 1785 (1). | |
| | 37 27 | 38 4 | h. im Nordkatalog 1827 nur 1 Beob. | |
| | 37 14 | 37 34 | h. im Kapkatalog 1836 (1). | |
| | 37 52<br><br>s. flg. S. | 37 48 | * 12 Gr. (nicht 11) etwas neblig; deutlich unterschieden von einem auf dem Parallel folgenden * derselben Gr.; * 7.8 Gr. Argelander Z. 277 und 340 folgt $6^s21$, 2′ nördl. Sir J. Herschel: folgt $10^s$. Der hellere *, der auch bei La- | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ' " | ° ' " | | |
| | | | lande vorkommt, hat keine merkliche eigene Bewegung, — ob der Nebelstern? . . . . | 79 |
| | 126 37 50 | −15 37 39 | Ein Nebelstern 12 Gr. Anderer * = Gr. folgt 11$^s$3 auf dem Parallel. * 7.8 Gr. folgt 6$^s$35. | 81 |
| | 37 57 | 37 57 | Sehr schwach, vor Ende der Abenddämmerung. * 11 Gr. folgt etwa 12$^s$. . . . . . . . . | 86 |
| 524 | 129 44 10 | +13 9 3 | h. — 1830 (1). | |
| | 43 ± | 8 ± | Ein ganz unbedeutender Hauf weniger ** 10.11 ... Gr. Ort nicht genauer bestimmt. . . . | 81 |
| 528 | 130 30 2 | +11 53 28 | h. — 1828 bis 1830 4 Beob. | |
| | 30 ... | 53 ... | Unbedeutender *hauf an h.'s Orte gesehn, keine Position beobachtet. . . . . . . . . . | 79 |
| 531 | 130 49 36 | +12 21 29 | Messier 67. 1780 April 6; AR. vorher 45' vergrössert. | |
| | 44 10 | 21 39 | h. — 1826 bis 1830 5 Beob. | |
| | 48 29 | 22 32 | Reicher Hauf von vielen ** 10.11.12... Gr., etwa 10' im Durchm. Nicht rund, nicht verdichtet in der Mitte. Centrum beobachtet, aber nicht genau zu bestimmen. . . . . . . . . . | 74 |
| | 48 ± | 23 ± | Schöner, sehr reicher, etwas unregelmässig gestalteter Hauf von ** 10.11..13 Gr.; * 8 Gr. am nachfolgenden Rande (nördlich). Ort nicht zu bestimmen. . . . . . . . . . . | 79 |
| 564 | 135 35 28 | + 7 39 57 | H. I. 2. — 1783 (5). | |
| | 35 4 | 38 48 | h. — 1826, 1827 (2). | |
| | 35 24 | 38 39 | Recht heller, 2' grosser Nebel, rund, sehr verwaschen an den Rändern; heller in der Mitte; in gerader Linie mit 2 ** 12 Gr. * a praec. 19$^s$, * b folgt 16$^s$3. . . . . . . . . | 69 |
| | 35 12 | 38 57 | Heller, runder Nebel; in der Mitte hell = * 10 Gr. Diam. 95" * 10 Gr. folgt 49$^s$ auf dem Parallel. Der Nebel steht zwischen 2 ** 11.12 Gr. Lalande 17992 praec. 174$^s$0. . . . . | 74 |
| | 35 23 | 38 48 | Rund, hell, 80" gross. Diam. in AR. 7$^s$; * 12 Gr. folgt 16$^s$02 nahe auf dem Parallel. . . | 77 |
| 571 | 136 23 40 | −23 36 28 | H. I. 59. — 1784 (1). | |
| = | 24 27 | 34 54 | h. im Nordkatalog 1831 (1). | |
| 3148 | 24 55 | 33 45 | h. im Südkatalog 1835 (2). | |
| | 24 29 | 33 ... | Hell, ziemlich gross, rund. * 10 Gr. folgt 15$^s$7 und steht 1' südl. Decl. nur geschätzt. . . | 48 |
| | 24 27 | 33 23 | Nicht sehr hell, wenigstens 40 bis 50" Diam. (gewiss nicht 25"); heller in der Mitte. * 9 Gr. Argelander Z. 368 Nr. 119 folgt 15$^s$84 etwas südlich. . . . . . . . . . | 53 |
| | 24 29 | 33 36 | * 9.10 Gr. folgt: Δ AR. = 15$^s$72, Δ Decl. = 36", Nebel nördlich (kein Irrthum). Hell, 40" im Durchm., rund, im Δ mit 2 ** 9.10 Gr. . | 66 |
| | 24 32 | 33 24 | Ziemlich hell, rund, 35" gross. * 9.10 Gr. folgt 15$^s$47 und steht nahezu 48" südlich. Bei dem tiefen Stande des Nebels habe ich offenbar nur den helleren Kern in der Mitte erkannt. . . | 69 |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| 597 | 139 25 10: | +12 4 51 | H. II. 546. — 1786 (1). | |
| | 23 44 | 4 43 | h. — 1826 bis 1830 6 Beob. | |
| | 23 29 | 4 42 | Der nördlich vorangehende und hellere von zwei kleinen, sehr lichtschwachen Nebelflecken. Δ AR. = 6$^s$2. * 10 Gr. praec. nördlich in 5′ Entfernung. . . . . . . . . . . . | 81 |
| 598 | 139 25 8 | +12 4 2 | h. — 1826, 1830 (6). Ist H. II. 547. | |
| | 25 7 | 4 22 | Der südlich folgende von 2; sehr schwach. * 11 Gr. folgt 9$^s$5. In der relativen Lage beider Nebel scheint keine Aenderung vorzugehn: Sir W. Herschel hat keine Angabe; Sir J. Herschel: ΔAR. 4$^s$70 ΔDecl. 30″ 5 Beob. 1826—1830. Gegenwärtig kommt: ΔAR. 6,2 ΔDecl. 20″ 5 Beob. 1856 März 29. | 81 |
| 604 | 140 58 21 | +22 8 35 | H. I. 56. — 1784 (1). | |
| | 55 8 | 9 24 | h. — 1827, 1830 (3). | |
| | 55 28 | 9 27 | Laugier's Ort Nr. 17. | |
| | 55 30: | 9 30: | Sehr hell, 2½′ lang, im Δ mit 2 südlicheren ** 11 Gr. — Lord Rosse's Abbildung auf Taf. 36 seiner Abhandlung von 1850. . . . . . . | 60 |
| 630 | 143 44 39 | — 3 1 2 | H. I. 61. — 1785 (2). | |
| | 44 21 | 1 32 | h. — 1826 (1). | |
| | 44 ... | 1 ... | Nicht deutlich erkannt bei ziemlich guter Luft. | 69 |
| | 44 50 | 0 55 | Hell, rund, nicht klein. Nahe dabei, 2$^s$4 vorher und etwas südlich * 9.10 Gr. . . . . . . | 79 |
| | 44 42 | 0 47 | Hell, 50″ Durchm. * 10 Gr. praec. südlich, 1 Durchm. des Nebels vom Centrum entfernt. | 81 |
| | 44 43 | 0 56 | Hell, 45″ Diam. * 10 Gr. praec. südlich in ½′ Entf. | 86 |
| 668 | 149 27 2 | — 7 0 16 | H. I. 163. — 1787 (1). | |
| = | 26 16 | 6 59 18 | h. im Nordkatalog 1 Beob. vom Jahre 1828. | |
| 3223 | 25 58 | 59 57 | h. im Südkatalog 1836 (1). | |
| | 26 31 | 7 0 1 | Sehr hell und gross, langgestreckt; in der Mitte plötzlich viel heller = * 9 Gr. * 10 Gr. folgt 34$^s$8 etwas nördlich; * 7.8 Gr. folgt 129$^s$92 nahe auf dem Parallel (14″ nördl.) . . . | 74 |
| | 26 31 | 6 59 56 | Nebel, schwach, 1′ lang, schmal; in der Mitte beträchtlich hell = * 9 Gr. * 10 Gr. folgt 34$^s$3. | 75 |
| | 26 36 | 59 52 | Recht hell, über 2′ lang, gestreckt, in der Mitte plötzlich zu einem fixsternartigen Kerne verdichtet. Richtung der Axe südl. praec. nördl. folgend. * 11.12 Gr. steht 3½′ südl. 2 ** 10 Gr. folgen. . . . . . . . . . . . . | 77 |
| 684 | 151 29 38 | + 4 10 8 | H. I. 3. — 1783 (4). | |
| | 29 37 | 10 5 | h. — 1826 bis 1830 (4). | |
| | 29 29 | 10 1 | Ziemlich hell, rund, 40″ Diam. Der erste von zweien, Δ AR. = 29$^s$27 Nebel verglichen mit * Weisse X. 101, Bessel's Ort; Lal. differirt. | 75 |
| | 29 28 | 10 7 | Hell, rund, 50″ gross. Der vorangehende, hellere von 2 Nebeln, der andere folgt nördlich. Position gut. . . . . . . . . . . . | 77 |
| | s. flg. S. | | | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | 151 29 40 | + 4 10 8 | Matt, rund, 40″ gross. 2 Nebel, der folgende ist lichtschwächer. . . . . . . . . . . | 81 |
| 685 | 151 36 38 | + 4 13 6 | H. I. 4. — 1783 (1). | |
| | 36 51 | 12 42 | h. — 1826 bis 1830 (4). | |
| | 36 51 | 12 33 | Leidlich hell, schwächer als I. 2. Durchm. = 33″. * 10.11 Gr. folgt 6ˢ12 in Positionsw. 79°. Vergleichstern wie zu h. 684. . . . . . . | 75 |
| | 36 36 | 12 28 | Der schwächere, nachfolgende von 2, in etwa 8′ Entfernung. Δ AR. = 28ˢ43. Durchm. 40″. 6ˢ später folgt * 10 Gr. fast auf dem Parallel. | 77 |
| | 36 59 | 12 26 | Schwach, kleiner als I. 3. * 11 Gr. folgt unmittelbar. Dieser und der vorhergehende Nebel zeigen keine Spur einer Aenderung in ihrer gegenseitigen Lage; die vorhandenen Beob. sind nämlich:<br>Δ AR. 28ˢ0 Δ Decl. 180″ W. H. 1783,9 4 Beob.<br>29,2 160 J. H. 1826 bis 1830 4 Beob.<br>29,3 152 1856 März 11 3 Beob.<br>28,4 141 1856 März 24 2 ,,<br>29,3 138 1856 März 29 3 ,, | 81 |
| 692 | 152 24 26 | +22 39 13 | H. II. 44. — 1784 (1). | |
| | 27 32 | 34 50 | h. — 1827, 1830 (3). | |
| | 26 52 | 34 50 | Hell, länglich, 50″ gr.; der südl. vorangehende von 2 Nebeln. * 8 Gr. praec. 5ˢ58. . . . | 79 |
| | 27 1 | 34 58 | Ziemlich hell, 45″ Diam. . . . . . . . | 84 |
| | 26 49 | 34 51 | Hell (erster Klasse); gesehn wie sonst. H. 45 folgt 19ˢ5. . . . . . . . . . . . . | 86 |
| 693 | 152 32 7 | +22 38 36 | h. — 1827, 1830 (3). Ist H. II. 45. | |
| | 31 57 | 38 42 | Hell, rund, 40″ gross, schwächer und kleiner als der vorangehende II. 44. * 9.10 Gr. steht 55″ nördlich vom Nebel. . . . . . . . . . . | 79 |
| | 31 45 | 38 41 | Fast schwach, klein. * 10 Gr. 60″ nordwärts. * 7 Gr. praec. 85ˢ0 etwas nördl. . . . . | 84 |
| | 31 43 | 38 47 | Ziemlich schwach; steht 1′ südl. von * 9.10 Gr.<br>Anmerk. Auch dieser Doppelnebel zeigt in seiner Stellung keine Andeutung einer Aenderung. W. H., der beide Componenten schwach nennt, macht keine Angabe über ihre relative Lage; die übrigen Beob. sind folgende:<br>Δ AR. 18ˢ17 Δ Decl. 220″ J. H. 3 Beob. 1827 bis 1830<br>20,33 232 3 Beob. 1856 März 27<br>18,93 223 3 ,, 1856 April 2<br>19,50 236 2 ,, 1856 April 23 | 86 |
| ... | 153 51 ± | +20 54 ± | H. II. 28. 29. — 1784 (1). Doppelnebel; die Decl. offenbar um einen Viertelgrad verschrieben. Kommt nicht bei h. vor. | |
| | 48 ... | 38 ... | Schwacher Doppelnebel bei γ Leonis (vergl. Secchi in d. Astr. Nachr. XXXVI, p. 243). Beide | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | | | Componenten ziemlich gross, der südlich folgende ist etwas heller; Distanz über 120″. | 66 |
| | 153 48 21 | +20 39 11 | Ein sehr schwacher Doppelnebel, nur vermöge seiner Grösse wahrnehmbar. Das Ganze erfüllt mehr als 4′; der zweite folgt 4ˢ und steht südlicher. Beide nahezu = hell, fast zu schwach zur Beob. Ort des nördl. vorangehenden; γ Leonis praec. 3ᵐ 31ˢ6. . . | 74 |
| | 48 34 | 39 27 | Ein schöner, lichtschwacher Doppelnebel. Ort des nördl. praec. Beide sind klein und nahe gleich hell. Das Ganze ist wie von einem Nebel umflossen, vielleicht nicht unähnlich dem bekannten Nebel im Fuchs. Δ AR.=3ˢ5, Δ Decl. = 126″. . . . . . . . . . . | 84 |
| 710 | 154 16 9 | +17 53 43 | H. IV. 10. — 1784 (1). | |
| = | 14 36 | 54 38 | h. im Nordkatalog 1827 und 1831 (2). | |
| 3246 | 14 41 | 54 59 | h. im Kapkatalog 1836 (1). | |
| | 14 23 | 54 39 | * 9.10 Gr. mit wahrnehmbarem Nebel, besonders auf der nördlich folgenden Seite. Bei H. und h. sehr schwach. 2 ** 11 Gr. praec., der erste 10ˢ5. Den * 9.10 Gr. finde ich in keinem Kataloge. . . . . . . . . . . . | 79 |
| | 14 18 | 54 43 | * 9.10 Gr. mit sehr deutlichem, fast 1′ grossem Nebel; im Δ mit 2 ** 11 Gr. Einer der verglichenen Sterne (8 Gr. Lal. 20182) hat in der *Hist. Cél.* 1ˢ zu viel. . . . . . . . . | 81 |
| | 14 24 | 54 44 | Nebelstern 10 Gr. 2 ** 11 Gr. praec. Ort sehr sicher durch verschiedene **. . . . . . | 84 |
| 3248 | 154 21 52 | −17 53 44 | H. IV. 27. — 1785 (2). | |
| | 23 19 | 52 46 | h. im Südkataloge 1835 bis 1837 (4). | |
| | 23 18 | 53 7 | Ort der *Hist. Cél.* beobachtet 1798 April 21 = Lalande 20204. — Ein sehr heller planetarischer Nebel, 25″ im Durchm., von blauer Farbe »himmelblau« = * 7.8 Gr. * 10 Gr. folgt 20ˢ etwas südl. * 10.11 Gr. folgt südl. in 2′ Entfernung. . . . . . . . . . . | 66 |
| | 23 14 | 53 ± | Meridiandurchgang. Ist Piazzi X. 68. . . . | 75 |
| | 23 11 | 53 6 | Schöner, hellblauer Lichtball, 27″ Diam. = * 8 Gr. * 10 Gr. folgt 19ˢ2, Positionsw. 115°. . | 73 |
| | 23 9 | 52 59 | Aeusserst glänzender planetarischer Nebelfleck = * 6.7 Gr. (nicht 8); Diam. wenigstens 20″; steht nördl. im Δ mit 2 ** 11 Gr. | 74 |
| | 23 13 | 53 5 | Gesehn wie früher; Ort gut. . . . . . . | 75 |
| | | | Anmerk. Lalande hat diesen so merkwürdigen * als neblig erkannt; in Argelander's südlichen Zonen kommt er nicht vor. Eine Abbildung desselben in den Kapbeobachtungen Taf. VI, mit der auch Lassell's Beschreibung zu vergleichen in *Mem. R. Astr. Soc.* XXIII. p. 62. | |
| 711 | 154 42 53 | +29 17 51 | H. I. 86. — 1785 (1). | |
| | 42 47 | 16 2 | h. — 1827 bis 1832 (4). | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | 154 43 9 | +29 16 9 | Ziemlich hell, 50″ lang, nicht rund; mit *artigem Kerne. * 7.8 Gr. (Bessel Z. 406) folgt $155^s5$ und steht 279″ nördl. . . . . . . . . | 81 |
| 740 | 158 40 43 | +12 50 19 | H. I. 26. — 1784 (1). | |
| | 54 13 | 46 27 | h. — 1830 (1). | |
| | . . . . . . | . . . . . . . | Gesehn, doch bei schwachem ☾schein nicht deutlich genug zur Beobachtung. . . . . | 75 |
| 743 | 158 59 26 | +12 28 40 | Messier 95. 1781. Position im Mittel aus den Beob. von Messier und Méchain. | |
| | 60 40 | 29 7 | h. — 1825 bis 1831 3 Beob. | |
| | 60 36 | 29 13 | Laugier's Ort Nr. 20. | |
| | 159 0 ± | 29 ± | Nicht sehr hell, rund, 110″ gr. * 10 Gr. praec. $24^s$ auf dem Parallel. Kein Ort beobachtet. | 75 |
| 748 | 159 34 8 | +14 32 12 | H. II. 78. — 1784 (2). | |
| | 39 40 | 32 8 | h. — 1830, 1831 (2). | |
| | 39 16 | 32 5 | Sehr schwach, doch durch seine Grösse erkennbar; wohl 90″ im Durchm. 2 ** 12 Gr. südl. unmittelbar vorhergehend. Der Nebel folgt $8^s76$ auf k Leonis. — h. 751 nur vermuthet bei günstigstem Himmel. . . . . . . . . | 78 |
| 754 | 159 47 38 | +14 47 10 | H. II. 99. — 1784 (1). | |
| | 56 13 | 46 47 | h. — 1830, 1832 (3). | |
| | 55 52 | 46 26 | Laugier's Ort Nr. 22. | |
| | 56 11 | 46 22 | Gut sichtbar, ½′ gross; ein wenig schwächer als I. 18, doch gewiss ein Nebel erster Klasse. * 10.11 Gr. folgt $57^s7$ auf dem Parallel. Rümker 3338 folgt $21^s17$. . . . . . . . . . | 53 |
| | 56 13 | 46 14 | Leidlich hell, rund, 70″ im Durchm., sehr verwaschen, heller in der Mitte. Folgt $1^m\ 16^s5$ auf 52 k Leonis — W. H. sagt: folgt $42^s$ — auch ist der Nebel nicht klein zu nennen. h. 753 nur vermuthet. . . . . . . . . | 74 |
| | 56 9 | 46 23 | Ziemlich schwach, 50″ gross, kreisrund; heller in der Mitte. 2 ** 10 Gr. folgen. . . . . | 78 |
| 757 | 159 58 25 | +13 22 27 | Méchain's Posit. 1781. Bode's Jahrb. 1786 S. 233. | |
| | 59 38 | 21 43 | H. I. 17. — 1784 (5). | |
| | 58 34 | 21 59 | h. — 1830, 1831 (3). | |
| | 58 24 | 22 18 | Laugier's Ort Nr. 23. 1848—49. | |
| | 58 18 | 22 36 | Der südlich vorangehende, hellste Nebel von 3 im Felde; in der Mitte beträchtlich heller; 60″ Diam. * 8.9 Gr. praec. $1^m\ 16^s97$ und steht 62″ nördlicher. . . . . . . . . . . | 53 |
| | 58 21 | 22 25 | Vorzüglich hell, 1½′ gross, rund, mit sehr hellem Kerne. . . . . . . . . . . . . . . | 69 |
| | 58 16 | 22 30 | Sehr hell, rund, 55″ gr. Der erste von 3 im Felde. | 75 |
| | 58 28 | 22 31 | Ort gut; gesehn wie früher. Ein anderer Nebel folgt $27^s4$; * 8.9 Gr. praec. $77^s7$, Δ Decl. = 68″. | 78 |
| 758 | 160 6 38 | +13 24 43 | H. I. 18. — 1784 (5). | |
| | 5 7 | 24 42 | h. — 1830, 1831 (3). | |
| | 5 13 | 25 9 | Laugier Nr. 24. | |

| h. | Rectascension 1850.<br>° ' " | Declination 1850.<br>° ' " | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | 160 5 16 | +13 25 15 | Der zweite von 3 Nebeln, sehr hell, 40" gross, etwas schwächer als der vorige I. 17. * 8 Gr. praec. 104ˢ54 und steht 103" südlicher. | 53 |
| | 5 20 | 24 58 | 50" gross, rund, in der Mitte zu einem Kerne verdichtet; ist kleiner u. schwächer als I. 17. | 69 |
| | 5 13 | 25 13 | Sehr hell, rund, 30" (kleiner als h. 757); ist der schwächere, nachfolgende, nördlichere von 2 hellen Nebeln Δ AR. = 27ˢ7. . . . . . . | 75 |
| | | | Anmerk. In der gegenseitigen Stellung von h. 757 und h. 758 keine Aenderung, denn nach allen vorhandenen Daten ist:<br>Δ AR. 28ˢ — Δ Decl. 180" — 1783 W. Herschel<br>26,47 — 166 — 1830, 1831 J. Herschel 3 Beob.<br>27,14 — 171 — 1848, 1849 Laugier<br>27,54 — 165 — 1855 Dec. 17 5 Beob.<br>27,91 — 149 — 1856 Febr. 2 2 „<br>27,70 — 163 — 1856 März 11 3 „ | |
| 761 | 160 9 37 | +13 20 23 | H. II. 44. — 1784 (4). | |
| | 7 8 | 19 32 | h. — 1825 bis 1831 (4); »schwach, sehr schwach«. | |
| | 7 58 | 19 26 | Der letzte von dreien, äusserst schwach, doch bei guter Luft recht deutlich. Durchm. 1' (gewiss grösser als 15" h.). AR. beobachtet, Decl. nur geschätzt. * 10 Gr. folgt 19ˢ im Parallel. | 53 |
| | 7 47 | 18 54 | Schwach, 40" Diam. Im Δ mit 2 beträchtlich helleren Nebeln. . . . . . . . . . . | 69 |
| | 7 52 | 19 13 | Der dritte und südlichste im Felde. Schwach, aber gross, und deshalb ziemlich gut sichtbar. * 10.11 Gr. folgt 18ˢ5 fast im Parallel. . . | 75 |
| | 7 50 | 19 23 | Gesehn wie früher. Ort gut. . . . . . . | 77 |
| 774 | 160 43 56 | +14 10 38 | H. I. 27. — 1784 (3). | |
| | 44 31 | 12 21 | h. — 1830, 1831 (2). | |
| | 44 17 | 12 15 | Rund, ziemlich hell, gross und deutlich. 2 ** 11 Gr. in 6' Entfernung südl. davon. . . . | 69 |
| | 44 15 | 12 10 | Leidlich hell; heller als H. II. 362; heller in der Mitte; 35" gross; * 8 Gr. folgt 38ˢ6. . . . | 78 |
| | 44 21 | 12 9 | Hell und gross, 50"; * 8 Gr. folgt 38ˢ08, 927" nördlich. . . . . . . . . . . . . . | 83 |
| 773 | 160 44 2 | +28 46 49 | H. II. 362. — 1785 (1). | |
| | 45 47 | 46 1 | h. — 1827 bis 1831 (4). | |
| | 45 34 | 46 6 | Laugier's Ort Nr. 25. | |
| | 45 27 | 46 2 | Klein, 35", rund, ziemlich hell. * 6 Gr. praec. nahe im Parallel. * 11 Gr. praec. 27ˢ6, * 6.7 Gr. 45 Leon. min. folgt 93ˢ78. . . . . . | 62 |
| | 45 21 | 45 53 | 40", ziemlich schwach, rund. Etwas heller in der Mitte. Steht zwischen 44 u. 45 Leon. min. | 78 |
| | 45 15 | 46 6 | * 6 Gr. praec. 82ˢ5 (Will. Herschel 78ˢ); fast schwach, rund, 40" gr. * 11 Gr. praec. 28ˢ etwas nördl. . . . . . . . . . . . . | 83 |
| 805 | 162 46 47 | +29 46 34 | H. I. 87. — 1785 (1). | |
| | 163 2 55 | 46 55 | h. — 1827 bis 1832 (10). | |
| | 3 2 | 46 37 | Laugier's Ort Nr. 26. | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ' " | ° ' " | | |
| | 163 3 0: | +29 46 40: | Ort geschätzt; der Nebel matt, in der Mitte etwas heller, 1½' im Durchm. * 7 Gr. folgt 15' nördl. | 53 |
| | 2 43 | 46 42 | Nicht hell, gross, rund, 70" Diam. * 6 Gr. folgt südlich; * 7.8 Gr. Lalande 21117 (Bessel Z. 356) folgt 25ˢ81, 14' 38" nördl. . . . . | 62 |
| | 2 57 | 46 39 | Grosser Nebel von mattem Lichte, 100" Diam., nur wenig heller in der Mitte. * 8 Gr. folgt 24ˢ96. . . . . . . . . . . . . . . | 78 |
| | 2 52 | 46 41 | Sehr matt, über 1' gross, unbeträchtlich heller in der Mitte. Ein feiner * 13 Gr. scheint im Nebel zu stehn, daher die Beob. etwas unsicher. | 84 |
| 806 | 163 6 48 | +11 38 45 | H. II. 101. — 1784 (1). | |
| | 6 7 | 42 17 | h. — 1830 bis 1831 (2). | |
| | 6 2 | 42 18 | Laugier's Ort Nr. 27. | |
| | 6 ... | 42 ... | Nur gesehn, sehr hell, sogar für einen Nebel erster Klasse; 30" gross, rund, in der Mitte = * 10 Gr. * 9 Gr. praec. auf dem Parallel 35ˢ. . . . . . . . . . . . . . . | 69 |
| | 6 ... | 42 ... | Ein schöner Nebel I. Klasse, 40" Diam., rund. * 9.10 Gr. praec. 33ˢ3; * 8 Gr. folgt 9' nördl. Wolken verhindern eine genaue Beob. . . | 80 |
| | 6 ... | 42 ... | Keine Beschreibung. * 8 Gr. folgt 40ˢ60 u. steht 8' 2" nördl. Den Vergleichstern finde ich nirgend bestimmt. . . . . . . . . . . | 81 |
| | 6 ... | 42 ... | Verglichen mit * 8 Gr. Δ AR. = 41ˢ. * 10 Gr. praec. 33ˢ5, ein wenig nördl. . . . . . | 86 |
| 810 | 163 46 26 | +28 46 27 | H. I. 88. — 1785 (1). | |
| | 44 49 | 46 40 | h. — 1827 bis 1832 7 Beob. | |
| | 45 41 | 46 41 | Laugier's Ort Nr. 28. | |
| | 45 ... | 46 40 | Gesehn, Decl. geschätzt; Nebel 70" gross; an Helligkeit = H. I. 87. . . . . . . . | 53 |
| | 45 34 | 46 36 | Leidlich hell, 50" Durchm., rund. * 8 Gr. (Bessel Z. 526) praec. 63ˢ37 und steht 317" südl. | 78 |
| 818 | 164 32 0 | + 0 46 57 | H. I. 13. — 1784 (3). | |
| | 31 59 | 46 17 | h. — 1828 (1). | |
| | 31 56 | 46 22 | Laugier's Ort Nr. 29. | |
| | 31 46 | 46 26 | Sehr hell, gross, sehr länglich (wohl 4') mit hellem, excentrisch liegendem Kerne; Positionswinkel beträchtlich grösser als bei h. . . . | 85 |
| | 31 49 | 46 19 | Sehr hell und sehr gross; lang gestreckt mit excentrischem Kerne. * 6 Gr. pˢ Leonis praec. 131ˢ3. . . . . . . . . . . . . . | 86 |
| 854 | 167 45 45 | +13 53 28 | Messier Nr. 65. — Entdeckt 1780 März 1. | |
| | 46 20 | 54 30 | h. — 1825 bis 1830 (4). | |
| | 46 32 | 54 27 | Laugier's Ort Nr. 31. | |
| | 46 22 | 54 30: | Sehr hell, länglich, mit einem runden, beträchtlich helleren Kerne; 3½' lang. Kleine ** südl. stehn anscheinend noch im Nebel. Decl. nur geschätzt. . . . . . . . . . . . . . | 53 |
| | 46 19 | 54 35 | Hell = Messier 66 (siehe den nachfolg. Nebel); 3' gr., länglich, in der Mitte hellerer Kern. — In der nebelreichen Gegend der Bilder Leo, | |
| | s. flg. S. | | | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ' " | ° ' " | | |
| | | | Virgo, Coma Ber. bilden die Nebel ohne fixsternartige Verdichtung in der Mitte höchst seltene Ausnahmen. . . . . . . . . . | 54 |
| | 167 46 49 | +13 54 16 | Sehr hell, nicht rund. * 10 Gr. praec. südlich in 2' Entf. — Zwischen Messier 65 u. 66 bemerke ich keinen Unterschied der Helligkeiten. — Abbildung bei Lord Rosse, Abhandl. von 1850, Fig. 7. . . . . . . . . . . . | 62 |
| 857 | 168 6 28 | +13 49 34 | Messier Nr. 66. 1780 März 1. | |
| | 4 55 | 47 49 | h. — 1825, 1826 (3). | |
| | 6 22 | 48 38 | Laugier's Ort Nr. 32. | |
| | 6 33 | 48 37 | Sehr hell = Mess. 65. Länglich, grösste Erstreckung 3', 1½' breit; Decl. nur geschätzt, doch recht zuverlässig. . . . . . . . . . | 53 |
| | 6 31 | 48 34 | Hell, 2' lang, heller in der Mitte. Ein Δ von ** geht nördl. voran; * 9 Gr. praec. 7ˢ67, 112" nördlich. . . . . . . . . . . . | 54 |
| | 6 28 | 48 35 | Sehr hell, 4' lang. In gerader Linie mit * 9 und * 10 Gr., die nördl. voraufgehen. . . . . | 62 |
| 859 | 168 8 3 | +14 25 26 | H. V. 8. — 1784 (3). | |
| | 6 31 | 24 49 | h. — 1826 bis 1831 (4). | |
| | . . . . . . | . . . . . . | Ein 9' langer, 1½' breiter, ziemlich heller, merkwürdiger Streifen; sehr deutlich. Positionsw. geschätzt 105°. . . . . . . . . . . . | 53 |
| 873 | 168 46 24 | +17 23 56 | H. I. 5. — 1783 (2). | |
| | 45 30 | 24 48 | h. — 1832 (3). | |
| | 45 27 | 25 16 | Ein Nebel zweiter Klasse; ziemlich klein, rund. * 6 Gr. 81 Leonis folgt 2ᵐ 45ˢ2. . . . . | 86 |
| 875 | 168 48 33 | +13 48 24 | h. — 1831 (1). An dieser Stelle, im Parallel von Mess. 66 steht nur ein * 10.11 Gr. »Sehr hell« kann der neue Nebel durchaus nicht sein. . | 62 |
| | . . . . . . | . . . . . . | Der sehr grosse u. sehr helle Nebel ist bestimmt nicht vorhanden. Ich vermuthe, es sei Mess. 66 (also h. 857 = h. 875) mit einem Fehler in AR. von 3 Zeitminuten. Abbildung und Beschreibung stimmen; der Nebel, wäre er wirklich vorhanden, könnte mir kaum entgangen sein. . . . . . . . . . . . . . . | 81 |
| 891 | 169 35 48 | +17 40 52 | H. II. 159. — 1784 (1). | |
| = | 39 28 | 41 6 | h. im Nordkataloge. 1832 (3). | |
| 3343 | 40 27 | 41 16 | h. im Kapkataloge. 1836 (1). | |
| | 39 57 | 41 30: | Schwach (nicht »sehr hell«), rund, 50"; 2 ** 11 Gr. folgen. . . . . . . . . . . . | 86 |
| 893 | 169 50 18 | +17 50 58 | h. — 1831, 1832 (3). | |
| | 50 ± | 50 ± | Sehr schwach, kaum wahrnehmbar. 60" im Durchm. * 11 Gr. folgt 2½' nördl. . . . . | 86 |
| 894 | 169 41 49 | +18 1 52 | H. II. 160. — 1784 (1). | |
| | 58 7 | 2 51 | h. — 1827, 1831 (3). | |
| | . . . . . . | . . . . . . . | Leidlich hell, 1½' gross, kreisrund. * 10.11 Gr. praec. 3' nördl. Kein Ort beobachtet. . . . | 86 |

| h. | Rectascension 1850. ° ′ ″ | Declination 1850. ° ′ ″ | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| 943 | 173 22 13 | +12 18 6 | H. I. 21. — 1784 (3). | |
| | 18 43 | 18 5 | h. — 1825 bis 1831 (4). | |
| | 18 29 | 18 1 | Leidlich hell, rund, 70″ gr. ∗ 9 Gr. Weisse XI. 602 folgt $63^s32$ fast im Parallel. . . . . . | 83 |
| | 18 20 | 18 2 | Gut sichtbar, über 1′ gross, rund, von gleichförmigem Lichte. ∗ 9 Gr. folgt $64^s2$. . . . . . | 85 |
| | 18 8: | 18 1 | Schwach, 70″ Diam., rund; ☾ aufgehend, Position etwas unsicher. . . . . . . . . | 86 |
| 1132 | 181 43 19 | +15 45 17 | Messier 98. 1781 April 13. | |
| | 32 21 | 44 19 | h. — 1826, 1832 (4). | |
| | 30 46 | 44 22 | Ein 8′ langer, schmaler, schwacher Lichtstreif. Positionswinkel 153°. ∗ 5 Gr. 6 Comae folgt $2^m\ 19^s9$. . . . . . . . . . . . . | 62 |
| 1140 | 181 48 8 | +34 3 14 | H. I. 175. — 1787 (1). | |
| | 52 49 | 1 54 | h. — 1827, 1828 (2). | |
| | 42 11 | 1 50 | Laugier's Ort Nr. 38, in AR. offenbar irrig. | |
| | 53 0 | 2 6 | Sehr hell, 1¼′ gross, rund; beträchtlich heller in der Mitte. ∗ 8.9 Gr. steht 3¼′ nördl. ∗ 5 Gr. Piazzi XII. 29 folgt $85^s5$. . . . . . . . | 94 |
| 1148 | 182 0 13 | +13 51 30 | H. I. 35. — 1784 (1). | |
| | 4 3 | 59 18 | h. 1825 bis 1831 (4) (nicht = I. 109). | |
| | 4 2 | 58 58 | Laugier's Ort Nr. 39. | |
| | 4 1 | 59 12 | Hell, gross, langgestreckt, in der Mitte verdichtet zu einem Kerne. ∗ 9.10 Gr. praec. $41^s1$ nahe im Parallel. . . . . . . . . . . | 82 |
| | 3 58 | 59 7 | Ein langer, schmaler Lichtstreif, Positionsw. 40° (südl. praec. nördl. folgend); ∗artiger Kern. ∗ 11 Gr. praec. $41^s2$. . . . . . . . . . | 84 |
| 1171 | 182 39 17 | +29 0 59 | H. I. 89. — 1785 (1). | |
| | 38 18 | 0 25 | h. — 1827 bis 1832 (3). | |
| | 38 42 | 0 35 | Sehr hell = ∗ 9 Gr., rund, ☾ störend. ∗ 6.7 Gr. 9 Comae folgt $83^s72$. . . . . . . . . . | 78 |
| | 38 39 | 0 44 | Heller, ∗artiger Kern mit grossem, rundem Nebel. ∗ 13 Gr. folgt etwas südl.; ∗ 6 Gr. folgt $83^s9$. | 88 |
| | 38 40 | 0 36 | Sehr hell; Kern = ∗ 9.10 Gr. ∗ 7 Gr. folgt $83^s87$. . . . . . . . . . . . . . . | 95 |
| 1173 | 182 47 47 | +15 14 15 | Messier 99. 1781 April 13. | |
| | 47 50 | 15 12 | h. — 1832 (4). | |
| | 48 0 | 14 49: | Ziemlich hell, rund, 95″ Diam. (wohl nur den hellsten Theil gesehn, in ziemlich gleichförmigem Lichte). ∗ 6.7 Gr. Rümker 3904 folgt 8′ nördlich. . . . . . . . . . . . . | 83 |
| | 48 1 | 15 2 | Hell, sehr gross, wohl 3′; schwacher Kern, verwaschen, kometenartig. . . . . . . . . | 88 |
| | 47 54 | 14 48 | Sehr gut sichtbar, 2 bis 3′ gross, rund, wenig heller in der Mitte, ohne deutlichen Kern. ∗ 8.9 Gr. folgt südl. $62^s5$. . . . . . . . . | 95 |
| 1185 | 183 9 59 | +30 26 14 | H. I. 75. — 1785 (1). | |
| | 4 18 | 27 4 | h. — 1827 (1). | |
| | 4 32 | 27 9: | Schwächer als I. 90, doch bedeutend grösser. Hell, wohl 2′ im Durchm. ☾ aufgegangen. . | 78 |

s. flg. S.

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | 183 4 ± | +30 27 ± | Hell, grösser, aber schwächer, als der nachfolgende Nebel I. 90. Kern excentrisch? . . | 88 |
| | 4 23 | 26 53 | Schwach, doch gross. h. 1186 folgt 17ˢ3. . . | 95 |
| 1186 | 183 6 17 | +30 3 0 | H. I. 90. — 1785 (1). | |
| | 8 19 | 6 54 | h. — 1827 (2). | |
| | 8 45 | 7 0: | Sehr hell, rund, bei ☾schein gut sichtbar. ⋆ 8 Gr. geht in 12′ Entfern. etwas südlich voran. Nebel II. 377 folgt in 4′ Entfern. nördlich. . | 78 |
| | 8 48 | 7 8 | Sehr hell, Kern fixsternartig = ⋆ 10 Gr., umgeben von rundem Nebel. . . . . . . | 88 |
| | 8 41 | 6 55 | In heller Abenddämmerung gut sichtbar. ⋆ 6 Gr. praec. 2ᵐ 37ˢ4. . . . . . . . . . | 95 |
| 1204 | 183 47 50 | +30 43 15 | H. I. 76. — 1785 (1). | |
| | 43 21 | 43 34 | h. — 1827 (1). | |
| | . . . . . . | . . . . . . . | Ziemlich hell, länglich, 2′ gross. ⋆ 12 Gr. praec. nördlich. Ort nicht bestimmt. . . . . . | 88 |
| 1231 | 184 11 2 | −17 57 23 | H. I. 65. — 1785 (1). | |
| | 11 21 | 56 44 | h. — 1828 (1). | |
| | 11 12 | 57 5 | Laugier's Ort Nr. 40. | |
| | 10 47 | 56 56 | Leidlich hell, 40″ gross, rund; innerhalb eines Vierecks von ⋆⋆ 11 Gr. . . . . . . . | 87 |
| 1232 | 184 10 17 | + 8 9 42 | H. I. 30. — 1784 (2). | |
| | 12 40 | 9 2 | h. — 1830 (3). | |
| | 12 38 | 9 5 | Hell bei starkem ☾schein; rund, über 1′ gross. ⋆ 11 Gr. praec. nördlich in 3′ Entf. ⋆ 9 Gr. Weisse XII. 232 praec. 140ˢ37. . . . . | 78 |
| | 12 31 | 9 10 | Ziemlich hell, rund, 60″ Diam., Kern; ⋆ 11 Gr. praec. nördl. Entfern. 200″. . . . . . . | 88 |
| | 12 29 | 9 8 | Recht hell, rund, beträchtlich heller in d. Mitte. Zwischen 2 ⋆⋆ 11 Gr. ⋆ 9 Gr. praec. 2ᵐ 19ˢ6. | 89 |
| 1237 | 184 22 46 | +13 44 4 | Messier 84. 1781 März 18. | |
| | 21 47 | 43 11 | h. — 1829 (1). | |
| | 21 45 | 43 22 | Sehr hell, rund, heller Kern, Durchm. 90″. ⋆ 10 Gr. praec. 31ˢ und steht 1′ südl. H. II. 167 folgt 42ˢ16. . . . . . . . . . . . . . | 79 |
| | 21 48 | 43 15 | Sehr hell, 100″ Diam., rund mit hellem, ⋆artigem Kerne. ⋆ 8 Gr. Rümker 3940 praec. 118ˢ78, ⋆ 9.10 Gr. praec. auf dem Par. 31ˢ7. | 82 |
| | 21 52 | 43 29 | Gesehn wie früher; ⋆ 8 Gr. praec. 119ˢ1, ⋆ 10 Gr. praec. 31ˢ5. . . . . . . . . . . | 84 |
| 1242 | 184 27 47 | +19 0 46 | Messier 85, 1781 im Mittel nach den Beob. von Messier und Méchain. | |
| | 27 19 | 1 9 | h. — 1827, 1831 (2). | |
| | 27 30: | 1 16: | Sehr hell, rund, in der Mitte bedeutend heller; ohne Zweifel ein leicht auflöslicher ⋆hauf. H. II. 55 folgt 32ˢ0 etwas nördlich. ⋆ 9.10 Gr. folgt 9ˢ4 und steht 130″ südlich. . . . . | 88 |
| | 26 59 | 1 13 | Sehr hell; ⋆ 10 Gr. folgt südlich in 150″ Abstand. | 89 |
| | 27 17 | 1 12 | Sehr hell und gross, rund, in heller Abenddämmerung. ⋆ 10.11 Gr. folgt nördlich 8ˢ8, Positionsw. 120°. ⋆ Rümker 3953 praec. 44ˢ2. . | 94 |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nachl. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| 1244 | 184 32 44 | +13 28 46 | h. — 1829 (1) vielleicht nicht »Nova«, sondern = H. II. 167. Die Nebel sind an dieser Stelle so ausserordentlich gedrängt und gehäuft, dass bei der Unsicherheit der älteren Bestimmungen, die Identität bisweilen zweifelhaft bleiben muss. | |
| | 32 18 | 29 42 | Schwach, 45″ Durchm. (sehr schwach bei Sir J. Herschel) ∗ 12 Gr. steht 3½′ südl. Ein anderer Nebel, wohl H. II. 167, noch merklich lichtschwächer, steht 9′ nördlich von diesem. | 79 |
| | 32 22 | 29 47 | Schwach, nicht klein; der südlichere, hellere von 2. . . . . . . . . . . . . . | 84 |
| 1251 | 184 28 14 | +19 1 16 | H. II. 55. — 1784 (1). | |
| | 34 26 | 2 27 | h. — 1827, 1831 (2). | |
| | 35 30: | 2 34 | Ziemlich schwach, 30″ Durchm.; beträchtlich kleiner und schwächer als M. 85. Position etwas unsicher. . . . . . . . . . . . | 88 |
| | 35 8 | 2 30 | Gut sichtbar, ziemlich klein. M. 85 praec. südlich 32ˢ6. . . . . . . . . . . . | 89 |
| | 34 55 | 2 28 | Sehr schwach in der Dämmrung. Folgt 30ˢ8 auf h. 1242. . . . . . . . . . . . | 94 |
| 1253 | 184 38 53 | +13 46 51 | Messier 86. 1781. März 18. | |
| | 38 12 | 46 10 | h. — 1826, 1830 (2). Ist nicht »Nova h.«, sondern schon von Messier beobachtet; man vergleiche auch Olbers in Bode's Jahrbuche für 1805. S. 252. | |
| | 38 45 | 46 40 | Sehr hell, mit Kern, rund, gross 110″, sehr verwaschen an den Rändern. Der Nebel ist grösser aber schwächer als der vorangehende M. 84. | 79 |
| | 38 50 | 46 37 | Sehr hell, sehr gross; viel heller in der Mitte, rund, 2′ im Diam. Folgt 68ˢ3 auf Mess. 84. . | 82 |
| | 38 59 | 46 42 | Gesehn wie früher. 68ˢ6 auf M. 84 folgend. . | 84 |
| 1258 | 184 44 34 | +31 58 16 | H. I. 77. — 1785 (1). | |
| | 44 53 | 32 2 40 | h. — 1827, 1831 (2). | |
| | . . . . . . | . . . . . . | Hell, 1′ gross, etwas länglich; merklich verdichtet in der Mitte. Keine Position bestimmt. . | 83 |
| 1274 | 185 1 25 | +13 54 34 | H. I. 28 a. — 1784 (2). | |
| | 0 27 | 54 5 | h. — 1826 bis 1831 3 Beob. Dies ist nicht, wie bei h., der Nebel Mess. 86. | |
| | 1 1 | 54 36 | Gut sichtbar, nicht gross, beträchtlich heller in der Mitte. Ein etwas schwächerer Nebel h. 1275 folgt 5ˢ5 und steht 273″ südlich. ∗ 9 Gr. Rümker 3987 folgt 67ˢ7 . . . . . . . . . | 79 |
| | 1 5 | 54 43 | Hell, 40″ Durchm., mit Kern. ∗ 9 Gr. folgt 67ˢ43. | 81 |
| | 1 3 | 54 39 | Hell, rund, der erste und nördlichere von 2, Δ AR = 5ˢ. . . . . . . . . . . . . . | 82 |
| 1275 | 185 1 35 | +13 50 2 | h. — 1826 bis 1831 (3). Ist der nachfolgende von H. I. 28. | |
| | 2 23 | 50 3 | Klein, leidlich hell; steht 4½′ südl von h. 1274. | 79 |
| | 2 17 | 50 23 | Ziemlich hell und gross, 60″ im Durchm.; der schwächere, nachfolgende von 2 Nebeln Δ AR. = 4ˢ8, Δ Decl. = 260″, letztere nur geschätzt. | 84 |
| | s. fig. S. | | | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | 185 2 18 | +13 50 17 | Hell, rund, mit hellerem Kerne. Unterschied der Decl. gegen den vorangehenden Nebel = 262″. | 82 |
| 1287 | 185 26 56 | +14 7 34 | H. II. 121. — 1784 (1). | |
| | 20 18 | 4 13 | h. — 1831 (1). | |
| | 20 ... | 5 ... | Aeusserst schwach, klein, der vorangehende schwächere Nebel von 2; • 10 Gr. folgt 13ˢ fast im Parallel. Ebenso gesehn in Nacht 81. | 79 |
| | 20 26 | 5 6 | Schwach, 50″ gross; • 10 Gr. folgt 12ˢ. — H. II. 122 folgt 5ˢ35. . . . . . . . . . . . | 89 |
| 1290 | 185 26 56 | +14 7 34 | H. II. 122. — 1784 (1). | |
| | 21 40 | 1 38 | h. — 1825, 1831 (2). | |
| | 21 45 | 1 ± | Schwach, 20″ Diam., heller in der Mitte. Am Orte wie angegeben gesehn in Nacht 81 und sonst oftmals. . . . . . . . . . . . | 79 |
| | 21 47 | 0 57 | Leidlich hell, klein, doch schlecht zu beobachten. Decl. nur geschätzt aus H. II. 121. . . . | 89 |
| 1294 | 185 27 0 | + 8 49 57 | Messier 49. 1771. Febr. 19. | |
| | 29 8 | 51 ... | Oriani 1779 nach Bode's Jahrb. 1784 p. 181. | |
| | 32 12 | 49 35 | h. — 1828, 1830 (5). | |
| | 32 16 | 50 10 | Bestimmt im April 1852. Sehr hell; durch dichten Dunst gesehn. . . . . . . . . . | 1 |
| | 32 14 | 49 ± | Ziemlich hell bei ganz dunstigem Himmel; Decl. nur geschätzt. . . . . . . . . . . . | 10 |
| | 32 17 | 50 ... | Recht hell, 100″ gross; sehr heller, runder Kern. | 66 |
| | 32 22 | 49 56 | Ausserordentlich hell, rund, hellerer Kern in der Mitte; über 1½′ im Diam. Die nach den früheren Beobachtungen zu vermuthende starke Bewegung in AR wird durch die gegenwärtige Beob. widerlegt. . . . . . . . . | 78 |
| Nova | 185 33 25 | +14 15 29 | Recht hell, ein Nebel erster Klasse, rund, 55″ Durchm., heller in der Mitte. Kern = • 10 Gr. Mehrere sehr feine •• folgen südlich. Dieser Nebel und der später folgende sind beträchtlich heller als viele Herschel'sche Nebel in dieser reichen Gegend; eine ältere Beob. finde ich nicht. . . . . . . . . . . . . . | 81 |
| | 33 18 | 15 28 | Recht hell, 45″ gross, rund mit hellerem Kerne. | 83 |
| 1296 | 185 49 26 | +13 15 35 | H. II. 123. — 1784 (2) »schwach«. | |
| | 35 21 | 9 17 | h. — 1826, 1830 (2). | |
| | 35 42 | 10 39 | Sehr schwach und klein; praecedirt H. II. 124 um 19ˢ37. . . . . . . . . . . . . | 74 |
| | 36 ... | 10 ... | Recht schwach, klein, doch ganz deutlich. Der erste und nördlichere von 2, Δ AR = 18ˢ5. . | 82 |
| | 35 47 | 10 53 | Sehr schwach und klein. Der Nebel II. 124 folgt 18ˢ7 und steht 78″ südlicher. . . . . . | 89 |
| Nova | 185 40 16 | +14 27 58 | Recht hell, ein Nebel erster Klasse. 50″ gross, rund, heller in der Mitte. • 11 Gr. praec. 24ˢ6 nahe im Parallel. Ort wegen Mangels an passenden Vergleichsternen nicht sehr zuverlässig; den Nebel späterhin häufig am Orte wiedergesehn. . . . . . . . . . . . . . | 81 |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| 1298 | 185 49 26 | +13 15 35 | H. II. 124. 1784 (2) »schwach«. | |
| | 40 11 | 8 37 | h. — 1826 bis 1830 (5). | |
| | 40 ... | 9 ... | Rund, ziemlich schwach und klein (25″). Der mittlere von 3 im Felde. . . . . . . . | 82 |
| | 40 32 | 9 44. | Leidlich hell, klein, rund. Nach Lage und Helligkeit der mittlere von 3 Nebeln im Gesichtsfelde. | 84 |
| | 40 27 | 9 33 | Schwach, doch immerhin gut erkennbar. . . | 89 |
| 1301 | 185 49 32 | +13 15 3 | Messier 87. 1781 März 18. | |
| | 48 24 | 12 40 | h. — 1826 bis 1830 (5). | |
| | 48 37 | 12 56 | Sehr hell, rund, 100″ im Durchm. mit beträchtlich hellerem Kerne. * 8 Gr. praec. $1^{s}0$ und steht 6′ nördlich. . . . . . . . . . . | 79 |
| | 48 39 | 13 14 | 1¼′ gross, rund, sehr hell mit Kern = * 9.10 Gr. * 8 Gr. folgt südlich $49^{s}73$ . . . . . . . | 82 |
| | 48 35 | 13 16 | Sehr hell, sehr gross, rund; hellerer Kern. * 8 Gr. steht 5¼′ nördlich fast in gleicher AR. Ein anderer * 8 Gr. folgt $50^{s}1$. . . . . . . . . | 84 |
| 1312 | 186 8 8 | +15 14 55 | Messier 88. 1781 März 18. | |
| | 6 4 | 15 12 | h. — 1826, 1832 (4). | |
| | 6 5 | 14 40: | Vorzüglich hell und gross, heller Kern, sehr länglich, 5′ lang, 1¼′ br. * 11 Gr. praec. nördl., duplex 10 Gr. folgt südlich. . . . . . . . | 84 |
| | 6 1 | 14 47 | Gross, hell, rund mit hellerem Kerne. * 11 Gr. steht 3¼′ nördl. . . . . . . . . . . | 92 |
| | 6 4 | 14 39 | Sehr hell in nächtlicher Dämmrung; zwischen 2 ** 10 Gr.; auffallend länglich, Positionsw. 143°, mit merklich hellerem, rundem Kerne. Den Nebel III. 78 = h. 1323 schwach wahrgenommen. . . . . . . . . . . . . . . | 94 |
| ... | 186 35 ... | + 8 14 ... | H. I. 31. Nicht gesehn bei sehr durchsichtiger Luft. Da William Herschel diesen Nebel sehr hell nennt, bin ich fast überzeugt, dass er mit I. 38 identisch ist, mit welchem nicht nur die Beschreibung übereinstimmt, sondern auch der Ort bis auf ¼° in Declination. . . . . . | 66 |
| | . . . . . . | . . . . . . | Ueberzeugt, dass kein Nebel, wie der beschriebene, hier befindlich ist; bestimmt identisch mit H. I. 38. . . . . . . . . . . . | 76 |
| 1329 | 186 36 50 | + 8 29 33 | H. I. 38. — 1784 (1). | |
| | 36 27 | 31 21 | h. — 1830 (3). | |
| | 36 31 | 31 28 | April 1852. Position sehr gut; Nebel hell, bei Beleuchtung sichtbar. Zwischen 2 ** 7.8 Gr. | 1 |
| | 36 36 | 31 41 | Sehr hell, länglich, 55″ im grössten Durchm., zwischen 2 ** 7 Gr. — * 12 Gr. in = AR steht 1¼′ südl. vom Nebel. . . . . . . | 66 |
| | 36 33 | 31 39 | Zwischen Piazzi XII. 118 und 127. Sehr hell, länglich, in der Mitte beträchtlich heller. * 13 Gr. steht 100″ südlich davon. . . . . . | 75 |
| 1332 | 186 39 7 | +42 10 24 | 8 β Canum venatic. 4 Gr.; Ort nach *Br. Ass. Cat.* Bei der Helligkeit des *'s wird mir der umgebende Nebel nicht mit Sicherheit wahrnehmbar. . . . . . . . . . . . | 93 |
| | s. flg. S. | | | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| ... | 186 39 36 | + 9 1 49 | H. II. 500. — 1785 (1), ausserdem nirgend bestimmt. | |
| | 40 27 | 2 10 | Ziemlich schwach, doch gut sichtbar; sehr gross, über 4′ Diam. * 10 Gr. folgt 49ˢ nahe im Parallel. Ort nur geschätzt aus H. I. 38. . . . | 66 |
| | 40 25 | 2 8 | Matt, rund, sehr verwaschen, mehr als 3′ gross, ohne Verdichtung in der Mitte. * 12 Gr. folgt 29ˢ etwas nördl. * 10.11 Gr. folgt südlich 49ˢ. | 76 |
| 1345 | 186 51 45 | +15 19 15 | H. II. 120. — | |
| | 58 6 | 19 33 | h. — 1826, 1832 (3). | |
| | 58 ± | 19 ± | Ziemlich hell, rund, 50″. * 10 Gr. praec. 27ˢ auf dem Parallel. * 11 Gr. folgt 28ˢ etwas nördl. | 84 |
| 1361 | 187 17 37 | + 8 5 49 | H. I. 32. — 1784 (4). | |
| | 18 47 | 4 15 | h. — 1827 bis 1830 (5). | |
| | 19 6 | 4 22 | Recht hell, klein, 23″ im Diam., rund. . . . | 76 |
| 1368 | 187 30 59 | +12 39 14 | Messier 58. 1779 April 15. | |
| | 31 51 | 38 25 | h. — 1825 bis 1830 (3). | |
| | 32 9 | 38 37 | Hell, rund, 80″ gross; langsam heller in der Mitte. * 8.9 Gr. Weisse XII. 495 praec. 30ˢ75 auf dem Parallel. Ort des *'s nach Bessel und Rümker (Nachtrag zu Hora XII). . . . . | 76 |
| | 32 20 | 38 41 | Sehr hell; keine Beschreibung. . . . . . | 89 |
| | 32 11 | 38 38 | Ziemlich schwach, ☾ störend (7 Tage alt); * 8.9 Gr. praec. 30ˢ78. . . . . . . . . . . | 90 |
| 1378 | 188 8 47 | +10 58 54 | H. I. 24. — 1784 (2). | |
| | 5 7 | 60 23 | h. — 1825 bis 1829 (5). | |
| | 5 ± | 60 ± | In heller Morgendämmrung gesehn; sehr ansehnlicher Nebel, 40″ im Durchm. 2 ** 10 Gr. folgen südlich in 4′ Entfernung, ρ Virginis folgt 3′ nördlich. . . . . . . . . . . . | 53 |
| 1386 | 188 35 8 | +12 29 12 | Messier 59. 1779 April 15. | |
| | 36 34 | 28 12 | h. — 1825 bis 1831 (3). | |
| | . . . . . . | . . . . . . | Hell, rund, mit Kern; Durchm. 35″; * 12 Gr. steht 2′ nördl. vom Nebel; * 11 Gr. praec. . . . | 82 |
| 1402 | 188 45 25 | +12 10 57 | H. II. 70. — 1784 (1). | |
| | 48 23: | 14 11 | h. — 1825 (1) »schwach«. | |
| | 48 40: | 14 36: | Klein, rund, leidlich hell. H's Declination ist in der That (vergl. h. 1402) 4′ zu klein; indessen ist die Identität dennoch wohl nicht zu bezweifeln. . . . . . . . . . . . | 82 |
| 1405 | 188 62 38 | +12 21 44 | H. III. 44. — 1784 (2) »sehr schwach, klein«. | |
| | 58 47 | 23 52 | h. — 1826 bis 1831 (4) »sehr schwach«. | |
| | 58 56 | 23 38 | Der nördlich vorangehende Begleiter von Mess. 60, Δ AR = 10ˢ; recht hell und ziemlich gross, länglich, erster Klasse (H. sehr schwach; h. sehr schwach, ziemlich gross). Entfernung vom hellen nachfolgenden Nebel 2½′. Ein schöner Doppelnebel, keine Bewegung. . . . | 82 |
| | 59 10 | 23 22 | Ziemlich hell, keineswegs III. Klasse; der Begleiter von h. 1408. Praecedirt etwa 9ˢ und steht | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | | | 50″ nördlicher. Beide Nebel liegen zwar theilweise übereinander, doch ist jeder vom andern deutlich gesondert. . . . . . . . . . | 95 |
| 1408 | 189 0 21 | +12 22 40 | Messier 60. 1779 April 15. — Oriani 1′31″, 22′20″. | |
| | 1 7 | 22 42 | h. — 1825 bis 1831 (6). | |
| | 1 18: | 22 40 | Ausgezeichnet hell, 2′ gr., rund mit sehr hellem Kerne. Ein sehr feiner * 13 Gr. folgt 6ˢ. Der vorangehende schwächere Nebel in 150″ Entf., Positionsw. 315° (dies ist III. 44). . . . . | 82 |
| | 1 34 | 22 32 | Gross, rund, sehr hell; Kern, ☾ hinderlich. . | 91 |
| | 1 35 | 22 23 | Sehr hell, gross, rund, mit vorleuchtendem Kerne. | 95 |
| 1510 | 195 29 36 | — 7 1 33 | H. I. 42. — 1784 (2). | |
| = | 28 10 | 2 27 | h. im Nordkat. 1828 (1); AR 20ˢ vergr. | |
| 3472 | 27 50 | 1 16 | h. im Südkat. 1836 (1). | |
| | 28 7 | 1 47 | Rund, ziemlich gross und hell. Der Bessel'sche * 8 Gr. W. XIII. 10 praec. 4ˢ2 und steht 185″ nördlich. . . . . . . . . . . . . | 88 |
| 1558 | 196 24 8 | +18 58 16 | Messier 53. 1777 Febr. 26. | |
| | 23 9 | 58 8 | h. — 1826, 1827 (5). | |
| | 23 ... | 58 ... | Ungemein heller Nebel, 3′ Durchm. kreisrund, bedeutend heller in der Mitte. Diam. in AR 14ˢ. 2 * * 10 Gr. folgen südlich in 9′ Entf. . . . | 82 |
| 1622 | 200 54 12 | +48 0 36 | Messier 51. 1774 Jan. 11 (entdeckt 1773). | |
| | 52 30 | 47 58 3 | h. — 1828 bis 1833 (6). | |
| | 53 28 | 57 59 | Sehr hell; grösser und heller als der 5ˢ95 später folg. Begleiter. Ein beträchtlich hellerer Kern. | 94 |
| 1623 | 200 55 39 | +48 1 40 | H. I. 186. — 1787 (2). | |
| | 54 46 | 2 1 | h. — 1828, 1831 (4). | |
| | 54 59 | 2 5 | Sehr hell, gross; beträchtlich heller in der Mitte; ist der zweite, schon von Messier erkannte Kern von h. 1622. — Abbildungen dieses und des vorhergehenden Nebels bei John Herschel und Lord Rosse (*Philos. Transact.* 1850). — Eine relative Ortsveränderung zeigt auch dieses Nebelpaar nicht an, wie folgende Messungen ergeben, welche die sämmtlich vorhandenen sein werden: | |
| | | | ΔAR. ΔDecl. Dist. Positionsw. | |
| | | | Messier 1774 ... ... 275″ ... | |
| | | | Sir J. Herschel 1830 7ˢ37 274″. 284 15° 6′ | |
| | | | Lord Rosse 1849 7,47 245 262 16 34 *) | |
| | | | Juni 1 1856 6,25 246 254 14 18 | 94 |
| 3523 | 202 9 51 | —29 5 51 | Lacaille's Position nach *Br. Ass. Cat.* 4544. — Aus der Ortsangabe in Lacaille's Abhandlung über die von ihm am Südhimmel entdeckten Nebelflecken (*Mém. de l'Acad.* 1755) finde ich dagegen die Position für 1850 | |
| | s. flg. S. | | AR 202° 10′ 49″ Decl. 29° 5′ 59″. | |

*) *Philos. Transact.* 1838 p. 442; 1850 p. 510.

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | 202 8 46 | −29 6 27 | h. — 1834, 1835 (4). Dunlop 628 hat 12$^m$ in AR weniger. | |
| | . . . . . . | . . . . . . | Sehr hell und gross trotz tiefen Standes . . | 88 |
| | 9 0 | 5 42 | Zu tief stehend; ∗ 7.8 Gr. Argelander folgt 78″ nördl. . . . . . . . . . . . . . . . | 89 |
| 1663 | 203 50 38 | +29 6 40 | Messier 3. 1764 Mai 3. | |
| | 48 17 | 8 4 | h. — 1827 — 1832 (5). | |
| | 49 14 | 8 17 | Laugier's Ort Nr. 42. 1848—1849. | |
| | 49 7 | 8 28 | Grosser, sehr heller, leicht auflöslicher ∗hauf. . | 2 |
| | 49 10: | 8 20: | Ausserordentlich heller, runder ∗hauf; ungemein reich, in eine Masse zusammengedrängt. Bringt man die helle Mitte hinter den Ring, so treten am Rande die einzelnen Sterne 12.13 . . . Gr. hervor. Ort nur genähert richtig. ∗ 9 Gr. praec. nördl. in 8′ Entf. . . . . . . . . . . . | 86 |
| | 49 18 | 8 21 | Ausserordentlich hell, 4′ gross; ein leicht auflöslicher Hauf zahlloser Sterne; in der Mitte zu einem einzigen Lichte von grosser Helligkeit zusammenlaufend. . . . . . . . . . . | 94 |
| 1746 | 209 39 38 | +29 13 59 | H. VI. 9. — 1784 (1). | |
| | 40 26 | 14 41 | h. — 1827, 1832 (2). | |
| | 40 9 | 15 18 | Eine matte, sehr grosse Lichtwolke, rund von gleichförmigem Lichte; Durchm. geschätzt 6′. Bei seitlichem Hinsehn blinken im Nebel ∗∗ 13 ... Gr. deutlich hervor. ∗ 7 Gr. folgt 6′ südlich. . . . . . . . . . . . . . . . | 76 |
| | 40 5 | 14 28 | Matt, sehr gross, etwa 5′ im Durchm., gleichförmig hell. ∗ 7 Gr. Rümker 4602 folgt 1$^m$ 31$^s$9. — Ort des Nebels sehr unsicher; einer von den wenigen Nebeln, deren Position sich nicht genau bestimmen lässt. . . . . . . . | 94 |
| 1779 | 213 10 31 | + 3 24 18 | H. I. 144. — 1786 (1). Decl. irrig. | |
| | 11 35 | 4 37 37 | h. — 1828, 1832 (3). | |
| | 11 51 | 37 38 | Nicht sehr hell, rund, etwa 30″ im Durchm., in der Mitte heller. ∗ 12 Gr. folgt im Parallel 7$^s$5. Bei h. ∗ 12 Gr. 1 Diam. des Nebels, also 40″, abstehend, nördl. folgend; ob eine Spur von eigener Bewegung? . . . . . . . . . | 76 |
| 1782 | 213 21 24 | + 3 57 20 | H. I. 145. — 1786 (1) Ort des nachf. Begleiters. | |
| | 20 27 | 55 51 | h. — 1828 (1). | |
| | 20 ... | 56 ... | Klein und ziemlich schwach; Nebel I. 146 folgt 8$^s$4 in 2′ Entf. Ort nicht beobachtet. . . . | 76 |
| 1783 | 213 22 42 | + 3 57 36 | H. I. 146. h's Position vom Jahre 1828. 1 Beob. | |
| | . . . . . . | . . . . . . | Klein, rund, sehr deutlich; ist der nördlich folgende, hellere von 2 Nebeln; ∗ 12 Gr. geht sehr nahe, etwas nördlich voran. . . . . . | 76 |
| 1813 | 215 27 7 | − 5 19 19 | H. I. 70. — 1775 (1). | |
| | 25 6 | 17 46 | h. — 1828 (1). | |
| | 25 59 | 18 26 | Heller Nebel (kugelförmiger Sternhauf), 4$^s$ im Diam. AR; steht zwischen 2 ∗∗; ∗ 8 Gr. folgt 6$^s$3 in Posit. 102°, ∗ 11 Gr. praec. vom Mittel— | |
| | s. flg. S. | | | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nachr. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | | | punkte des Nebels 110″ entfernt in Positionsw. 310°. . . . . . . . . . . . . . . . . | 76 |
| | 215 26 6 | − 5 18 22 | Hell und sehr ansehnlich. * 8 Gr. folgt südlich Δ AR = $5^{s}65$ Δ Decl. = 25″; * 11 Gr. praec. nördl. $5^{s}$; * 104 Virg. praec. $132^{s}1$. . . . . | 82 |
| | 26 8 | 18 23 | Hell, Diam. in AR $4^{s}5$; von bläulicher Farbe. * 8 Gr. seq. . . . . . . . . . . | 89 |
| 3576 | 217 39 43 | −25 50 26 | H. II. 196. — 1784 (1). | |
| | 43 39 | 53 3 | h. — 1834 (1). Die Annahme des I Fadens war, wie die nachfolgende Wiederbeobachtung zeigt, irrig; die Fadendistanz zur Verkleinerung der AR setzte ich $34^{s}6$. | |
| | 43 29 | 51 ± | Ziemlich hell trotz ☾ und Dämmrung; ist füglich in die erste Klasse zu rechnen. . . . . | 3 |
| 1857 | 218 7 22 | + 0 23 23 | H. I. 182. — 1787 (2). | |
| | 7 18 | 21 52 | h. — 1828 (1). | |
| | 9 45 | 21 37 | Im Ringmikrometer trotz des ☾scheins ziemlich deutlich zu erkennen. * 9 Gr. W. XIV. 627 folgt $1^{m}19^{s}32$; vielleicht ist des *'s AR in Zone 74 $10^{s}$ zu gross. . . . . . . . . . . | 3 |
| 1874 | 219 19 1 | + 2 36 13 | H. I. 126. — 1786 (1) »ausserordentlich hell«. | |
| | 19 44 | 35 32 | h. — 1828 (1) »ziemlich hell«. | |
| | 19 49 | 35 21 | Ein langer, ziemlich schmaler Nebelstreifen; keineswegs sehr hell. * 8.9 Gr. Lalande 26854 praec. nördlich in 4′ Entfern., Δ AR. = $9^{s}52$ Δ Decl. = 262″. . . . . . . . . . . | 89 |
| 1894 | 223 5 22 | + 2 31 4 | H. II. 539. — 1786 (1). | |
| | 5 50 | 29 35 | h. — 1828 (1). | |
| | 6 16 | 29 9 | Gross, doch recht schwach in der Dämmrung. * 9 Gr. Bessel praec. $2^{s}46$, 6′ südlich. . . | 93 |
| 3587 | 223 13 27 | − 6 51 11 | H. I. 71. — 1785 (2) »sehr klein«. | |
| | 14 3 | 51 17 | h. — 1835, 1836 (2). | |
| | 13 57 | 51 3 | Ziemlich gross, schwach, rund; * 10 Gr. folgt $27^{s}5$ etwas nördlich; * 7 Gr. *Br. Ass. Cat.* 4945 folgt $74^{s}05$. . . . . . . . . . . | 93 |
| 1896 | 223 23 14 | + 2 17 55 | H. I. 127. — 1786 (1). | |
| | 23 44 | 18 6 | h. — 1828 (1). | |
| | 23 44 | 17 48 | Ziemlich hell, 40″ im Durchm. Steht zwischen 2 ** 11 Gr. Δ AR = $9^{s}8$ und $11^{s}0$. . . . | 94 |
| | 23 37 | 17 43 | Schwach, etwa 55″ gross, rund; ist schwächer und kleiner als I. 128; zwischen 2 ** 11 Gr. Δ AR $9^{s}5$ und $11^{s}8$. . . . . . . . . | 97 |
| 1901 | 224 44 15 | + 2 11 46 | H. I. 128. — 1786 (1). | |
| | 43 16 | 11 37 | h. — 1828 (1). | |
| | 43 30: | 11 30: | Recht hell, rund, 45″ gross, heller in der Mitte; * 10 Gr. folgt $23^{s}$ auf dem Parallel. — Ort nicht sehr zuverlässig. . . . . . . . | 88 |
| | 43 29 | 11 28 | Ziemlich hell, klein, rund; * 10 Gr. folgt $23^{s}8$ auf dem Parallel. * 9 Gr. Bessel folgt $114^{s}$, und steht 67″ nördlicher. . . . . . . . | 93 |
| | s. fig. S. | | | |

| h. | Rectascension 1850. ° ' " | Declination 1850. ° ' " | Synonyma und Beschreibung | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | 224 43 29 | + 2 11 20 | Hell, rund, 35" gross. ☾. * 9 Gr. folgt 114s22; * 10.11 Gr. folgt 23s75. . . . . . . . . | 97 |
| 1904 | 225 7 57 | +19 0 38 | H. IV. 71. — 1791 (1). | |
| | 11 43 | 1 47 | h. Eine zweifelhafte Beob. v. J. 1831: AR 20s zu gross. | |
| | 6 49 | 1 ± | Im Meridian. * 6 Gr. . . . . . . . . . | 4 |
| | 6 55 | 1 27 | Ort nach Lalande und Bessel. Den Nebel um den * nicht wahrgenommen in sehr günstiger Nacht. | 81 |
| | 6 58 | 1 31 | Genaue Position * 7 Gr. Ich erkenne keinen Nebel unter den günstigsten Umständen. * 12 Gr. praec. nordl. in genau 2' Entf. * 8 Gr. folgt 55s25. . . . . . . . . . . . . . | 94 |
| 1916 | 227 43 42 | + 2 39 29 | Messier Nr. 5. 1764 Mai 23. | |
| | 44 13 | 39 3 | h. — 1828 (1). | |
| | 44 34 | 38 1 | Laugier's Ort Nr. 43. | |
| | 44 14: | 37 55 | Sehr heller, leicht auflöslicher Sternhauf, bei dunstigem Himmel. . . . . . . . . | 2 |
| | 44 32 | 38 11 | In heller Abenddämmrung, Ort gut. . . . . | 11 |
| | 44 39 | 38 3 | Diam. 2½'; mit Vergr. II leicht aufgelöst; * 11 Gr. praec. 7s in Positionsw. 237°. . . . . . | 16 |
| | 44 30 | . . . . . . | AR. gut; Decl. nicht beobachtet. . . . . | 17 |
| 1945 | 239 35 13 | + 8 30 14 | h. — 1830 (1). | |
| | 35 34 | 30 ± | Meridianbeob. * 6.7 Gr. . . . . . . | 4 |
| | 35 36 | 30 28 | Ort im Mittel nach Lalande und Bessel; den Nebel um * nicht erkannt. . . . . . . . | 82 |
| | 35 42 | 30 27 | * 7 Gr. Die Atmosphäre nicht wahrgenommen. * 8 Gr. Lalande 29263 (dessen Ort nach Bessel) praec. 1m 26s57. . . . . . . . . | [illegible] |
| 3624 | 242 1 32 | −22 36 5 | h. im Kapkataloge, 1835 und 1837 (2). | |
| | 1 32 | 36 9 | Sehr heller, grosser Sternhaufen. Kommt vor in Argelander's südl. Z. 386, AR. 6s zu gross, Decl. 35' 54". . . . . . . . . . | 3 |
| | 1 19 | 35 56 | Leicht auflöslicher, umfänglicher *hauf . . . . | 4 |
| | 1 31 | 35 58 | Durchmesser des helleren Theils 50". . . . . | 5 |
| ... | 243 36 42 | −26 9 46 | Lacaille's Ort nach *Br. Ass. Cat.* 5455. Aus der Position in Lacaille's Abhandlung (*Mem.* 1755) erhalte ich dagegen AR. 243° 37' 42", Decl. 26° 9' 51". | |
| | 35 4 | 8 41 | Messier Nr. 4. 1764 Mai 8. Kommt in h's Kapbeobachtungen nicht vor. | |
| | 36 ± | 10 ± | Bei ☾schein gesehn; zu schwach zur Beobacht. | 5 |
| | 35 56 | 9 52 | 3½' im Durchm., leicht in ** auflöslich. . . . | 8 |
| | 36 7 | 10 19 | Wenig verdichteter, heller Hauf zahlloser ** 11. 12...Gr.; den Diam. 4 bis 5' geschätzt; schlecht zu beobachten. . . . . . . . . . . . | 12 |
| | 36 18 | 9 37 | Schwach bei tiefem Stande; schwierige und unsichere Beobachtung. . . . . . . . | 14 |
| 3637 | 246 1 17 | −12 43 8 | H. VI. 40. — 1793 (1). Früher schon gesehn von Mechain im April 1782 (vergl. Bode's Jahrb. für 1786 S. 233); auch als neu wiederum angezeigt von Capocci (Astr. Nachr. Nr. 120). | |
| | s. flg. S. | | | |

| h. | Rectascension 1850. ° ′ ″ | Declination 1850. ° ′ ″ | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | 246 2 21 | —12 43 1 | h. im Südkatalog 1836 (1). | |
| | 1 55 | 44 1 | Cometenartig, 2′ im Durchm. ∗ 11 Gr. geht 15ˢ7 wenig nördl. voran; ∗ 12 Gr. in Positionsw. 195° steht 1 Diam. des Nebels vom nächsten Rande entfernt . . . . . . . . . . | 8 |
| | 2 ± | 44 ± | ∗ 11 Gr. praec. 14ˢ5, Posit. 301°; näher beim Nebel 2 ∗∗ 12 Gr. in Posit. 107° und 200°. Ein heller Nebel 1¾′ gross. Lalande 30076 folgt 41ˢ8. . . . . . . . . . . . . . . | 7 |
| 1970 | 249 33 3 | +24 4 57 | Von Struve entdeckter planetarischer Nebel. Ort der *Hist. Cél.* als einfacher Fixstern 8 Gr. Ist sogleich, auch bei schwacher Vergrösserung auffallend durch sein ruhiges, bläuliches Licht. Lalande 30510 beob. 1799. | 75 |
| | 32 3 | 4 39 | h. — Keine Position beob., Struve's genäherter Ort. | |
| | 33 8 | 4 58 | Sehr heller, kleiner planetarischer Nebelfleck = ∗ 8.9 Gr. Durchm. 6″. Doppelstern Σ 2094 7 Gr. praec. 20ˢ20; ∗ 13 Gr. geht etwas nördl. voran in 130″ Distanz. Ein anderer ∗ derselben Gr. folgt. . . . . . . . . . . | 76 |
| | 33 7 | 4 55 | Ein schöner planetarischer Nebel, 8″ Diam. = ∗ 8 Gr. von bläulichem Lichte. ∗ 12.13 Gr. geht nahe im Parall. 9ˢ voran. . . . . | 94 |
| | 33 6 | 4 59 | Gesehn wie früher; gute Position. . . . . | 95 |
| | 250 39 37 | +47 51 45 | H. IV. 50. — 1787 (1). Nicht bei h. vorkommend. | |
| | 42 3 | 49 36 | Argelander's Ort in Z. 4. — Planetarischer Nebel, am Orte gesehn, 80″ gross. . . . | 94 |
| | 44 35 | 49 35 | Eine kleine Nebelscheibe, hell = ∗ 9 Gr., umgeben von einer merklich schwächern Nebelhülle; kreisrund 1′ Diam. Ruhiges Licht, bläulich. ∗ 8 Gr. praec. 35ˢ61 und steht 63″ nördl. — Zwar nur Eine, doch anscheinend sichere Beobachtung. . . . . . . . . . . | 95 |
| | 44 29 | 49 38 | Planetarischer Nebel, sehr hell, in der Mitte = ∗ 9 Gr. ∗ 8 Gr. praec. 35ˢ21; 59″ nördl. | 97 |
| 1972 | 252 19 35 | — 3 49 46 | Messier Nr. 10. 1764 Mai 29. | |
| = | 18 54 | 51 45 | h. im Nordkat. 1827, 1828 aus 2 Beob. | |
| 3659 | 19 8 | 50 38 | h. im Südkat. 1835 (1). | |
| | 18 55 | 51 40 | Laugier's Ort. Nr. 45. | |
| | 18 59 | 50 43 | Sehr grosser und heller ∗hauf, leicht auflöslich. | 2 |
| | 18 55 | 50 59 | Ein glänzender Sternhauf, die grössten ∗∗ darin 10.11 Gr. Diam. in AR. 12ˢ. . . . . . | 8 |
| | 18 51 | 50 45 | In der Dämmrung matt, sehr gross, nicht sehr verdichtet in der Mitte. Durchm. in AR. 14ˢ. ∗ 11.12 Gr. Positionsw. 5° nahe am Nordrande des Haufs. . . . . . . . . . . . . | 11 |
| 3661 | 252 55 54 | —29 52 42 | Messier 62. 1779 Juni 4. | |
| | 55 8 | 52 50 | h. im Kapkatal. 1834 bis 1837 (5); ist = Dunlop 627 mit sehr geringer Uebereinstimmung der Position. | |
| | s. fig. S. | | | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | 252 54 31 | −29 53 19 | Argelander's Ort in Zone 389. — Vorzüglich hell trotz starker Morgendämmrung, 3′ Durchm. rund, bei sehr tiefem Stande cometenartig. . | 76 |
| | 54 53 | 53 9 | Vorzüglich heller, kugelförmiger Sternhauf; beträchtlich heller in der Mitte. ∗ 9 Gr. (Argelander Z. 389 Nr. 49) folgt $2^m 45^s 8$, 84″ nördl. | 95 |
| | 54 59 | 53 2 | Sehr hell, rund, in der Mitte beträchtlich heller; 3′ Diam. ∗ 13 Gr. steht 3′ südl. und folgt wenige Zeitsekunden in AR.; ∗ 9 Gr. folgt $165^s 38$. | 97 |
| 1975 | 253 11 53 | −26 2 21 | Messier 19. 1764 Juni 5. | |
| = | 20 12 | 1 56 | h. im Nordkat. 1828 (1). | |
| 3663 | 20 40 | 2 47 | h. im Südkat. 1834 (2). | |
| | 20 ... | 2 ... | Sternhaufen, 2½′ im Durchm., nicht rund, Sterne nicht heller als 11 Gr. . . . . . . . . | 7 |
| | 20 26 | 3 1 | Diameter in AR. $13^s$. . . . . . . . . . | 11 |
| | 20 19 | 2 52 | Sehr hell und gross. ∗ 11 Gr. praec. $31^s 3$ etwa 3½′ südlich. . . . . . . . . . . | 12 |
| 1976 | 253 52 5 | −24 34 19 | H. VI. 11. — 1784 (1). | |
| | 50 3 | 32 45 | h. — 1826 (1). | |
| | 50 ± | 33 ± | Klein, ziemlich hell, nahe rund, fast wie auflöslich. . . . . . . . . . . . . . | 7 |
| | ...... | ...... | Nicht sehr hell, klein, Durchm. 40″; Sterne ... Gr. durchblinkend; kein Ort beobachtet. . | 11 |
| 1977 | 255 16 24 | −26 24 40 | H. VI. 12. — 1784 (1). Ist nicht = h. 3730. | |
| | 12 29 | : 21 54 | h. — 1828 (1). | |
| | 13 10: | 23 10: | Rund, Durchm. 50″; ∗ 10.11 Gr. folgt $26^s 5$. Den schwachen Begleiter vermuthet in Positionsw. 150° (?) . . . . . . . . . . | 7 |
| | 13 11 | 23 18 | Ziemlich hell; ∗ 11 Gr. folgt $26^s 6$ im Parallel. Den Begleiter sehe ich nicht mit Bestimmtheit bei sehr klarem Himmel. . . . . . . . | 11 |
| | 12 58 | 23 7 | Nicht sehr hell; ∗ 11 Gr. folgt $26^s$ im Par. — Begleiter? . . . . . . . . . . . . . | 12 |
| | 12 57 | 23 13 | Ziemlich schwach; den nachfolgenden Nebel h. 1978 nicht erkannt. ∗ 11.12 Gr. folgt $26^s 6$ im Parallel. . . . . . . . . . . . | 14 |
| 3670 | 256 15 49 | −29 17 14 | H. I. 147. — 1786 (1). | |
| | 15 30 | 16 35 | h. — 1834 (2). | |
| | 15 ... | 16 ... | Anscheinend ein sehr gedrängter Sternhaufen, doch sind Sterne nicht erkennbar. ∗ 13 Gr. in Positionsw. 172° steht 1½ Durchm. des Nebels vom Mittelpunkte entfernt. — Durchm. in AR. = $5^s$. (Nachfolgende Nacht: ∗ 11 Gr. folgt $25^s 6$ und steht 2′ nördl.). . . . . . . . | 6 |
| ... | 258 2 17 | −19 24 32 | H. I. 149. — 1786 (1). Nicht bei h. vorkommend. | |
| | 4 29 | 25 27: | Sehr schwach, 40″ gross; ∗ 7.8 Gr. Argelander folgt $85^s 7$ und steht etwa 2′ südlicher . . . | 94 |
| 3683 | 258 40 49 | −17 39 45 | H. I. 48. — 1784 (1). | |
| | 42 4 | 39 50 | h. — 1836 (1). | |
| | 42 42 | 39 53 | Hell, rund, 56″ im Durchm. ∗ 8.9 Gr. Argel. praec. $10^s 12$. . . . . . . . . . . . . | 94 |
| | s. flg. S. | | | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | 258 42 37 | —17 39 56 | Sehr hell, rund, 40″ gr., etwas heller in der Mitte. * 13 Gr. praec. a. d. Par. 9ˢ8; * 9 Gr. Argelander praec. 9ˢ77. . . . . . . . . . | 97 |
| 1991 | 268 21 49 | —23 0 19 | Messier Nr. 20. 1764 Juni 5. | |
| = | 19 16 | 1 11 | Lalande 32971, ohne Grössenangabe oder Beschreibung. | |
| 3718 | | | | |
| | 18 30 | 0 58 | h. — 1826bis1830(4). H. IV. 41 gibt 19′49″, 0′56″. | |
| | 19 38 | 1 39 | h. — 1835, 1837 (2). | |
| | 19 21 | 1 22 | Argelander's Ort * 8 Gr. in Z. 224, ohne Bemerk. | |
| | 19 30 | 1 17 | Ort des Doppelsterns 8 Gr. im „dreispaltigen" Nebel. Im Ringmikrometer ist ein schwacher aber ausgedehnter Nebel um den hellen Stern deutlich erkennbar; die eigentliche Gestalt desselben lässt sich indessen, trotz der Bekanntschaft mit der Zeichnung in den Kapbeobachtungen nicht auffassen. Bei stärkeren Vergrösserungen verschwindet der Nebel vollständig. . . . . . . . . . | 95 |
| 3720 | 268 27 53 | —30 2 10 | H. I. 49. — 1784 (1). | |
| | 29 40 | 1 31 | h. Südkatalog 1834, 1837 (2). | |
| | 30 ± | 1 ± | 60″ im Durchm. Ziemlich hell bei tiefem Stande; durch Wolken an der Beobachtung gehindert. | 11 |
| | 268 37 9 | —24 23 ... | Vorangehender Lichtknoten vom Nebel h. 3722; ein sehr kenntlicher Nebel, bei stärkeren Vergrösserungen unzweifelhaft ein Sternhauf; Beobachtung der Declination verhindern Wolken. Diameter 1½ bis ¾′. . . . . . . . . | 19 |
| 3722 | 268 40 16 | —24 21 26 | Nebelstern 7 Gr. Lacaille 1752. | |
| | 48 8 | 22 6 | Messier Nr. 8. 1764 Mai 23. | |
| | 46 21 | 27 16 | H. V. 9. — 1784 (1). Der nachfolg. Lichtknoten. | |
| | 40 8 | 21 34 | Lalande. Position der *Hist. Cél.* beobachtet 1800 Juni 30. | |
| | 40 17 | 21 16 | h. im Südkatalog 1834 (2). | |
| | 40 11 | 21 27 | Argelander nach 2 Beob. der südl. Zonen. Um den * selbst kann ich keinen Nebel erkennen; dagegen zeigt sich im Fraunhofer sehr deutlich der vorangehende lichte Knoten und eine südlich nachfolgende helle Stelle; gegen den * 7 Gr. $\Delta$AR. = + 3′, $\Delta$ Decl. = — 5¼′. . | 19 |
| | 40 13 | 21 29 | Ort des Sterns 7 Gr. Nebel gesehn wie früher; sehr hell. . . . . . . . . . . . | 96 |
| 3725 | 268 52 19 | —24 20 1 | h. im Südkat. | |
| | 48 33 | 23 5 | Hellster * 9 Gr. im Innern eines grossen, hellen, zerstreuten Haufens. Folgt nach wiederholter Beobachtung 33ˢ45 auf * 7 Gr. . . . . . . | 19 |
| 2000 | 271 12 21 | + 6 49 20 | Nach 2 Beob. von Bessel, als * 8.9 Gr. ohne Bemerkung. | |
| | 12 9 | 48 58 | h. — 1828, 1830 (2). | |
| | 12 18 | 49 18 | Von Struve zuerst erkannter planetarischer Nebel, ein * 8.9 Gr., dessen Diameter mit Vergr. II sehr deutlich hervortritt. Mit schwa- | |
| | s. flg. S. | | | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | | | cher Vergrösserung nicht von einem Fixstern 8 bis 9 Gr. zu unterscheiden, gleicht dies Object mit starker Vergrösserung gesehn einem sehr kleinen, äusserst hellen, höchst zusammengedrängten Sternhaufen oder Nebelflecke. Ein Begleiter ist bis zur 12. Gr. herab nicht wahrzunehmen. Verglichen mit ∗ Weisse XVIII. 92 hat man zum Beweise für die unverrückte Stellung dieses Nebels: ΔAR. 14ˢ36 ΔDecl. 29″6 Bessel 1822 u. 1823; 14,50 . . . J. Herschel 1830; 14,47 32,4 im Jahre 1855. | 8 |
| | 271 12 17 | + 6 19 22 | Schon im Ringmikrometer einigermaassen von andern ∗∗ 8.9 Gr. unterschieden; einem äusserst kleinen, sehr hellen Nebelflecke ähnlich. Ein schöner planetarischer Nebel; ∗ 9 Gr. folgt 14ˢ45, 30″ nördlich. . . . . . . . | 9 |
| | 12 18 | 19 18 | Planetarischer Nebel (Struve Nr. 6) Durchmesser mit ♃ verglichen = ¼ ♃ = 6″. ∗ 9 Gr. folgt 14ˢ4. Am 6. Oct. 1855 fand Hr. Bruhns nach brieflicher Mittheilung, am grossen Refractor der Berliner Sternwarte, die Unterschiede mit dem nachfolgenden Sterne 14ˢ24 und 27″6. Wegen des Aussehns dieses merkwürdigen Gegenstandes vergl. auch P. Secchi in Nr. 1018 der Astron. Nachr. . . . . . . . . . . | 11 |
| 2008 | 272 59 50 | −16 13 33 | Messier Nr. 18. 1764 Juni 3. | |
| | 59 12 | 15 6 | h. — 1826 bis 1831 (5). | |
| | 273 0 ... | 14 ... | Ein heller, gerader Lichtstreifen, 8′ lang, 1½′ breit, Positionsw. 128°; nördlich von der Mitte am hellsten. Den schwächeren Zweig, den Sir J. Herschel und Lamont abbilden, nicht gesehn. — Bei späterm oftmaligem Wiedersehn dieses Nebels wurde mitunter eine Spur der gekrümmten Fortsetzung erkannt, so in 16, 18. . . . . . . . . . . . | 12 |
| | 1 28 | 13 16 | Gerader, unauflöslicher Nebelstreif; sehr hell, 8′ lang, 1½′ br., Position 116° (Nacht 15 lang 9′, breit 2′). . . . . . . . . . . . | 13 |
| | 1 34 | 13 34 | Ort verhältnissmässig sehr gut. Milchichter Nebelstreif, 9′ lg., 2′ br.; den hellsten Knoten beobachtet. ∗ 6 Gr. praec. 35ˢ7. . . . . . | 18 |
| | 1 42 | 13 28 | Die schlecht zu fixirende hellste Stelle folgt 9ˢ7 auf ∗ 10 Gr. und steht fast 1′ südlicher. . . | 21 |
| 2010 | 273 48 18 | −24 58 45 | Messier Nr. 28. 1764 Juli 27. | |
| = | 49 38 | 57 3 | h. — Nordkat. 1826 (1). | |
| 3743 | 49 36 | 56 36 | h. — Südkat. 1834 (1). | |
| | 50 7 | 56 26 | Laugier's Ort Nr. 46. | |
| | 49 51 | 56 11 | Ein kleiner, compacter, recht heller Sternhaufen 1½′ im Durchm. . . . . . . . . . | 17 |
| | 49 46 | 56 29 | Trotz etwas dunstigen Himmels recht heller, ziemlich umfänglicher Sternhauf; Diam. in AR. 7ˢ. | 18 |
| | s. flg. S. | | | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | 273 50 ± | −24 56 ± | Tief und schwach; wenig voran, 3½′ südlich geht * 10 Gr. Ein unbestimmter * 8 Gr. folgt etwas nördlich 169ˢ98. . . . . . . . . . . | 21 |
| | 49 36 | 56 35 | Tiefstehend doch hell; muss bei hohem Stande äusserst hell sein. . . . . . . . . . | 26 |
| 3748 | 275 28 46 | −25 42 25 | H. I. 51. — 1784 (1). | |
| | 24 54 | 35 20 | h. im Südkat. gleichfalls nur 1 Beob. vom Jahre 1834. | |
| | 24 55 | 35 41 | Ziemlich hell (nach h's Beschreibung sollte der Nebel beträchtlich schwächer sein), rund, 1½′ Diam. * 10 Gr. praec. in 4′ Entfernung; * nördlich nach dem Manuskript, dies ist aber nach Aussage der Beob. 30 und 31 irrig. | 28 |
| | 24 54 | 35 32 | Nicht sehr hell, 60″ Durchm. in der Abenddämmrung. * 10 Gr. geht wenig voran südl. stehend. | 30 |
| | 24 56 | 35 29 | Leidlich hell, merklich heller in der Mitte; Durchm. in AR. 4ˢ. 3½′ südl. praec. * 10.11 Gr. | 31 |
| 2012 | 275 45 8 | −23 35 27 | H. II. 205. — 1784 (1). | |
| = | 41 45 | 34 13 | h. im Nordkat. 1826, 1828 (2). | |
| 3749 | 42 18 | 34 43 | h. im Südkat. 1837 (1). | |
| | 41 25: | 34 30: | Ein kleiner, schwacher Nebel, 40″ gr. * 12 Gr. Positionsw. 355° in 2 bis 3 Durchmesser Entfernung vom Nebel. . . . . . . . . | 7 |
| | 41 21 | 34 36 | Ziemlich schwach und klein, Diam. 35″; * 11. 12 Gr. praec. nördl. Posit. 345°. . . . . | 12 |
| | 41 16 | 34 21 | Schwach und klein, bei schönem Himmel nur schwierig zu erkennen. Durchm. 45″; * 11. 12 Gr. geht nördl. voran. . . . . . . | 14 |
| 2015 = 3753 | 276 48 56 | −23 1 31 | Lacaille nach *Br. Ass. Cat.* 6326; aus Lacaille's Ortsangabe (*Mém.* 1755) würde folgen: AR. 276° 49′ 30″ Decl. 23° 1′ 33″. | |
| | 47 0 | 1 20 | Messier Nr. 22. 1764 Juni 5. | |
| | 48 21 | 0 27 | h. im Nordkatalog 1826, 1830 (2). | |
| | 49 24 | 1 24 | h. im Südkatalog 1834, 1837 (2). | |
| | 48 20: | 0 30: | Sehr grosser, zerstreuter Sternhauf mit Ansätzen oder Ausläufern. . . . . . . . . . | 7 |
| | 48 20 | 0 0: | Diam. in AR. 22ˢ, Sterne von 11.12...Gr., ganz leicht auflöslich. Declin. schlecht . . . . | 12 |
| | 48 21 | 1 4 | Diam. in AR. 23ˢ; die Sterne des Haufens 12 Gr. | 13 |
| | 48 13 | 1 1 | Durchm. in AR. 24ˢ. Viele Sterne 11.12 Gr. über diesen sehr reichen Haufen verstreut. Die vorhandenen Daten widersprechen, wie man sieht, J. Herschel's Vermuthung einer eigenen Bewegung bei diesem Sternhaufen. . . . . . | 14 |
| 2019 | 280 46 18 | − 6 26 22 | Messier Nr. 11. 1764 Mai 30. | |
| | 46 15 | 26 50 | h. — 1827 (2). | |
| | 46 12 | 27 7 | Laugier's Ort Nr. 47. | |
| | 46 12 | 26 24 | Schöner, heller und sehr leicht auflöslicher Sternhaufen; die Sterne 10.11...Gr. Nahe am nördl. folgenden Rande innerhalb des Haufens * 9 Gr., dessen Ort beobachtet. . . . . . . . | 8 |
| | s. flg. S. | | | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ' " | ° ' " | | |
| | 280 46 25 | — 6 26 20 | Mit Vergr. II zerfällt der Sternhauf in deutlich gesonderte Gruppen mit leeren Zwischenräumen. Ein * 9 Gr. folgt 15ˢ5 auf den Ostrand, Durchm. des ganzen Haufens 23ˢ. Den * 9 Gr. im Haufen selbst beobachtet. . . . . . . | 15 |
| | 46 17 | 26 23 | Ort ziemlich gut; den Sternhaufen gesehen wie früher. . . . . . . . . . . . . | 16 |
| 3762 | 281 12 49 | — 8 51 35 | H. I. 47. — 1784 (1). | |
| | 14 6 | 52 53 | h. im Südkatalog 1835 (1). | |
| | 12 56 | 53 37 | Cometenartig — keine Beschreibung. . . . | 3 |
| | 12 52 | 52 54 | Nicht sehr heller, cometenartiger Nebel von 50" Diam. * 9.10 Gr. folgt 19ˢ, 1' nördlich. . . | 13 |
| | 13 20 | 53 13 | Recht hell, Durchmesser 85"; zeigt keine Andeutung von Auflöslichkeit in **; * 9 Gr. folgt 19ˢ3 etwas nördl. . . . . . . . . . | 15 |
| ... | 285 53 37 | + 0 46 19 | Beobachtet Mai 1852. Durchm. 3' von der Helligkeit der Nebel erster Klasse (Decl.?) Siehe die Anm. S. 299. . . . . . . . . . . . | 1 |
| | 53 37 | . . . . . . | Ziemlich hell, 70" Diam. (dunstiger Himmel). Beobachtung der Decl. durch Wolken verhindert. . . . . . . . . . . . . | 20 |
| | 53 43 | 47 15 | Ziemlich matt und verwaschen; 2½ Durchm. Verglichen mit * Weisse XIX. 33. . . . . . | 24 |
| | 53 19 | 47 8 | Matt, Durchm. wohl 2', ☾ störend. Vergl. mit * Weisse XIX. 40; der heutige Vergleichstern differirt von dem in Nacht 24. . . . . . . | 26 |
| | 53 38 | 47 4 | Mattes Licht, gross; Diam. in AR. 8ˢ5. Vermuthlich ein feiner Sternhauf. Die heutige Position aus 2 Vergleichsternen. . . . . . . . | 28 |
| 2036 | 287 41 30 | +29 55 19 | Messier 56. 1779 Jan. 23. | |
| | 40 56 | 55 14 | h. — 1825 bis 1829 (6). | |
| | 41 0: | 55 15 | Heller, fast runder Sternhaufen, 2½' gr. * 10 Gr. praec. 11ˢ7 auf dem Parallel. . . . . . | 18 |
| | 40 58 | 55 12 | Schöner, grosser und heller Nebel, heller in der Mitte. Durchm. mehr als 2'; * 9.10 Gr. praec. 11ˢ auf dem Parallel . . . . . . . . . | 30 |
| | 40 55 | 55 8 | Ansehnlich reicher und gedrängter Haufen, 2' gross; geht am Rande zuletzt in einzelne feine Sterne über. . . . . . . . . . . | 31 |
| | 40 53 | 55 21 | Hell, 90" im Durchm. heller in der Mitte. * 10 Gr. praec. 11ˢ65. . . . . . . . . . . | 32 |
| 3798 | 292 37 56 | —31 17 3 | Lacaille nach *Br. Ass. Cat.* 6725, während ich aus Lacaille's eigener Position in seiner Abhandlung über die südlichen Nebelflecken erhalte:<br>AR. 292° 38' 45" Decl. 31° 16' 48". | |
| | 38 41 | 17 30 | Messier 55. — 1778 Juli 24. | |
| | 37 28 | 17 7 | h. im Südkatalog 1834, 1835 (2). Ist Dunlop 620; letztere Position wiederum in beiden Coordinaten fehlerhaft (um 28' und 5'). | |
| | 36 33 | 17 30: | Ein heller und grosser Sternhaufen, anscheinend | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | | | leicht auflöslich, ohne Verdichtung zur Mitte hin, durchaus gleichförmig erleuchtet; Diam. 5 bis 6′; in AR. 26ˢ. . . . . . . . . . | 38 |
| | 292 36 19 | —31 17 57 | 5′ grosser, ziemlich heller ∗haufen, ohne merkliche Condensation im Centrum. Zu genauer Beob. zu tief stehend. Eigene Bewegung? . | 39 |
| 2047 | 293 51 12 | —14 31 10 | H. IV. 51 — 1787 (2). | |
| | 52 18 | 30 19 | h. — 1826 bis 1831 (3). | |
| | 52 30: | 30 20: | Planetarischer Nebel = ∗ 8 Gr. Im Ringmikrometer sogleich kenntlich. Mit Vergr. II Durchm. 10″, der Herschel'sche Begleiter nicht sichtb.; mit Vergr. V äusserst schwach vermuthet in Positionsw. 330° u. 95° (?). Beide Sternchen gewiss unter der 12 Gr. — dunst. Himmel. | 18 |
| | 52 31 | 30 19 | Planetarischer Nebelfleck = ∗ 8.9 Gr. mit deutlich wahrnehmbarem Durchmesser. ∗ 11 Gr. praec. im Parallel 52ˢ. . . . . . . . . | 28 |
| | 52 31 | 30 22 | Schöner planetar. Nebel; gesehn wie in früheren Nächten. Die beiden Begleiter erkannt in ihren seit Sir John's Beobachtungen unveränderten Stellungen, der eine praec. der andere folgt, beide nördlich, ∗∗ 13 Gr. ∗ 9 Gr. Weisse XIX. 925 folgt auf den Nebel 30ˢ24 und steht 4′23″ südlich. . . . | 30 |
| 2051 | 295 44 11 | + 7 30 22 | H. VIII. 73. — 1788 (1). | |
| | 45 12 | 32 7 | h. — 1827 (2). | |
| | 45 11 | 31 46 | Nicht bemerkenswerth; Ort eines ∗'s 6 Gr. nach Lalande. ∗ 8.9 Gr. praec. 15ˢ. . . . . . . | 18 |
| | 45 10 | 31 51 | ∗ 7 Gr. in einem meist nachfolg., lichtschwachen und armen Haufen. ∗ 8 Gr. praec. 14ˢ71. . | 19 |
| | 45 8 | 31 52 | Ort gut, hellster ∗ eines unbedeutenden Sternhaufens. ∗ 8 Gr. praec. 14ˢ63 und steht 182″ südlicher. . . . . . . . . . . . . | 22 |
| 2056 | 296 45 53 | +18 23 57 | Messier Nr. 71. 1780 nach Beob. von Messier und Méchain. | |
| | 45 31 | 23 31 | h. — 1827, 1831 (3). | |
| | 46 15: | 23 30: | Ziemlich schwach bei aufgehendem Monde; ein feiner Sternhaufen, 3′ gr. und nicht kreisrund. | 18 |
| | 46 38 | 23 42 | Ansehnlich heller ∗hauf, 2 bis 3′ gross, nicht rund und wegen der am Rande zerstreuten ∗∗ schlecht zu beobachten. . . . . . . . . | 30 |
| | 46 26 | 23 31 | Grosser, auflöslicher Hauf sehr kleiner Sterne, 3..4′ im Durchm. Die einzelnen Sterne am Rande sind 11.12 Gr. . . . . . . . | 31 |
| | 46 10 | 23 46 | 3′ Diam., ein reicher, heller Sternhaufen; am Rande einzelne ∗∗ sehr zerstreut. . . . . | 32 |
| | 46 24 | 23 29 | 180″ Diam. Recht hell; ∗ 10.11 Gr. praec. 1′50″ südl. Sir William Herschel's Beschreibung in *Philos. Transact.* 1818. . . . . . . . | 37 |
| 2060 | 298 16 59 | +22 17 20 | Messier 27. 1764 Juli 12. | |
| | 15 52 | 18 38 | h. — 1827 bis 1830 (4). | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | 298 16 20 | +22 17 49 | Laugier's Ort Nr. 49. | |
| | 16 50: | 19 0: | Doppelnebel im Fuchs. Mittelpunkt der Figur beob.; Position der Mittellinie durch beide Nebel 35° geschätzt. — Der Nebel 5′ gr., Diam. in AR. 19$^s$. Es folgt ∗ 9 Gr. 38$^s$ (?) auf dem Parallel; kleine ∗∗ vor dem Nebel und in unmittelbarer Nähe sichtbar. . . . . . . | 18 |
| | 16 52 | 19 18 | Position der Kerne 38°, Distanz 2¼′; Gesammtdurchmesser = 6′, in AR. 21$^s$4 . . . . | 19 |
| | 16 41 | 18 57 | Ort des Mittelpunkts der Figur. Laugier's Ort kann wohl nur für den südl. praecedirenden, etwas helleren Kern gelten; siehe die folgd. Anm. . . . . . . . . . . . . | 20 |
| | 16 43 | 19 0: | Centrum beob. durch Wolken; Decl. nur geschätzt. Wegen des ungewöhnlich starken Declinationsunterschiedes mit Laugier bemerke ich, dass der vorangehende Kopf wenige Sekunden südlicher steht, als ∗ Rümker 7884, der nachfolgende Kopf dagegen beträchtlich nördlicher als ∗ Rümker 7900 (Aug. 1855). . | 21 |

Anmerk. Beobachtungen der relativen Lage beider Nebelmassen lasse ich folgen, obgleich freilich keine Spur einer Aenderung angedeutet ist, und die Beobachtungen, weil keine eigentlichen Kerne vorhanden sind, stark hin und herschwanken.

| ΔAR. | ΔDecl. | Posit. | Dist. | Nacht. | Beob. | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 76″ | 137″ | 27°10′ | 154″ | 20 | 3 | Ziemlich gut. |
| 80: | . . . | . . . | . . . | 21 | 1 | Schlecht. |
| 49 | . . . | . . . | . . . | 23 | 2 | Leidlich. |
| 63 | 118 | 26 17 | 132 | 27 | 3 | Sehr gut. |
| 71 | 109 | 31 4 | 127 | 28 | 5 | Sehr gut. |

Für die Mitte von 1855 wird hiernach nahezu richtig sein 69″ 117″ 28°37′ 133″. h. macht den Positionswinkel im Mittel 30° 42′.

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| 2064 | 299 18 56 | −22 21 3 | Messier 75. 1780 im Mittel nach den Beob. von Messier und Méchain. | |
| | 18 26 | 20 31 | h. — 1830, 1831 (3). | |
| | 18 20: | 20 40: | Kleiner, runder, sehr heller Nebel. ∗ 9 Gr. praec. auf dem Parallel 73$^s$. ∗ 11 Gr. Posit. 135° Distanz 225″ geschätzt. . . . . . . . | 15 |
| | 18 23 | 20 33 | Klein und hell. ∗ 9 Gr. praec. nahe auf dem Parallel 72$^s$55. . . . . . . . . . . | 27 |
| | 18 20 | 20 45 | Heller, kleiner Nebelfleck, in der Mitte wie zu einem ∗ 8.9 Gr. verdichtet. . . . . . . | 28 |
| | 18 16 | 20 44 | Gesehn wie in den früheren Nächten. . . . | 30 |
| 2071 | 301 19 37 | +26 0 50 | H. VIII. 20. — 1784 (1). | |
| | 25 30 | 2 19 | h. — 1828 (1). | |
| | 25 49 | 2 2 | Ort nach Lalande und Bessel. ∗ 6 Gr. mit 30 bis 40 ∗∗ 10 bis 12 Gr. auf weitem Raume; nicht bemerkenswerth. . . . . . . | 16 |

s. flg. S.

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | 301 25 52 | +26 2 ± | Meridianbeobachtung, ohne Beschreibung. . . | 36 |
| | 25 50 | 2 5 | Ort nach *Br. Ass. Cat.* Gesehn, ein unbedeutender Milchstrassenhauf, nicht bemerkenswerther als zahlreiche andere Stellen. . . . . . | 17 |
| 2073 | 303 46 25 | −19 47 10 | h. — 1830 (3). | |
| | . . . . . . | . . . . . . | Den Nebel am Stern mit ermüdetem Auge nur vermuthet; ** sehr matt. . . . . . . . | 19 |
| 2075 | 303 55 49 | +19 36 10 | H. IV. 16. — 1784 (2). | |
| | 55 17 | 37 45 | h. — 1827, 1831 (3). | |
| | 55 ... | 37 ... | Ziemlich lichtschwacher planetarischer Nebelfleck. Gesehn und in sehr naher Uebereinstimmung gefunden mit einer Zeichnung, die nach Sir J. Herschel's exacten Angaben über die Position des Nebels zwischen 3 kleinen, benachbarten ** entworfen war. Dieser Nebel hat sich seit 30 Jahren bestimmt nicht nachweisbar bewegt; Lamont vermuthete im Jahre 1837 das Gegentheil (vergl. *Ueber die Nebelflecken* in den Abh. der K. Bayerischen Akad. 1837 S. 29). . . . . . . . . . | 14 |
| | 55 16 | 37 31 | Erscheint im Ansehn abweichend von den übrigen planetar. Nebelflecken. Nicht sehr schwach. Ort etwas unsicher wegen der kleinen, sehr benachbarten ** . . . . . . . . . . | 28 |
| | 55 21 | 37 39 | Klein aber ziemlich hell, 25″ Diam., rund und durchaus gleichförmig hell; erscheint in der That wie eine Nebelscheibe. . . . . . | 30 |
| 2081 | 306 31 14 | + 7 14 23 | H. I. 103. — 1785 (1). | |
| | 42 36 | 6 54 15 | h. — 1830 (3). | |
| | 42 35: | 53 50: | Gedrängter, kugelförmiger Hauf. Diam. 40″; * 9 Gr. praec. 7ˢ1 im Parallel (h. im Jahre 1830...7ˢ5), also unverändert. . . . . . | 15 |
| | 42 33 | 53 47 | Recht hell bei ☾schein; * 9 Gr. praec. 6ˢ8 auf dem Parallel. . . . . . . . . . . . | 26 |
| | 42 41 | 53 42 | Klein (?) rund, hell. * 8.9 Gr. geht 1½ Diam. des Nebels voran im Parallel. . . . . . . | 27 |
| | 42 42 | 53 53 | Leidlich hell und gross; in der Mitte nicht beträchtlich heller. Diese letztere Bemerkung finde ich neuerdings bestätigt durch P. Secchi in Nr. 1018 der Astr. Nachr.; in der That bietet der Nebel, bei sehr schwacher Vergrösserung, fast das Ansehn eines planetarischen. (Juni 1856). . . . . . . . . | 28 |
| 2090 | 311 18 12 | −13 5 59 | Messier 72. — 1780 Oct. 4; im Mittel nach Messier und Méchain. | |
| | 17 59 | 5 52 | h. — 1825 bis 1831 (3). | |
| | 18 8 | 5 46 | Schwacher Nebel; * 9 Gr. folgt in Positionsw. 117°; * 10.11 Gr. folgt im Parallel 24ˢ. . . | 15 |
| | . . . . . . | . . . . . . | Sehr schwach bei aufgehendem ☾. * 9.10 Gr. folgt 18ˢ5 in Posit. 122°; * 11 Gr. folgt 24ˢ6 auf dem Parallel. . . . . . . . . . | 17 |
| | s. flg. S. | | | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | 311 18 12 | −13 5 32 | Ein ziemlich lichtschwacher Nebel; * 9.10 Gr. folgt 19$^s$, etwa 1′ südlich; * 11 Gr. seq. im Parallel 24$^s$. . . . . . . . . . . . . | 19 |
| | 18 7 | 5 40 | Schwach, 45″ im Durchm. * 11 Gr. folgt im Parallel 23$^s$. . . . . . . . . . . . . | 23 |
| ... | 312 40 19 | −13 13 6 | Messier 73. 1780 Oct. 4. | |
| | 40 47 | 12 51 | Kleines, unbedeutendes Sternhäufchen; den südlichsten, hellsten * darin beobachtet. Ein unbestimmter * 8.9 Gr. praec. 52$^s$17 und steht 104″ nördlicher. . . . . . . . . . . | 19 |
| | 40 43 | 12 49 | Drei ** 10, 10.11 und 11 Gr. mit etwas Nebel. Hellsten * beob. . . . . . . . . . . | 23 |
| | 40 46 | 12 56 | Kleiner, armer Haufen von ** 11.12 Gr. Etwas Nebel. . . . . . . . . . . . . . | 25 |
| ... | 313 25 41 | −13 28 5 | Ein ähnlicher kleiner Sternhaufen, wie der vorige; in der Nähe von M. 73, scheint gleichfalls neblig. . . . . . . . . . . . . . | 25 |
| 2097 | 313 36 56 | +15 33 33 | H. I. 52. — 1784 (4). | |
| | 38 0: | 35 47 | h. — 1825 (1). | |
| | 37 13 | 36 25 | Recht schwach, 40″ Diam. * 8.9 Gr. folgt 85$^s$9 fast 2′ nördl. . . . . . . . . . . | 19 |
| | 37 12 | 36 17 | Kleiner, runder, doch deutlich erkennbarer Nebelfleck. Durchm. 30″ geschätzt. . . . . . | 24 |
| | 37 4 | 36 25 | ☾ störend, doch der Nebel ziemlich gut sichtbar. Diam. 27″. . . . . . . . . . . . | 26 |
| 2098 | 314 0 26 | −11 56 55 | H. IV. 1. — 1782 (11). | |
| | 313 59 58 | 57 22 | Lalande, beob. in den Jahren 1794 und 1800 als * 7.8 Gr. ohne Bemerkung wegen des beträchtlichen Durchmessers. | |
| | 59 37 | 57 28 | h. — 1825 bis 1831 (4). | |
| | 314 0 11 | 57 15 | Laugier Nr. 50. 1848, 1849. | |
| | 0 14 | 57 16 | Heller planetarischer Nebel in blauem Lichte = * 7 Gr. Deutlich elliptische Scheibe, deren grösster Durchm. im Parallel = 1 2 = 11″ (vermuthlich zu klein). . . . . . | 15 |
| | ...... | ...... | Zufällig im Ringmikrometer gefunden; auffallend durch seinen Diam., doch in hellem Fixsternlichte, Wolken hindern an der Ortsbestimmung. Durchm. 8″ (wohl wiederum zu klein). . . | 17 |
| | 0 9 | 57 3 | Planetarischer Nebel = * 7.8 Gr. * ν Aquar. folgt 324$^s$55. . . . . . . . . . . . | 18 |
| | 0 2 | 57 11 | Gesehn wie sonst. Praecedirt ν Aquar. 325$^s$04. | 19 |
| | 0 5 | 57 12 | Ort gut; ν Aquar. folgt 324$^s$84. — Struve, Lamont und neuerdings Secchi machen den Aequatorealdurchmesser übereinstimmend 25″ gross; von solcher Grösse zeigt ihn ein sechsfüssiges Fernrohr bestimmt nicht; h. gibt indessen in einer Beob. gleichfalls nur 10 bis 12″. Die Abbildungen von diesem oft betrachteten Gegenstande bei J. Herschel, Lamont und Lord Rosse weichen untereinander ausserordentlich ab. | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| 2102 | 314 15 30 | +29 19 58 | H. II. 203. — 1784 (2). Beim Vergleichsterne ist in den *Philos. Transact.* 1786 p. 478 statt 65 Cygni zu lesen 64 Cygni. | |
| | 18 22 | 18 7 | h. — 1828 (2). | |
| | . . . . . . | . . . . . . | Nicht gefunden in den Nächten 15, 27 (☾ hinderlich) und 30. | |
| | 18 9 | 18 23 | Recht schwach, 20″ gross. ∗ 10 Gr. 1½′ nördlich nahe auf dem Stundenkreise. . . . . . | 28 |
| | 18 16 | 18 27 | Schwach; ∗ 10.11 Gr. praec. 1½′ nördlich, Posit. 345° geschätzt. . . . . . . . . | 31 |
| | 18 1 | 18 38 | Klein und recht schwach, Diam. 30″. ∗ 10 Gr. praec. in 1½′ Entf. Im Mittel aus 9 Beob. folgt ∗ 9 Gr. 20ʰ 54ᵐ 57ˢ in Bessel's Zone 306 . . 33ˢ57 und steht 289″ nördlich. . . . . . | 32 |
| 2120 | 320 42 16 | +11 32 0 | Messier 15. 1764 Juni 3.; Decl. vorher ½° vergrössert. | |
| | 40 14 | 30 51 | h. — 1825 (2). | |
| | 40 54 | 30 43 | Laugier Nr. 51. | |
| | 41 17 | 30 47 | Ort nach 2 in AR. von einander abweichenden Beob. der *Hist. Cél.* — Diam. 3′; ∗ 9.10 Gr. folgt 29ˢ, 2′ südl. ∗ 8 Gr. folgt 11ˢ und steht 6′ nördl. — h's ∗ 8 Gr. 30ˢ folgend im Parallel fehlt am Himmel. . . . . . . . . . | 16 |
| | 40 55 | 30 46 | Ausserordentlich hell = ∗ 7 Gr., rund, 3½′ Durchmesser. . . . . . . . . . . . . . | 19 |
| | 40 48 | 30 54 | Der helle Pegasusnebel, gesehn in starker Morgendämmrung. Position zuverlässig. . . | 14 |
| | 40 50 | 30 52 | Glänzender Sternhauf, 3′ gross. ∗ 8 Gr. Lalande 41818 folgt nördl. in 7½′ Entf. . . . . . | 18 |
| 2125 | 321 26 4 | — 1 23 51 | Messier Nr. 2. 1760 Sept. 11. | |
| | 25 25 | 29 1 | h. — 1827, 1830 (3). | |
| | 25 55 | 28 54 | Laugier's Ort Nr. 52. | |
| | 25 41 | 29 21 | Ort der *Hist. Cél.* Zwischen Wolken ausserordentlich hell. Durchm. 130 bis 140″. Mit Vergr. II deutlich als ungemein reicher, gedrängter Sternhauf erkennbar. . . . . . | 17 |
| | 25 40 | 29 20 | Diam. fast 3′; erst mit Vergr. V deutl. aufgelöst. | 18 |
| | 25 43 | 29 19 | Ausserordentlich hell = ∗ 6.7 Gr. Im Positionsw. 47° in 5′ Entfernung folgt ∗ 10 Gr. Durchm. des runden, kugelförmigen Haufs über 3′, in AR. = 13ˢ. . . . . . . . . . . . | 19 |
| | 25 55 | 29 20 | Mehr als 180″ gross; in der Mitte hell = ∗ 7 Gr. ∗ 10 Gr. folgt Posit. 46°, Distanz 4½′. . . . | 25 |
| 2128 | 322 59 38 | —23 56 27 | Messier Nr. 30. 1764 Aug. 3. Decl. irrig. | |
| = | 57 31 | 50 6 | h. im Nordkatalog. 1830 (1). Diam. 6′ (?) | |
| 3878 | 58 31 | 51 19 | h. im Südkatalog. 1834 (1). | |
| | 57 23 | 51 9: | Ein glänzender, äusserst zusammengedrängter Sternhauf; die von Sir J. Herschel gesehenen Ausläufer oder Ansätze A und B an ihrem Orte mit Vergr. V deutlich erkennbar. ∗ 9 Gr. geht nahe auf dem Parallel 25ˢ3 voran. Decl. etwas unsicher. . . . . . . . . . . . . | 18 |
| | s. flg. S. | | | |

| h. | Rectascension 1830. | Declination 1830. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | 322 57 21 | −23 51 15 | Recht hell, Durchm. 85″. . . . . . . . . | 19 |
| | 57 22 | 51 28 | Sehr hell, 90″ gross; die merkwürdigen Ausläufer sogar im Ringmikrometer wahrnehmbar. | 24 |
| | 57 21 | 51 25 | Hell, 1½′ im Diam. bei starkem ☾scheine; muss selbst im Vollmonde gut sichtbar sein. * 9 Gr. praec. $25^s22$. . . . . . . . . . . | 36 |
| 2139 | 328 15 7 | +17 3 56 | H. II. 247. — 1784 (1). | |
| | 21 53 | 0 59 | h. — 1825, 1827 (3); mit Ausschluss zweier als unsicher bezeichneten AR. kommt 328°22′52″, so dass die Vermuthung eigener Bewegung nicht statthaft erscheint. | |
| | 22 51 | 1 27 | Ziemlich hell und gut sichtbar, 35″ gr. * 11 Gr. steht etwa 80″ südlich. . . . . . . . | 31 |
| | 22 59 | 1 23 | Ort gut, Beschreibung fehlt. . . . . . . | 32 |
| | 22 52 | 1 8 | Ziemlich hell, 30″ Diam. * 11 Gr. geht südlich vorher in 1½′ Entfernung. . . . . . . | 37 |
| | 23 2 | 1 13 | Ein kleiner, lichtschwacher Nebel. In dieser Nacht mit andern ** als früher verglichen; gute Beob. . . . . . . . . . . . | 38 |
| 2149 | 330 20 49 | +30 39 51 | H. II. 207. — 1784 (1). | |
| | 17 4 | 36 28 | h. — 1829 (1). | |
| | 17 23 | 37 42 | Ziemlich grosser (45″) recht heller, runder Nebel — nicht zweiter Klasse. * 10 Gr. folgt $13^s2$ und steht 90″ südlicher. . . . . . . . | 39 |
| | 17 21 | 37 41 | Leidlich hell, 40″ Diam. * 10 Gr. folgt $13^s7$, 82″ südl.; * 9 Gr. (Bessel's Zone 327) praec. $1^m38^s37$, 14′13″ südl. . . . . . . . | 40 |
| | 17 25 | 37 37 | Hell, 1′ gross; ein Nebel erster Klasse; in der Mitte verdichtet zu * 11 Gr. * 10 Gr. seq. $13^s2$, 73″ südl. * 9 Gr. praec. $98^s64$. . . | 42 |
| 2150 | 330 30 ... | −17 22 ... | H. II. 897. Vergebens gesucht Nacht 19 (dunstig); nicht mit Sicherheit erkannt in 39, 41, 42. | |
| ... | 330 50 ... | −21 33 ... | Als neu von Capocci angezeigt Astr. Nachr. Nr. 120. Diesen sonst nirgend beobachteten Nebel habe ich in den theilweise recht günstigen Nächten 24, 41, 42 vergebens gesucht; ich vermuthe deshalb die AR. sei $10^m$ zu gross, und der Nebel identisch mit H. II. 1 = h. 2143. Ort und Beschreibung stimmen unter dieser Annahme. | |
| 2172 | 337 32 12 | +33 29 12 | H. I. 53. — 1784 (2). | |
| | 33 0 | 37 24 | h. — 1827 (1). | |
| | 33 14 | 38 20 | Laugier's Ort Nr. 53. | |
| | 33 15: | 38 20: | Hell, 50″ im grössten Durchm.; in der Mitte beträchtlich heller, unverkennbar länglich. Den nachf. Nebel III. 166 nicht wahrgenommen. | 31 |
| | 33 23 | 38 24 | Klein und leidlich hell; kaum 40″ im Durchm. * 9.10 Gr. aus Bessel's Zone 377 praec. $1^m37^s37$. . . . . . . . . . . . . | 38 |
| | 33 19 s. flg. S. | 38 19 | 50″ gross, recht hell, in der Mitte heller, fast *artig verdichtet. 2 ** 10 Gr. folgen etwas | |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nachl. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| | | | nördlich; * 9.10 Gr. praec. 1ᵐ 37ˢ11. Der Nebel H. III. 166 ist bestimmt nicht wahrnehmbar. . . . . . . . . . . . . | 39 |
| | 337 33 6: | +33 38 23 | Recht hell, durch starken Dunst gesehn, deutlich länglich. Eintretender Trübung wegen nur 1 Durchgang beob. . . . . . . . . . . | 40 |
| | 33 18 | . . . . . . | Gesehn, hell, langgestreckt 40″. Decl. nicht beob. | 41 |
| 2173 | 337 33 25 | +22 58 17 | H. II. 233. — 1784 (3). | |
| | 33 52 | 23 1 19 | h. — 1828, 1830 (2). | |
| | 33 47 | 1 25 | Ziemlich schwach und klein, länglich, in der Mitte = * 10.11 Gr. * 10 Gr. steht 2′ südl. * Rümker 10444 folgt 9ˢ69, 726″ nördl. Den benachbarten Nebel II. 234 vergebens gesucht . . | 41 |
| | 33 53 | 1 22 | Kleiner aber recht deutlicher Nebel, 30″ gross. * 10.11 Gr. folgt sehr nahe, 2′ südl.; * 8.9 Gr. folgt 9ˢ26. . . . . . . . . . . . | 42 |
| | 33 52 | 1 23 | Schwach, 30″ lang, nicht rund. * 10 Gr. folgt südl. in 120″ Entfernung. . . . . . . | 43 |
| 2199 | 343 10 2 | +15 7 49 | H. II. 251. — 1784 (1). | |
| | 9 33 | 10 35 | h. — 1825, 1828 (2). | |
| | 9 15 | 10 45 | Zwar klein aber ziemlich hell. * 10 Gr. praec. nördl. 15ˢ0; * 9.10 Gr. folgt im Parallel 12ˢ1. | 33 |
| | 9 16 | 10 57 | Kleiner, schwacher Nebel. * 9.10 Gr. folgt 11ˢ8 auf dem Parallel. . . . . . . . . . | 34 |
| | 9 14 | 10 50: | Ziemlich schwach, ☾ aufgegangen. * 10 Gr. folgt 11ˢ6; * 9 Gr. folgt 100ˢ02. AR. gut, Decl. ganz zweifelhaft. . . . . . . . . . . | 38 |
| | 9 6 | 10 30 | Sehr schwach, 25 bis 30″ im Durchm. Der Nebel praec. * 10 Gr. 11ˢ4 und steht 14″ nördlicher; * 8.9 Gr. seq. 100ˢ65. . . . . . . . | 41 |
| ... | 343 25 0 | +15 34 51 | H. II. 249. — 1784 (2). Nicht bei h. vorkommend. | |
| | 24 49 | 35 15 | Schwach doch deutlich erkennbar, nicht klein. Steht ganz nahe neben einem nördl. vorangehenden * 10 Gr. . . . . . . . . . | 31 |
| | 24 56 | 34 59 | Nur bisweilen sichtbar; ein äusserst schwacher Nebel, von dessen Vorhandensein ich mich heute nur schwer überzeuge. * 10 Gr. praec. 2ˢ und steht ½′ nördl. vom Nebel. . . . . | 32 |
| | 25 1 | 35 10 | Nebel, im Ringmikrometer schwach, kometenartig; * 10 Gr. praec. 2ˢ7 und steht 20″ nördl. | 33 |
| 2201 | 343 25 41 | +29 20 24 | H. II. 242. — 1784 (1). | |
| | 27 14 | 20 14 | h. — 1828 (1). | |
| | 27 15 | 20 3 | Nicht hell, aber ziemlich gross. Der Nebel steht zwischen 2 kleinen **, und bildet ein fast rechtwinkl. △ mit 2 nachfolgenden Sternen 9.10 Gr.; der Nebel nahe auf dem Parallel des südlicheren von beiden. . . . . . . . | 31 |
| | 27 20 | 19 54 | Recht schwach; es folgen 2 ** 9.10 Gr. in demselben Stundenkreise. * 11 Gr. steht 1½′ südl. vom Nebel. . . . . . . . . . . . | 33 |
| | 27 5 | 20 11 | Schwach, 35″ gross; es folgen 3 ** im Dreieck. | 34 |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| 2202 und 2203 | 343 27 ... | +15 9 ... | H. III. 210 und 211. Beide Nebel glaube ich am Orte gesehn zu haben (der zweite folgt südl.), doch sind sie zur Beobachtung auch bei durchsichtiger Luft zu lichtschwach. . . . . . | 31 |
| 2205 | 344 22 33 | +11 31 12 | H. I. 55. — 1784 (3). »Ansehnlich hell«. | |
| | 21 32 | 30 53 | h. — 1825, 1830 (1). »Ziemlich hell«. | |
| | 21 17 | 31 15 | Schwach, kein Nebel I. Klasse; bei guter Luft kaum zu beobachten; erscheint etwa 1′ gross, mehr rund als länglich. • 6.7 Gr. praec. südlich 70ˢ53. . . . . . . . . . . . . | 24 |
| | 21 21 | 31 1 | Ueber 1′ gross; der schwächste im Fraunhofer noch zu beobachtende Nebel, bestimmt nicht erster Klasse. • 7 Gr. praec. 70ˢ78. . . . | 25 |
| | 21 20: | 31 10: | Ort nur geschätzt; äusserst schwach aber ziemlich gross. ☾ störend. Abgebildet in Lord Rosse's Abhandlung (1850) Fig. 4. . . . . | 27 |
| Nova? | 348 23 49 | +15 44 20: | Ein leidlich heller Nebel, 30″ gross; in der Mitte wie zu einem • verdichtet. Declin. nur geschätzt. . . . . . . . . . . . . | 42 |
| | 23 60 | 44 20: | Ziemlich hell, $1\frac{1}{2}$′ Diam. AR. gut. Irrthümlich an Stelle des nicht wahrnehmbaren Nebels H. II. 250. = h. 2232 beobachtet. . . . . . | 50 |
| | 23 62 | 44 17 | Hell, klein, 35″ Durchm., in der Mitte sternartig verdichtet. • 7.8 Gr. praec. $3^m 19^s56$ fast im Parallel. . . . . . . . . . . . . | 51 |
| | 23 54 | 44 20 | Gut sichtbar, • 10 Gr. praec. südlich. Möglicherweise ein feiner Sternhaufen mit Nebel, — eine frühere Beob. ist mir nicht bekannt. . . . | 58 |
| 2241 | 349 24 51 | +41 40 43 | H. IV. 18. — 1784 (4). | |
| | 40 16 | 42 44 | h. — 1828, 1829 (5). | |
| | 40 33 | 42 37 | Heller planetarischer Nebel = • 8 Gr. 20″ im Durchm., bläuliches, ruhiges Licht, wie es alle planetarischen Nebelflecke, die ich gesehn habe, zeigen. Der Herschel'sche »Begleiter«, ein äusserst feines Sternchen 13 Gr., folgt $1\frac{1}{2}$ Diam. etwas nördlich, und hat also seine Stellung seit 1829 nicht geändert. — Position aus 2 Beob. der *Hist. Cél.*, als einfacher • 8 und 8.9 Gr. Beob. 1793 und 1799. | 33 |
| | 40 29 | 42 32 | Gesehn wie Nacht 33. • 8.9 Gr. folgt 44ˢ47 und steht 1′24″ nördlich vom Nebel. . . . . | 34 |
| | 40 37 | 42 35 | Durchmesser = 8″ (wohl zu klein) aus Vergleichung mit ♃; Vergr. V. — Bei schwacher Vergrösserung durchaus nicht zu unterscheiden von einem • 8 Gr. Lalande hat △AR. mit dem nachfolgenden • 8.9 Gr. 44ˢ35, im Mittel aus allen Durchgängen finde ich 44ˢ,19, also auch hier keine Aenderung. — Abbildung bei Lord Rosse; wegen der Beschreibung vergl. auch Lamont *Ueber die Nebelflecken* p. 29 und Pater Secchi in den *Astronomischen Nachrichten* Bd. 43, p. 159. . . . . . . . . | 37 |

| h. | Rectascension 1850. | Declination 1850. | Synonyma und Beschreibung. | Nacht. |
|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | | |
| 2212 | 349 55 59 | +11 37 57 | H. III. 226. — 1784 (2) sehr schwach. | |
| | 56 10 | 38 8 | h. — 1825, 1830 (4). | |
| | 56 ... | 38 . . | Klein, rund, sehr schwach. * 10.11 Gr. geht unmittelbar vorher. * 8 Gr. folgt 42ˢ92 nahe im Parallel. Ort nicht sehr genau, es wurde dunstig. . . . . . . . . . . . . . . | 42 |
| | 56 ... | 38 ... | Nicht klein, doch schwer zu erkennen. * 8.9 Gr. folgt 93ˢ6; darauf tritt * 5 Gr. q Pegasi ins Feld. . . . . . . . . . . . . . . . | 50 |
| | 56 ... | 38 ... | Klein, schwach. * 10 Gr. praec. unmittelbar. * 9.10 Gr. folgt 12ˢ nahe im Parallel. . . . | 51 |
| | 56 ... | 38 ... | Schwach; * 10 Gr. praec. ¼ Zeitsekunde, und steht 1′ südlich, nicht im Parallel, wie bei h. Die mit diesem Nebel verglichenen Sterne bleiben später noch zu bestimmen. . . . . | 58 |

## Bemerkung, die Eigenbewegung der Nebelflecken betreffend.

Während des Abdrucks vorstehender Beobachtungen habe ich noch auf einem andern Wege, als dem in der Einleitung eingeschlagenen, eine Bestätigung der dort gegebenen Resultate über den Grad der Genauigkeit in den Positionen erhalten. Zugleich liess sich dabei eine obere Gränze festsetzen, welche die durchschnittliche, jährliche Ortsveränderung der Nebelflecken keinenfalls überschreiten kann — ***non datur ultra.***

Der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Position in Sir J. Herschel's Nordkataloge kann nach S. 304 gesetzt werden in Rectasc. 15″, in Declin. 19″5. Vergleicht man die Oerter aller in jenem Verzeichnisse nur Einmal beobachteten Nebel mit den wenige Jahre später am Kap der Guten Hoffnung gleichfalls nur durch eine einzelne Beobachtung wiederbestimmten Positionen derselben Objekte, so findet man

| | Nebel | Quadratsumme der Unterschiede |
|---|---|---|
| in Rectasc. | 47 | 33504 |
| in Declin. | 48 | 78651 |

und hieraus, unter Voraussetzung **gleicher** Güte beider Beobachtungsreihen, wiederum den wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen Beobachtung

in Rectasc. ... 12″73, in Declin. ... 19″31.

Die sich hier zeigende, wenig erhebliche Verkleinerung der Fehler bestätigt nebenher die Vermuthung, dass die Oerter des Südkataloges die genaueren sind. Um so zuversichtlicher kann man aber bei der früher bestimmten Fehlergränze stehn bleiben.

Nach einer Abschätzung kommen nun auf die 2306 Objekte in h's Nordkataloge 3300 einzelne Beobachtungen; es sind mithin durchschnittlich 1,43 Beobachtungen für jeden Ort vorhanden. Hält man sich bei Vergleichung mit den gegenwärtig neubestimmten Positionen nur an diejenigen Nebel, welche sich bei runder oder ovaler Gestalt und geringem Durchmesser gut beobachten lassen, und von denen im Vorstehenden wenigstens drei Beobachtungen vorkommen, so kann man den wahrscheinlichen Fehler eines definitiven Ortes, was die beobachteten Differenzen von den Sternen angeht, nicht über 4″ in jeder Coordinate setzen. Ferner sind den meist von Bessel und Argelander entlehnten Vergleichungssternen die folgenden Fehler beizulegen:

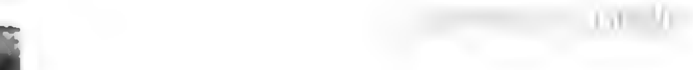
| | | | |
|---|---|---|---|
| den Bessel'schen | in Rectasc. 2″3, | in Decl. 1″4 | (W. Struve *Introd. in Cat. Regiom.* p. III et XI) |
| den Argelander'schen „ | „ 2,1 | „ „ 1,2 | (Bonner Beob. Bd. II p. XLIII et XLVI). |

Damit wird der wahrscheinliche Fehler eines im Mittel aus den Resultaten dreier Nächte bestimmten Ortes bei mir auf resp. 4″57 und 4″20 steigen. Bei 105 wirklich angestellten Vergleichungen sollte demnach die Quadratsumme der Abweichungen betragen

$$\text{in Rectasc.} \ldots 105.\{6{,}77^2 + 18{,}60^2\} = 41138$$
$$\text{in Declin.} \ldots 105.\{6{,}24^2 + 24{,}18^2\} = 65479$$

wogegen die ausgeführte Summation der Quadrate resp. 60077 und 70925 ergiebt. Die auf diese Weise ermittelten Unterschiede enthalten den grösstmöglichen Einfluss der eigenen Bewegungen. Vergrössert könnte derselbe nur werden durch eine, gewiss unstatthafte, kleinere Annahme über die den Positionen anhaftenden wahrscheinlichen Fehler.

Es folgt hieraus, dass der wahrscheinliche Betrag der jährlichen relativen Bewegung der Nebelflecken gegen das Fixsternsystem, gemessen im Bogen des grössten Kreises, jedenfalls geringer ist als 0″411.



## Nachweis der Beobachtungsnächte nebst Angabe der Luftbeschaffenheit.

| Nr. der Nacht. | Datum. | Zustand der Luft. |
|---|---|---|
| | 1852. | |
| 1 | April... | . . . . . . |
| | 1855. | |
| 2 | Mai 18 | Dunstig. |
| 3 | Mai 21 | Sehr klar, ☾. |
| 4 | Mai 23 | Sehr klar. |
| 5 | Mai 24 | Durchsichtig. |
| 6 | Juni 6 | Aeusserst durchsichtig. |
| 7 | Juni 7 | Sehr gute Luft. |
| 8 | Juni 8 | Gut; im tiefen Süd dunstig. |
| 9 | Juni 13 | Klar, bald darauf Sturm u. Gewitter. |
| 10 | Juni 15 | Dunstig. |
| 11 | Juni 17 | Gute Luft. |
| 12 | Juni 18 | Sehr günstig. |
| 13 | Juli 12 | Dunst, bald trübe. |
| 14 | Juli 13 | Gute Luft. |
| 15 | Juli 14 | Gut und durchsichtig. |
| 16 | Juli 19 | Sehr klar, zuletzt dunstig. |
| 17 | Aug. 3 | Anfangs äusserst durchsichtig, später ☾ und Wolken. |
| 18 | Aug. 6 | Ziemlich gut; nach Mitternacht dunstig und ☾. |
| 19 | Aug. 11 | Gut; im Süd nur matt gestirnt. |
| 20 | Aug. 16 | Nur theilweise hell. |
| 21 | Aug. 18 | Zuerst zwischen Wolken; bald darauf ganz trübe. |
| 22 | Aug. 20 | Dunstiger Himmel. |
| 23 | Aug. 21 | Dunstig, bald trübe. |
| 24 | Aug. 22 | Vorzüglich helle Nacht. |
| 25 | Aug. 23 | Desgleichen. |
| 26 | Sept. 1 | Gut, aufgehender ☾. |
| 27 | Sept. 4 | Etwas dunstig, ☾ noch störend. |
| 28 | Sept. 7 | Ungewöhnlich schöner Himmel. |
| 29 | Sept. 7 | 2. Reihe. Vortreffliche Luft. |
| 30 | Sept. 8 | Sehr gute Luftbeschaffenheit. |
| 31 | Sept. 10 | Klar und durchsichtig. |
| | 1855. | |
| 32 | Sept. 12 | Anfangs gut, dann dunstig und wolkig. |
| 33 | Sept. 18 | Gute Luft. |
| 34 | Sept. 19 | Sehr gut; gegen Morgen wolkig. |
| 35 | Sept. 22 | Durchsichtig, ☾ untergeg., bald darauf dunstig. |
| 36 | Sept. 28 | Schön, aber stürmisch und heller ☾. |
| 37 | Sept. 30 | Ziemlich gut, ☾ störend. |
| 38 | Oct. 1 | Gute Luft, ☾. |
| 39 | Oct. 7 | Nur ziemlich durchsichtig, bald trübe. |
| 40 | Oct. 8 | Dunstig, bald trübe. |
| 41 | Oct. 16 | Etwas dunstig. |
| 42 | Oct. 17 | Anfangs gut, bald unruhig und trübe. |
| 43 | Oct. 30 | In Wolkenlücken recht durchsichtig. |
| 44 | Nov. 3 | Um Mitternacht kurze Zeit recht ruhig und hell. |
| 45 | Nov. 8 | Sehr durchsichtig. |
| 46 | Nov. 9 | Dunstig. |
| 47 | Nov. 10 | Nicht recht hell. |
| 48 | Nov. 20 | Klar und ruhig. |
| 49 | Dec. 2 | Stürmisch und leicht bezogen. |
| 50 | Dec. 3 | Sehr klar bei eisiger Luft (—12° R.). |
| 51 | Dec. 6 | Kurze Zeit klar; nicht schön. |
| 52 | Dec. 11 | Sehr klar, eisig. |
| 53 | Dec. 17 | Morgens vorzügliche Luft. |
| 54 | Dec. 19 | Abends sehr klar, ☾ störend. |
| 55 | Dec. 19 | 2. Reihe Morgens, recht duchsichtig (—13° R.). |
| 56 | Dec. 27 | ☾, dunstig, Wind. |
| 57 | Dec. 28 | Nicht recht hell; Luft unruhig. |
| 58 | Dec. 29 | Vortrefflich. |
| 59 | Dec. 30 | Gut, doch bald trübe. |

grossen Nebel vereinigt. Die Sternhaufen *(clusters of stars)* sind enthalten, je nach den Graden der Verdichtung oder Zerstreutheit, in denen sich die Sterne darin befinden, in den Klassen sechs, sieben und acht.

An Stelle dieser Eintheilung, welche während zwanzigjähriger Beobachtungen auf natürlichstem Wege entstanden war, setzte H. späterhin. in der Abhandlung vom Jahre 1802, eine andere, systematische in zwölf Klassen, die man auch wohl die philosophische Eintheilung der Nebel genannt hat. Indessen möchte es für die Zwecke des Beobachters immerhin von Wichtigkeit sein, wenigstens für die älteren Nebel (diese bilden am Nordhimmel bei Weitem die grösste Mehrzahl,) an der ursprünglichen Eintheilung in die genannten acht Klassen festzuhalten, weil dieselbe, schon durch Benennung der Nebel nach ihrer Klasse, ein meist zutreffendes Bild der Objekte, die einfachst mögliche Beschreibung derselben gewährt. Der Durchführung einer dritten, kürzlich vorgeschlagenen Klassification der Nebelflecken*) müsste wenigstens eine wiederholte Durchsicht der gesammten Objekte an beiden Hemisphären vorhergehen, welche viele Jahre in Anspruch nehmen dürfte, nur mit ausserordentlichen Instrumenten auszuführen wäre, und deshalb wohl nicht nahe bevorstehend ist.

Wie unzugänglich die aus den alten Herschel'schen Beobachtungen folgenden Positionen bisher selbst der kleinen Anzahl Derjenigen gewesen sind, welche diesem Zweige der Sideralastronomie ihr Interesse zuwendeten, kann füglich der Umstand beweisen, dass man aus einem nicht langen Zeitraume wenigstens vier Fälle namhaft machen könnte, in welchen sich die Anzeige von angeblich neuen Nebelflecken oder von einem neuentdeckten Kometen, auf das Auffinden eines Herschel'schen Nebelflecks zurückführen lässt. Meines Wissens ist überhaupt keine Reduction jener Herschel'schen Beobachtungen bekannt, diejenige ausgenommen, welche Bode in den Berliner astronomischen Jahrbüchern für 1791, 1794 und 1807 gegeben hat, und aus der die Oerter, zum grösseren Theile wenigstens, in sein allgemeines Sternverzeichniss zur Uranographie übergegangen sind. Einigen Anhalt hätte allerdings dieses Verzeichniss schon gewähren können, obgleich es, selbst wenn man absieht von ungenauen Sternörtern, die den Nebelpositionen dort zu Grunde gelegt sind, durch ziemlich zahlreiche Versehn entstellt ist.**)

---

*) *On the Classification of Nebulae* in Sir J. Herschel's Kapbeobachtungen S. 137 u. ff.

**) Einen sehr fehlerhaften Abdruck der unreducirten Nebelkataloge aus den *Philos. Trans.* hat Pfaff dem ersten (einzigen) Bande von W. Herschel's sämmtliche Schriften, Dresden und Leipzig 1826, angehängt. — Das erste Tausend der Herschel'schen Nebel ist, wie ich vermuthe, auch berücksichtigt in Wollaston's Buche *A Specimen of a general astronomical Catalogue,* London 1789; ich habe diese Schrift nicht einsehn können.

Unter diesen Umständen schien es nicht zwecklos, wenn, in Ermangelung eines, allerdings sehr wünschenswerthen allgemeinen Katalogs der Nebelflecken, einstweilen wenigstens die helleren Nebel und die durch ihre mannigfaltigen Erscheinungen merkwürdigen, nämlich die sämmtlichen Nebel der ersten und vierten Klasse mit guten Sternörtern berechnet und, auf das gemeinschaftliche Aequinoctium vom Anfange des Jahres 1850 reducirt, nach Rectascensionen geordnet würden. Diese beiden Verzeichnisse folgen hier, mit einigen Bemerkungen begleitet, zu denen theils die Vergleichung mit den Oertern nach h's Katalogen, theils die hiesige Wiederbeobachtung Veranlassung bot. Die Positionen der Vergleichungssterne wurden meistens aus dem Kataloge der *British Association* genommen, bisweilen den, jenen Herschel'schen Beobachtungen der Zeit nach so nahe liegenden der *Histoire Céleste* entlehnt. Es ist die Praecession und deren Sekularänderung stets gehörig berücksichtigt, dagegen der Nutations- und Aberrationsunterschied zwischen Stern und Nebel vernachlässigt worden, da die Genauigkeit der Positionen, wie oben S. 301 gezeigt wurde, nur in den günstigsten Fällen die Bogenminute erreicht. Die hinzugefügten Bemerkungen werden unter Anderem den Vortheil bieten, dass man auf einen Blick übersieht, welche von den hellen oder besonders merkwürdigen Nebeln seit der ersten Entdeckung noch gar nicht oder in Widerspruch mit dem Herschel'schen Orte wiederbeobachtet wurden. Es fehlte bisher an jedem Hülfsmittel, sich hiervon Kenntniss zu verschaffen.

Der nachfolgenden Reduction konnten keine anderen Quellen, als die betreffenden Bände der *Transactions* zu Grunde gelegt werden; in einigen zweifelhaften Fällen, z. B. bei fehlender Angabe über das Zeichen der Declinationsdifferenz, oder bei Unsicherheit über den Stern, boten indessen die beiden h'schen Verzeichnisse Auskunft. Gewiss wäre es vom höchsten Interesse für die Entwickelung, welche hoffentlich auch dieser Zweig der beobachtenden Astronomie zukünftig erhalten wird, wenn die Herschel'schen Beobachtungen in der Ausführlichkeit, in welcher sie, verschiedenen Andeutungen zufolge, handschriftlich vorhanden sind, veröffentlicht würden. Es schliesst sich dieser Wunsch in Betreff der Nebelflecken lebhaft an den an, welcher, schon vor einem Jahrzehnt, nach Veröffentlichung der 400 noch unedirten *star-gauges* von gewichtigerer Seite her geäussert wurde.

## W. Herschel's Nebelflecke erster Klasse.

### Helle Nebel.

| H. | h. | Rectascension 1850. | Praec. | Declination 1850. | Praec. | Beob. | Datum. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. 159 | 71 | 10° 56′ 10″ | +50″,10 | +46° 45′ 5″ | +19″,69 | 3 | 1786 Dec. 11 |
| 54 | 88 | 15 3 35 | 50,25 | +38 49 16 | 19,36 | 1 | 84 Oct. 5 |
| 108 | 99? | 17 51 14 | 46,32 | + 2 26 57 | 19,08 | 2 | 85 Oct. 8 |
| 151 | 117 | 19 12 56 | 47,08 | + 8 45 18 | 18,94 | 1 | 86 Sept. 4 |
| 100 | 128 | 20 58 12 | 45,09 | − 7 39 35 | 18,72 | 1 | 85 Sept. 10 |
| 281 | {139, 2422} | 21 51 27 | 41,71 | −30 13 37 | 18,61 | 1 | 98 Dec. 9 |
| 153 | ... | 22 25 40 | 42,99 | −21 53 29 | 18,53 | 1 | 86 Sept. 20 |
| 193 | ... | 23 12 49 | 55,76 | +50 49 41 | 18,43 | 1 | 87 Nov. 12 |
| 157 | 150 | 24 51 54 | 50,29 | +26 40 30 | 18,19 | 1 | 86 Oct. 26 |
| 62 | {160, 2424} | 25 54 40 | 44,44 | −10 27 34 | 18,03 | 2 | 85 Jan. 10 |
| 105 | {165, 2443} | 26 27 7 | 43,76 | −14 28 14 | 17,95 | 1 | 85 Oct. 3 |
| 112 | 181 | 27 46 35 | 49,15 | +18 16 38 | 17,74 | 1 | 85 Nov. 29 |
| 101 | 183 | 28 2 57 | 44,96 | − 6 41 0 | 17,69 | 2 | 85 Sept. 10 |
| 152 | 193 | 30 5 46 | 47,88 | +10 16 32 | 17,35 | 2 | 86 Sept. 4 |
| 154 | 226 | 36 5 28 | 54,79 | +36 27 37 | 16,20 | 2 | 86 Sept. 21 |
| 156 | 242 | 37 46 9 | 55,79 | +38 23 39 | 15,85 | 2 | 86 Oct. 18 |
| 102 | 244 | 37 46 26 | 44,48 | − 7 20 59 | 15,85 | 2 | 85 Sept. 10 |
| 63 | {254, 2493} | 38 27 8 | 44,11 | − 8 54 26 | 15,70 | 1 | 85 Jan. 10 |
| 1 | 258 | 38 31 10 | 46,02 | − 0 11 24 | 15,69 | 7 | 83 Dec. 19 |
| 64 | 264 | 39 39 42 | 44,22 | − 8 12 23 | 15,43 | 2 | 85 Jan. 10 |

### Bemerkungen.

I. 159 H. — h. = + 8$^s$; in Decl. gut stimmend.
54 Eine sichere Position.
108 Der Ort stimmt, wie schon Marth bemerkt, ziemlich nahe mit h. 99, doch habe ich den Nebel nicht wahrgenommen.
151 Position genau; wiederbeobachtet, ziemlich hell.
100 Am Orte wiederbeobachtet; ziemlich hell.
281 h. 139 ist in AR. um 1$^m$ zu verringern; auch in Decl. irrig.
153 . . . . . . . . . .
193 Ort gut = Laugier 3 (in *Comptes Rendus* 1853 *Déc.*)
157 Die Position genau.
62 Trotz mehrfachen Nachsuchens nicht wahrgenommen. h. sehr schwach; H. ansehnlich hell.
105 Wiederbeobachtet; mattes Licht.
112 Sehr genau; etwas schwach; Ort neu bestimmt.
101 Genauer Ort.
152 Aeusserst lichtschwach.
154 h. hat 160$^s$ in AR. weniger, Decl. übereinstimmend.
156 = Laugier 5. Position richtig; ein grosser, heller Nebel; wiederbeobachtet.
102 Nicht wahrgenommen.
63 = Laugier 6. Neu bestimmt; sehr hell.
1 Gegenwärtig äusserst schwach. S. d. vorsteh. Beobb. p. 313. H. »ansehnlich hell«; h. »schwach« Ort sehr genau.
64 Ort sehr genau; der Nebel ist nicht sehr hell.

Nebel erster Klasse.

| H. | h. | Rectascension 1850. | | | Praec. | Declination 1850. | | | Praec. | Beob. | Datum. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. 109 | 283 | 44° | 37′ | 5″ | +38″,98 | −26° | 42′ | 10″ | +14″,27 | 3 | 1785 | Oct. | 26 |
| 106 | 2523 | 48 | 46 | 10 | 41,65 | −15 | 56 | 17 | 13,21 | 2 | 85 | Oct. | 3 |
| 60 | ... | 50 | 1 | 59 | 39,89 | −21 | 51 | 39 | 12,87 | 1 | 84 | Dec. | 9 |
| 257 | 2542 | 50 | 18 | 20 | 36,53 | −31 | 34 | 37 | 12,72 | 1 | 90 | Oct. | 9 |
| 58 | 2566 | 53 | 4 | 1 | 39,09 | −23 | 30 | 21 | 12,05 | 2 | 84 | Nov. | 17 |
| 107 | 2570 | 53 | 22 | 7 | 40,51 | −19 | 2 | 13 | 11,96 | 2 | 85 | Oct. | 6 |
| 258 | ... | 57 | 56 | 11 | 67,01 | +50 | 56 | 37 | 10,64 | 1 | 90 | Dec. | 28 |
| 155 | 309? | 58 | 38 | 14 | 44,73 | − 4 | 25 | 43 | 10,44 | 2 | 86 | Sept. | 30 |
| 217 | 315 | 65 | 2 | 2 | 58,76 | +34 | 57 | 10 | 8,46 | 2 | 88 | Dec. | 27 |
| 158 | 319 | 66 | 3 | 46 | 44,32 | − 5 | 25 | 24 | 8,13 | 2 | 86 | Nov. | 26 |
| 122 | 327 | 68 | 31 | 10 | 45,03 | − 3 | 9 | 39 | 7,34 | 1 | 86 | Febr. | 1 |
| 261 | 355 | 80 | 21 | 37 | 59,75 | +34 | 41 | 55 | + 3,35 | 1 | 93 | Febr. | 4 |
| 218 | 457 | 111 | 59 | 44 | 61,21 | +39 | 11 | 15 | − 7,51 | 1 | 88 | Dec. | 31 |
| 204 | 518 | 128 | 10 | 30 | 65,37 | +30 | 46 | 4 | 12,39 | 1 | 1788 | März | 9 |
| 288 | 520 | 128 | 50 | 42 | 125,42 | +78 | 51 | 51 | 12,58 | 1 | 1802 | Sept. | 26 |
| 242 | 530 | 130 | 39 | 58 | 65,43 | +51 | 52 | 25 | 13,07 | 1 | 1790 | März | 17 |
| 200 | 532 | 130 | 48 | 16 | 56,28 | +33 | 58 | 25 | 13,10 | 1 | 88 | Febr. | 5 |
| 249 | 550 | 133 | 59 | 36 | 72,17 | +61 | 5 | 10 | 13,93 | 2 | 90 | März | 19 |
| 250 | 555 | 135 | 1 | 55 | 71,26 | +60 | 38 | 54 | 14,19 | 1 | 90 | März | 19 |
| 2 | 564 | 135 | 35 | 28 | 47,95 | + 7 | 39 | 37 | 14,32 | 5 | 83 | Dec. | 19 |
| 66 | 569 | 136 | 4 | 47 | 42,55 | −14 | 8 | 50 | 14,44 | 1 | 85 | Febr. | 8 |
| 167 | 568 | 136 | 6 | 59 | 58,01 | +40 | 41 | 46 | 14,45 | 1 | 87 | März | 18 |
| 59 | {571} {3148} | 136 | 23 | 40 | 40,02 | −23 | 36 | 28 | 14,52 | 1 | 84 | Nov. | 20 |
| 216 | 570 | 136 | 36 | 19 | 83,54 | +69 | 48 | 59 | 14,57 | 2 | 88 | Dec. | 3 |
| 113 | 582 | 137 | 38 | 8 | 55,30 | +34 | 22 | 49 | 14,81 | 2 | 85 | Dec. | 7 |

Bemerkungen.

I. 109 h. hat 50$^s$ weniger in AR.
106 Steht am Orte; leidlich hell.
60 In 11′ kleinerer AR. gefunden und wiederbeobachtet; nicht sehr hell.
257 Noch nicht wiederbeobachtet; der Südkatalog gibt keine Position.
58 H's AR. 20$^s$ zu gross; wiederbeobachtet.
107 Position gut; Nebel hell.
258 . . . . . . . . . .
155 h. 309 hat 13$^m$30$^s$ weniger; bei der gänzlichen Verschiedenheit der Helligkeit ist die Identität mindestens sehr zweifelhaft.
217 AR. bei H. etwas zu klein; der Nebel ist leidlich hell.
158 Ort gut; ein kleiner, schwacher Nebel.
122 Die Positionen bei H. und h. gut zusammenstimmend.
261 = Laugier 8.
218 Position sicher.
204 h. hat aus 4 Beob. 18$^s$ mehr.
288 Wiederbeobachtet von Laugier, Nr. 13.
242 Eine sichere Position.
200 Ist Laugier 14.
249 h. gibt in Rectascension 20$^s$ weniger.
250 Der Unterschied in AR. h. — H. = — 12$^s$.
2 Ort sehr genau; Nebel recht hell.
66 Bei h. steht der Nebel, gleichfalls nach einer Beobachtung, 3½′ südlicher; AR. gut.
167 Im Nordkataloge keine Position.
59 Steht am Himmel gegenwärtig 3′ nördlicher; ein heller Nebel. Auch h. setzt ihn südlicher, als ich fand; vergl. die Beobb.
216 Im Nordkataloge ist die AR. 54$^s$ kleiner angesetzt.
113 Ort gut.

Nebel erster Klasse.

| H. | h. | Rectascension 1850. | Praec. | Declination 1850. | Praec. | Beob. | Datum. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. 205 | 584 | 137° 49′ 24″ | +63,″06 | +51° 37′ 29″ | −14,″86 | 1 | 1788 März 9 |
| 132 | 592 | 138 33 59 | 43,41 | −11 16 47 | 15,03 | 2 | 86 März 19 |
| 260 | 596 | 139 26 41 | 71,81 | +63 8 52 | 15,24 | 1 | 91 April 2 |
| 137 | ... | 140 30 11 | 59,45 | +46 23 22 | 15,47 | 1 | 86 März 28 |
| 56 / 57 | 604 | 140 58 21 | 51,20 | +22 8 35 | 15,57 | 1 | 1784 Nov. 16 |
| 285 | 625 | 143 30 54 | 76,45 | +68 35 29 | 16,12 | 1 | 1801 Nov. 8 |
| 114 | 622 | 143 31 27 | 53,66 | +32 31 20 | 16,12 | 1 | 1785 Dec. 7 |
| 282 | ... | 143 38 57 | 92,97 | +75 47 15 | 16,15 | 1 | 1801 April 2 |
| 61 | 630 | 143 44 39 | 45,44 | − 3 1 2 | 16,17 | 2 | 1785 Jan. 6 |
| 78 | 629 | 144 10 52 | 84,40 | +72 59 22 | 16,26 | 1 | 85 April 3 |
| 115 | 645 | 145 29 36 | 53,80 | +34 15 54 | 16,52 | 2 | 1785 Dec. 7 |
| 286 | 658 | 147 40 47 | 74,48 | +69 19 49 | 16,94 | 1 | 1801 Nov. 8 |
| 163 | 668 / 3223 | 149 27 2 | 44,81 | − 7 0 16 | 17,27 | 1 | 1787 Febr. 22 |
| 79 | 674 | 150 37 45 | 80,77 | +74 11 1 | 17,47 | 1 | 85 April 3 |
| 3 | 684 | 151 29 38 | 46,76 | + 4 10 8 | 17,62 | 4 | 83 Dec. 19 |
| 4 | 685 | 151 36 38 | 46,76 | + 4 13 6 | 17,64 | 4 | 83 Dec. 19 |
| 168 | 688 | 152 18 40 | 54,49 | +42 9 14 | 17,75 | 3 | 87 März 18 |
| 265 | ... | 152 20 14 | 61,52 | +58 56 47 | 17,76 | 1 | 93 April 8 |
| 199 | 695 | 152 40 22 | 55,69 | +46 17 36 | 17,81 | 2 | 88 Jan. 15 |
| 266 | 697 | 152 58 58 | 60,46 | +57 40 31 | 17,86 | 1 | 1793 April 8 |
| 283 | ... | 153 22 33 | 80,58 | +75 24 47 | 17,92 | 1 | 1801 April 2 |
| 86 | 711 | 154 42 53 | 50,86 | +29 17 51 | 18,13 | 1 | 1785 April 11 |
| 72 | 714 | 155 11 46 | 50,97 | +30 15 49 | 18,20 | 1 | 85 März 13 |
| 164 | 724 | 156 54 48 | 52,22 | +38 5 42 | 18,44 | 3 | 87 März 17 |
| 272 | ... | 158 9 34 | 47,38 | +10 3 49 | 18,61 | 2 | 96 März 4 |

Bemerkungen.

I. 205 = Laugier 15. H's AR. ist 8′ zu klein.
132 H. und h. gut übereinstimmend.
260 Gleichfalls vortrefflich stimmend.
137 h. 593 ist ein weit entfernt stehendes Objekt, durchaus verschieden von diesem Nebel.
56,57 = Laugier 17. Sehr hell; H's AR. merklich zu gross, wiederbeobachtet.
285 h. hat (1 Beob.) $42^s$ in AR. mehr.
114 H. und h. leidlich übereinstimmend.
282 . . . . . . . . .
61 Genauer Ort; ein heller Nebel.
78 h. gibt $1^m$ weniger in AR.; Decl. gut.
115 Gute Uebereinstimmung in beiden Coordinaten.
286 Ort von 1 Beob. h's sehr erheblich verschieden.
163 Sehr hell und gross; Ort exact.
79 AR. $86^s$ geringer als im Nordkataloge; Decl. 3′ nördlicher.
3, 4 Beide Oerter stimmen sehr nahe mit den jetzigen Beobachtungen; die Nebel sind leicht wahrnehmbar.
168 Sehr genaue Position.
265 . . . . . . . . .
199 Uebereinstimmend mit h.
266 Eine gute Position.
283 . . . . . . . . .
86 Am Orte gefunden, ziemlich hell.
72 Ort zuverlässig nach 1 Beob. bei h.
164 Vortrefflich mit einer einmaligen Beobachtung im Nordkataloge harmonirend.
272 Der Reduction liegt folgender Ort des Uranus zu Grunde AR. 157° 40′ 9″ Decl. + 10° 14′ 32″.

## Nebel erster Klasse.

| H. | h. | Rectascension 1850. | Praec. | Declination 1850. | Praec. | Beob. | Datum. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. 26 | 740 | 158° 40′ 43″ | +47,″72 | +12° 50′ 19″ | −18,″68 | 1 | 1784 März 19 |
| 80 | 738 | 158 46 18 | 70,81 | +73 38 39 | 18,69 | 1 | 85 April 3 |
| 81 | 739 | 158 47 38 | 49,54 | +25 38 28 | 18,69 | 2 | 85 April 6 |
| 17 } | 757 } | 159 59 38 | 47,69 | +13 21 43 | 18,84 | 5 } | 84 März 11 |
| 18 } | 758 } | 160 6 38 | 47,69 | +13 24 43 | 18,85 | 5 } | |
| 116 } 117 } | 765 } 766 } | 160 19 44 | 51,57 | +33 45 54 | 18,88 | 1 | 1785 Dec. 7 |
| 284 | ... | 160 26 1 | 77,88 | +78 4 59 | 18,89 | 1 | 1801 April 2 |
| 27 | 774 | 160 43 56 | 47,73 | +14 10 38 | 18,93 | 3 | 1784 April 8 |
| 118 | ... | 160 56 6 | 50,28 | +32 46 33 | 18,95 | 1 | 85 Dec. 7 |
| 172 | 780 | 161 1 53 | 51,04 | +37 24 21 | 18,96 | 1 | 87 März 19 |
| 267 | 787 | 161 22 23 | 56,24 | +57 48 51 | 19,00 | 1 | 93 April 8 |
| 233 | 788 | 161 25 8 | 55,22 | +55 6 50 | 19,00 | 2 | 89 April 17 |
| 268 | ... | 161 43 30 | 56,09 | +57 54 49 | 19,04 | 1 | 93 April 8 |
| 87 | 805 | 162 46 47 | 49,46 | +29 46 34 | 19,15 | 1 | 85 April 11 |
| 269 | 803 | 163 1 47 | 55,60 | +58 27 40 | 19,18 | 1 | 93 April 8 |
| 88 | 810 | 163 46 26 | 49,14 | +28 46 27 | 19,25 | 1 | 85 April 11 |
| 13 | 818 | 164 32 0 | 46,15 | + 0 46 57 | 19,32 | 3 | 84 Febr. 22 |
| 220 | ... | 165 34 3 | 52,99 | +54 12 7 | 19,42 | 2 | 89 April 12 |
| 29 | 840 | 166 42 54 | 47,18 | +13 37 33 | 19,51 | 3 | 84 April 12 |
| 270 | 847 | 167 23 34 | 53,53 | +59 40 18 | 19,57 | 2 | 93 April 8 |
| 271 | 848 | 167 27 18 | 53,27 | +58 53 17 | 19,57 | 1 | 93 April 8 |
| 244 | 852 | 167 39 24 | 53,09 | +58 38 13 | 19,58 | 2 | 90 März 18 |
| 241 | 3337 | 167 43 1 | 43,40 | −31 58 23 | 19,59 | 1 | 90 Febr. 17 |
| 226 | 858 | 168 9 30 | 51,72 | +53 57 54 | 19,62 | 1 | 89 April 14 |

### Bemerkungen.

I. 26 h. gibt AR. 1^m grösser, Decl. 4′ südlicher; auch wegen der Helligkeit wird die Identität zweifelhaft.

80 Der Nordkatalog macht die AR. 39^s grösser.

81 Bei h. nach einer Beob. 4′ nördlicher.

17,18 Positionen beide gut. Laugier 23 und 24. Beide vorzüglich hellen Nebel wiederbeobachtet.

116,117 AR. am Himmel etwas grösser.

284 . . . . . . . . .

27 Von ziemlicher Helligkeit; sehr nahe in dieser Position wiederbeobachtet.

118 Nach h. nicht am Orte. Vergl. Marth's Bemerkung zu h. 782; Astr. Nachr. Nr. 995.

172 Position gut; eine Eigene Bewegung nach dem Vorliegenden wohl nicht wahrscheinlich.

267 Ziemlich nahe derselbe Ort im Nordkataloge.

233 AR. bei h. 12^s kleiner, 1 Beob.

268 . . . . . . . . .

87 H's Ort ist in AR. um 1 Zeitminute zu vergrössern; Decl. gut. Laugier 26. Ein Nebel von mattem Lichte.

269 Gute Uebereinstimmung der Oerter. H. ansehnlich hell; h. äusserst schwach.

88 = Laugier 28. Ort gut, leidlich hell.

13 = Laugier 29. Sehr hell und gross.

220 . . . . . . . . .

29 AR. bei h. einige Zeitsekunden kleiner; Decl. gut.

270 Steht am Himmel 5′ südlicher.

271 Steht bei h. (1 Beob.) 2′ nördlicher.

244 Die Identität von I. 244 mit h. 852 ist wohl zweifellos, wie schon Marth bemerkt hat.

241 = Dunlop 617. H's Ort ziemlich gut, D's unbrauchbar.

226 Im Nordkataloge ist die AR. 10 Zeitsekunden kleiner.

## Nebel erster Klasse.

| H. | h. | Rectascension 1850. | Praec. | Declination 1850. | Praec. | Beob. | Datum. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. 245 | 865 | 168° 20′ 8″ | +53″,10 | +59° 56′ 11″ | −19″,64 | 3 | 1790 März 18 |
| 194 | ... | 168 28 4 | 49,98 | +44 23 18 | 19,65 | 2 | 88 Jan. 11 |
| 5 | 873 | 168 46 24 | 47,28 | +17 23 56 | 19,67 | 2 | 83 Dec. 30 |
| 219 | 881 | 169 7 3 | 49,19 | +39 36 27 | 19,69 | 1 | 89 März 23 |
| 20 | 882 | 169 12 48 | 46,87 | +12 10 20 | 19,70 | 2 | 84 März 15 |
| 131 | 886 | 169 22 52 | 45,48 | − 8 59 17 | 19,71 | 1 | 86 März 4 |
| 194 | 887 | 169 28 5 | 49,65 | +44 23 18 | 19,71 | 2 | 1788 Jan. 11 |
| 287 | ... | 169 28 56 | 56,92 | +71 22 36 | 19,71 | 1 | 1801 Dec. 7 |
| 246 | 892 | 169 45 52 | 51,71 | +57 46 20 | 19,73 | 2 | 1790 März 18 |
| 247 | 896 | 170 2 36 | 51,93 | +59 26 19 | 19,75 | 2 | 90 März 18 |
| 262 | 890 | 170 4 20 | 54,40 | +67 28 37 | 19,75 | 1 | 93 April 6 |
| 221 | 908 | 171 5 48 | 50,32 | +53 54 42 | 19,81 | 2 | 89 April 12 |
| 222 | 911 | 171 25 54 | 50,16 | +53 56 11 | 19,83 | 2 | 89 April 12 |
| 227 | 929 | 172 38 48 | 50,03 | +57 8 37 | 19,89 | 2 | 89 April 14 |
| 94 | 945 | 173 18 42 | 47,84 | +37 20 21 | 19,91 | 2 | 85 April 28 |
| 21 | 943 | 173 22 13 | 46,57 | +12 18 6 | 19,92 | 3 | 84 März 15 |
| 203 | 1002 | 174 30 2 | 47,98 | +44 58 24 | 19,96 | 1 | 88 Febr. 6 |
| 201 | ... | 174 32 59 | 48,20 | +48 19 39 | 19,96 | 2 | 88 Febr. 5 |
| 202 | 1009 | 174 43 27 | 48,16 | +48 40 38 | 19,96 | 2 | 88 Febr. 5 |
| 120 | { 979 } {3360} | 174 51 32 | 45,54 | −16 1 52 | 19,97 | 1 | 85 Dec. 31 |
| 228 | 985 | 175 9 23 | 48,66 | +56 55 31 | 19,98 | 2 | 89 April 14 |
| 248 | 983 | 175 16 35 | 48,95 | +60 18 3 | 19,98 | 2 | 90 März 18 |
| 82 | 988 | 175 20 18 | 46,92 | +27 52 3 | 19,98 | 2 | 85 April 6 |
| 259 | 3366 | 175 51 10 | 45,29 | −27 59 44 | 20,00 | 1 | 91 März 7 |
| 251 | 1006 | 176 11 35 | 48,51 | +61 29 18 | 20,00 | 1 | 90 März 19 |

### Bemerkungen.

I. 245 AR. bei H. $18^s$ zu vergrössern.
194 . . . . . . . . . .
5 Zur zweiten Klasse gehörig; wiederbeobachtet.
219 = Laugier 33.
20 h. hat in AR. $12^s$ weniger (3 Beob.) H. sehr hell; h. äusserst schwach.
131 Vergebens gesucht; gewiss kaum II. Klasse. h. ziemlich hell, schwach; H. ansehnlich hell.
194 = Laugier 34.
287 Nach John Herschel = h. 914, doch differiren beide Positionen in AR. mehr als $9^m$, um welche h. grösser.
246 Nach h. ist die Decl. (1 Beob.) $4'$ kleiner.
247 Die obige Decl. scheint $3'$ zu nördlich; AR. übereinstimmend.
262 h's AR. ist $93^s$ kleiner, doch scheint die Identität zweifellos.
221 AR. wie oben angesetzt ist $10^s$ zu verkleinern; Decl. gut.
222 AR. scheint $15^s$ zu gross.
227 Beide Coordinaten so stark abweichend (AR. $33^s$, Decl. $3'$), dass bei merklicher Verschiedenheit der Beschreibung, die Identität mit h. 929 zweifelhaft sein kann.
94 Steht am Himmel einige Sekunden später und $8'$ nördlicher.
21 H's AR. etwas zu gross; der Nebel ist leidlich hell.
203 Bei H. ist die AR. $7^m$ kleiner, als im Nordkataloge, der 2 Beob. dieses Nebels gibt.
201 . . . . . . . . . .
202 Dieselbe Bemerkung gilt, wie zu dem vorangehenden I. 203; in diesem Falle wird die Identität sogar zweifelhaft.
120 Eine gute Uebereinstimmung.
228 h. macht die AR. $36^s$ grösser, Decl. nahe wie oben.
248 Nach 2 gut stimmenden Beob. im Nordkataloge ist AR. um $18^s$, Decl. um $3'$ zu verkleinern.
82 Sehr genauer Ort.
259 Gute Uebereinstimmung mit 2 Beob. im Kapkataloge.
251 AR. gibt h. $32^s$ grösser; Decl. gut stimmend.

## Nebel erster Klasse.

| H. | h. | Rectascension 1850. | Praec. | Declination 1850. | Praec. | Beob. | Datum. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. 173 | 1005 | 176° 16′ 55″ | +47″,07 | +37° 49′ 33″ | −20″,01 | 1 | 1787 März 19 |
| 67 | 3370 | 176 45 30 | 45,80 | −13 11 52 | 20,02 | 3 | 85 Febr. 8 |
| 229 | 1031 | 177 24 36 | 47,41 | +56 48 27 | 20,03 | 1 | 89 April 14 |
| 223 | 1047 | 177 58 36 | 46,95 | +54 46 27 | 20,04 | 2 | 89 April 12 |
| 121 | 1048 | 178 10 55 | 46,05 | − 0 16 8 | 20,04 | 1 | 86 Jan. 1 |
| 253 | 1050 | 178 25 41 | 47,12 | +62 41 15 | 20,04 | 1 | 90 März 19 |
| 252 | 1054 | 178 34 21 | 47,04 | +62 58 15 | 20,04 | 1 | 90 März 19 |
| 174 | 1066 | 179 3 54 | 46,27 | +32 46 28 | 20,04 | 1 | 87 März 20 |
| 206 | ... | 179 27 51 | 46,29 | +51 23 20 | 20,05 | 3 | 88 März 9 |
| 224 | ... | 179 30 18 | 46,28 | +51 6 13 | 20,05 | 2 | 89 April 12 |
| 207 | 1081 | 179 37 30 | 46,20 | +48 16 20 | 20,05 | 3 | 88 März 9 |
| 225 | 1085 | 179 42 14 | 46,20 | +53 30 12 | 20,05 | 2 | 89 April 12 |
| 195 | 1088 | 179 49 26 | 46,12 | +43 54 37 | 20,05 | 2 | 88 Jan. 14 |
| 33 | 1094 | 180 11 37 | 46,05 | +11 12 57 | 20,05 | 1 | 84 April 15 |
| 263 | ... | 180 15 42 | 45,81 | +69 38 58 | 20,05 | 1 | 93 April 6 |
| 278 | 1100 | 180 18 8 | 45,65 | +75 44 37 | 20,05 | 1 | 96 Dec. 12 |
| 196 | ... | 180 26 13 | 45,91 | +44 30 37 | 20,05 | 2 | 88 Jan. 14 |
| 279 | 1096 | 180 27 41 | 45,34 | +77 37 37 | 20,05 | 2 | 96 Dec. 12 |
| 169 | 1105 | 180 34 3 | 45,89 | +40 44 4 | 20,05 | 1 | 87 März 18 |
| 19 | 1106 | 180 40 0 | 45,98 | +19 23 14 | 20,05 | 1 | 84 März 14 |
| 165 | 1111 | 180 42 30 | 45,85 | +40 16 4 | 20,05 | 2 | 87 März 17 |
| 73 | 1110 | 180 44 46 | 45,90 | +31 13 12 | 20,05 | 1 | 85 März 13 |
| 11 | ... | 180 45 20 | 45,96 | +19 11 44 | 20,05 | 1 | 84 Febr. 15 |
| 208 | 1114 | 180 49 54 | 45,48 | +51 20 20 | 20,05 | 3 | 88 März 9 |
| 9 | 1126 | 181 18 58 | 46,05 | + 2 9 40 | 20,05 | 4 | 84 Jan. 24 |

## Bemerkungen.

I. 173 Position sehr gut. Laugier 35.
67 AR. scheint $24^s$ zu klein; Decl. ziemlich gut stimmend.
229 h. hat nur eine Beobachtung, welche die AR. $19^s$ kleiner macht.
223 In leidlicher Uebereinstimmung mit 1 Beob. bei h. Wiedergesehn, sehr hell.
121 Eine gute Position.
253 h's Ort (1 Beob.) 2′ nördlicher.
252 Im Nordkataloge $10^s$ mehr in AR.
174 Nicht recht genau; AR. etwas zu klein.
206 . . . . . . . . .
224 . . . . . . . . .
207 Ort in naher Uebereinstimmung mit h.
225 h's Decl. 2½′ nördlicher; AR. gut.
195 = Laugier 37. AR. bei H. einige Zeitsekunden zu klein.
33 AR. wie oben angesetzt etwa $16^s$ zu gross.
263 . . . . . . . . .
278 AR. im Nordkataloge etwa $27^s$ grösser.
196 Bisher nicht wiederbeobachtet.
279 Bei h. $15^s$ in AR. weniger, während die Decl. stimmt.
169 h's AR. ist $8^s$ grösser; Decl. stimmt.
19 Bei h. $16^s$ in AR. weniger.
165 Eine ziemlich gute Position.
73 Die Position in recht naher Uebereinstimmung mit h's.
11 . . . . . . . . .
208 Der Nordkatalog gibt $19^s$ mehr in AR.; Decl. gut.
9 Ort nahe mit 4 Beob. bei h. übereinstimmend.

## Nebel erster Klasse.

| H. | h. | Rectascension 1850. | Praec. | Declination 1850. | Praec. | Beob. | Datum. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. 175 | 1140 | 181° 48′ 8″ | +45,″64 | +34° 3′ 14″ | −20,″04 | 1 | 1787 März 20 |
| 95 | 1146 | 181 59 44 | 45,53 | +37 40 12 | 20,04 | 2 | 85 April 28 |
| 35 | 1148 | 182 0 13 | 45,89 | +13 51 30 | 20,04 | 1 | 84 April 17 |
| 209 | 1151 | 182 13 10 | 45,18 | +48 42 20 | 20,03 | 2 | 88 März 9 |
| 264 | 1170 | 182 21 4 | 43,58 | +71 37 59 | 20,03 | 1 | 93 April 7 |
| 74 | 1168 | 182 32 37 | 45,54 | +30 24 13 | 20,03 | 1 | 85 März 13 |
| 89 | 1171 | 182 39 17 | 45,55 | +29 0 59 | 20,03 | 1 | 85 April 11 |
| 90 | 1186 | 183 6 17 | 45,43 | +30 3 0 | 20,02 | 1 | 85 April 11 |
| 75 | 1185 | 183 9 59 | 45,41 | +30 26 14 | 20,02 | 1 | 85 März 13 |
| 275 | 1192 | 183 23 23 | 44,24 | +76 11 38 | 20,01 | 2 | 96 Dec. 10 |
| 139 | 1202 | 183 35 24 | 45,94 | + 5 17 31 | 20,01 | 2 | 86 April 17 |
| 276 | 1210 | 183 41 45 | 40,82 | +76 11 39 | 20,01 | 2 | 96 Dec. 10 |
| 76 | 1204 | 183 47 50 | 45,27 | +30 43 15 | 20,00 | 1 | 85 März 13 |
| 210 | 1225 | 184 2 42 | 44,50 | +47 48 49 | 20,00 | 2 | 88 April 1 |
| 30 | 1232 | 184 10 17 | 46,04 | + 8 9 42 | 20,00 | 2 | 84 April 13 |
| 65 | 1231 | 184 11 2 | 46,21 | −17 57 23 | 20,00 | 1 | 85 Febr. 7 |
| 166 | 1234 | 184 16 53 | 44,79 | +40 14 8 | 19,99 | 2 | 87 März 17 |
| 22 | 1235 | 184 19 32 | 45,72 | +12 29 32 | 19,99 | 2 | 84 März 15 |
| 12 | 1239 | 184 23 32 | 45,53 | +15 35 9 | 19,99 | 2 | 84 Febr. 19 |
| 123 | 1228 | 184 24 12 | 46,05 | + 5 44 50 | 19,99 | 2 | 86 Febr. 2 |
| 277 | 1247 | 184 33 48 | 45,40 | +76 19 40 | 19,99 | 2 | 96 Dec. 10 |
| 77 | 1258 | 184 44 34 | 45,03 | +31 58 16 | 19,98 | 1 | 85 März 13 |
| 28 | 1275 | 185 1 25 | 45,63 | +13 54 34 | 19,97 | 2 | 84 April 8 |
| 91 | 1280 | 185 9 20 | 45,05 | +29 23 18 | 19,97 | 1 | 85 April 11 |
| 213 | 1281 | 185 14 15 | 44,24 | +44 55 27 | 19,97 | 1 | 88 April 27 |

### Bemerkungen.

I. 175 Ist vermuthlich Laugier 38; grosse Verschiedenheiten im Orte bei H., h. und L. — Beobachtet, H. und L. irrig.
95 h. gibt $7^s$ mehr in AR. Wiedergesehn, leidlich hell ohne Verdichtung in der Mitte.
35 = Laugier 39 Ort beträchtlich abweichend; ein heller Nebel.
209 h. $9^s$ weniger in AR.; Decl. gut.
264 Im Nordkataloge, gleichfalls nach 1 Beob., eine Zeitminute später in AR.
74 Leidlich hell; die Position ziemlich genau.
89 In sehr nahe richtiger Position; sehr hell; wiederbeobachtet.
90 Ort nicht schön; sehr hell.
75 AR. bei H. etwas zu gross; ein heller und ansehnlicher Nebel.
275 Eine gut bestätigte Position.
139 = Messier 61; h. gibt der AR. $8^s$ weniger.
276 In beiden Coordinaten etwas abweichender Ort.
76 Wiedergesehn; ziemlich hell, länglicht.
210 In leidlicher Uebereinstimmung mit 5 Beob. im Nordkataloge.
30 In etwas grösserer AR. wiederbeobachtet; ein heller Nebel.
65 Genauer Ort. Laugier 40.
166 Eine gute Position.
22 Wird im Nordkataloge fast 2′ nördlicher gesetzt.
12 In vortrefflicher Uebereinstimmung mit h's Orte.
123 h's AR. ist um $48^s$ zu vergrössern.
277 Scheint 2′ nördlicher zu stehn.
77 Hell; steht etwas nördlicher, als aus H's Beobachtung folgt.
28 Diesen schönen Doppelnebel wiederbeobachtet; H's Position stimmt gut mit dem helleren, vorangehenden Nebel.
91 Decl. fast 3′ kleiner, als bei h. nach 4 Beob.
213 h. gibt in AR. $9^s$ weniger.

## Nebel erster Klasse.

| H. | h. | Rectascension 1850. | Praec. | Declination 1850. | Praec. | Beob. | Datum. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. 212 | 1289 | 185° 14′ 51″ | +44,″18 | +45° 41′ 52″ | −19,″97 | 1 | 1788 April 10 |
| 23 | ... | 185 19 27 | 45,65 | +12 27 34 | 19,97 | 2 | 84 März 15 |
| 164 | 1288 | 185 20 1 | 45,57 | +14 49 17 | 19,96 | 1 | 87 Jan. 14 |
| 197, 198 | 1306, 1308 | 185 47 23 | 44,21 | +12 29 5 | 19,95 | 1 | 88 Jan. 14 |
| 83 | 1307 | 185 55 5 | 45,03 | +26 35 50 | 19,94 | 1 | 85 April 6 |
| 234 | 1311 | 186 6 34 | 42,54 | +58 45 50 | 19,94 | 2 | 89 April 17 |
| 31 | ... | 186 35 24 | 45,73 | + 8 14 17 | 19,92 | 1 | 84 April 13 |
| 38 | 1329 | 186 36 50 | 45,72 | + 8 29 33 | 19,92 | 1 | 84 April 18 |
| 160 | 1339 | 186 57 18 | 46,18 | − 2 56 37 | 19,91 | 2 | 86 Dec. 29 |
| 36, 37 | 1343, 1349 | 187 4 17 | 45,49 | +13 6 37 | 19,90 | 1 | 84 April 17 |
| 119 | 1353 | 187 5 21 | 45,69 | + 8 32 18 | 19,90 | 1 | 85 Dec. 28 |
| 92 | 1352 | 187 8 26 | 44,69 | +28 47 23 | 19,89 | 1 | 85 April 11 |
| 32 | 1361 | 187 17 37 | 45,70 | + 8 5 49 | 19,89 | 1 | 84 April 13 |
| 124 | 1369 | 187 31 34 | 45,77 | + 6 11 57 | 19,88 | 2 | 86 Febr. 2 |
| 125 | 1371 | 187 42 51 | 45,82 | + 5 8 57 | 19,87 | 2 | 86 Febr. 2 |
| 273 | 1374 | 187 54 34 | 45,03 | +74 59 29 | 19,86 | 3 | 96 Nov. 22 |
| 43 | 1376 | 187 58 40 | 46,59 | −10 47 43 | 19,86 | 1 | 84 Mai 9 |
| 24 | 1378 | 188 8 47 | 45,51 | +10 58 54 | 19,85 | 2 | 84 März 15 |
| 254 | 1381 | 188 18 42 | 40,51 | +62 24 26 | 19,84 | 1 | 90 März 19 |
| 178, 179 | 1385 | 188 33 29 | 43,38 | +41 58 12 | 19,83 | 1 | 87 April 9 |
| 14 | 1396 | 188 42 9 | 46,02 | + 0 45 28 | 19,82 | 2 | 84 Febr. 22 |
| 10 | 1404 | 188 54 23 | 45,87 | + 2 48 54 | 19,81 | 4 | 84 Jan. 24 |

### Bemerkungen.

I. 212 Im Nordkataloge ist die AR. 23ˢ grösser angesetzt; vielleicht ist, bei besserer Uebereinstimmung, h. 1289 = II. 750.

23 Wiedergesehn; gross doch schwach.

164 Eine gut bestätigte Position.

197, 198 Beide Coordinaten weichen sehr erheblich ab; auch setzt H. den gegenseitigen Abstand 90″, während man aus h's Beob. 179″ findet.

83 AR. bei h. grösser.

234 h. gibt die AR. 13ˢ kleiner.

31 Nicht gefunden, kommt auch nicht bei h. vor, und ist wohl = I. 38.

38 Nahe an H's Orte wiederbeobachtet; ein sehr heller, langgestreckter Nebel.

160 Ziemlich nahe mit h's Position übereinstimmend.

36, 37 H. und h. beträchtlich in der Position verschieden.

119 Gesehn, doch äusserst lichtschwach.

92 Ort genau (h. 2 Beob.)

32 Position leidlich; der Nebel ist recht hell.

124 Bestätigt durch eine Beob. im Nordkataloge.

125 Eine sehr gute Position.

273 Ort genau (h. 4 Beob.)

43 h. gibt der AR. 18ˢ mehr; Decl. stimmt.

24 Ort nicht genau; ein sehr ansehnlicher Nebel.

254 h's Ort in guter Uebereinstimmung mit obigem.

178, 179 AR. bei H. wohl einige Zeitsekunden zu vergrössern.

14 Position bestätigt.

10 Ein genauer Ort; H. 2′ lang, h. klein.

Nebel erster Klasse.

| H. | h. | Rectascension 1850. | Praec. | Declination 1850. | Praec. | Beob. | Datum. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. 274 | 1410 | 189° 0' 6" | +34,"15 | +75° 14' 32" | −19,"80 | 3 | 1796 Nov. 22 |
| 176<br>177 | 1414<br>1415 | 189 8 53 | 43,99 | +33 1 28 | 19,80 | 1 | 87 März 20 |
| 142 | 1419 | 189 20 59 | 45,84 | + 3 52 17 | 19,78 | 1 | 86 April 30 |
| 15 | 1420 | 189 22 10 | 46,04 | + 0 20 30 | 19,78 | 2 | 84 Febr. 22 |
| 39 | 1436 | 190 8 40 | 46,37 | − 4 58 37 | 19,73 | 1 | 84 April 24 |
| 8 | ... | 190 13 4 | 45,48 | + 9 17 45 | 19,73 | 5 | 84 Jan. 23 |
| 129 | 1437<br>3425 | 190 19 19 | 46,55 | − 7 50 56 | 19,73 | 1 | 86 März 3 |
| 140 | 1444 | 190 34 38 | 45,66 | + 6 7 49 | 19,71 | 2 | 86 April 17 |
| 84 | 1451 | 190 45 11 | 44,21 | +26 19 5 | 19,70 | 1 | 85 April 6 |
| 41 | 1452 | 190 54 6 | 46,13 | − 5 38 16 | 19,69 | 1 | 84 April 25 |
| 133 | 3432 | 190 59 18 | 46,47 | − 9 38 32 | 19,68 | 1 | 86 März 25 |
| 25 | 1462 | 191 6 14 | 45,23 | +12 6 52 | 19,67 | 1 | 84 März 15 |
| 16 | 1461 | 191 9 58 | 46,09 | − 0 24 23 | 19,67 | 2 | 84 Febr. 22 |
| 134 | ... | 191 38 36 | 46,75 | − 9 43 28 | 19,64 | 1 | 86 März 25 |
| 135<br>136 | ... | 191 41 0 | 46,90 | −11 45 15 | 19,63 | 2 | 86 März 27 |
| 93 | 1475 | 191 49 30 | 43,71 | +29 45 36 | 19,62 | 1 | 85 April 11 |
| 211 | 1478 | 191 53 3 | 44,58 | +47 19 13 | 19,62 | 3 | 88 April 1 |
| 141 | 1480 | 192 3 24 | 45,69 | + 5 6 56 | 19,60 | 1 | 86 April 17 |
| 243 | 1483 | 192 16 50 | 38,91 | +59 11 35 | 19,59 | 1 | 90 März 17 |
| 68 | 1497 | 192 50 41 | 47,20 | −14 19 14 | 19,55 | 1 | 85 Febr. 8 |
| 162 | 1498 | 192 59 11 | 44,85 | +14 58 45 | 19,54 | 1 | 87 Jan. 16 |
| 69 | 1511 | 193 14 41 | 47,19 | −13 49 12 | 19,52 | 1 | 85 Febr. 8 |
| 143 | 1509 | 193 15 4 | 45,89 | + 2 6 1 | 19,52 | 1 | 86 April 30 |

## Bemerkungen.

I. 274 AR. vielleicht einige Zeitsekunden zu vergrössern.
176,177 AR. einige Zeitsekunden grösser nach h., Decl. gut.
142 Vortrefflich mit 2 Beob. im Nordkataloge stimmend.
15 Ort gut; ist auch von Bond wiederbeobachtet, *Harvard Obs.* I. P. 2. p. 265.
39 Decl. übereinstimmend; AR. etwa 16ˢ zu klein.
8 Wiederbeobachtet, ziemlich gross und hell, Januar 1856.
129 Eine sehr genaue Position.
140 Durch 4 Beob. vortrefflich bestätigt.
84 Sehr nahe am Orte bei h.
41 Der Ort von h. 1452 so merklich verschieden, $\Delta$AR. = 26ˢ, $\Delta\delta$ = 3½', dass die Identität zwei- [felhaft sein kann. h. III. Klasse.
133 Position genau; aber in der Beschreibung differiren H. und h. erheblich.
25 Decl. gut, AR. 20ˢ zu vergrössern. Vermuthlich identisch mit II. 74.
16 Gut bestätigter Ort.
134 . . . . . . . . . .
135,136 . . . . . . . . . .
93 H. und h. in leidlicher Uebereinstimmung.
211 AR. bei h. 9ˢ grösser.
141 Im Nordkataloge nur e i n e unsichere und abweichende Position.
243 Beide Coordinaten erheblich abweichend von 2 Beob. bei h.
68 Decl. wie oben angesetzt 5' zu südlich.
162 Eine sehr gute Position.
69 h. setzt den Nebel mehr als 6' nördlicher (1 Beob.)
143 Steht 1°12' nördlicher, als oben nach H's Beob. angesetzt.

## Nebel erster Klasse.

| H. | h. | Rectascension 1850. | Praec. | Declination 1850. | Praec. | Beob. | Datum. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. 40 | 1520 | 194° 5′ 46″ | +16,″46 | − 4° 42′ 19″ | −19,″45 | 1 | 1784 April 24 |
| 130 | 3465 | 194 31 43 | 46,70 | − 7 12 37 | 19,41 | 2 | 86 März 3 |
| 42 | {1540 / 3472} | 195 29 36 | 46,72 | − 7 1 33 | 19,32 | 2 | 84 April 25 |
| 96 | 1547 | 196 2 40 | 41,76 | +37 48 19 | 19,27 | 2 | 85 Mai 1 |
| 85 | 1549 | 196 3 1 | 43,62 | +23 43 32 | 19,27 | 1 | 85 April 10 |
| 97 | 1564 | 196 39 34 | 41,67 | +37 23 23 | 19,21 | 1 | 85 Mai 1 |
| 138 | 3480 | 197 27 58 | 49,00 | −26 2 11 | 19,13 | 1 | 86 März 28 |
| 186 | 1623 | 200 55 39 | 38,08 | +18 1 40 | 18,73 | 2 | 87 Mai 12 |
| 34 | 1650 | 202 30 30 | 44,76 | + 9 39 1 | 18,52 | 2 | 84 April 15 |
| 98 | 1664 | 203 50 49 | 40,08 | +36 25 19 | 18,34 | 1 | 85 Mai 1 |
| 170 | ... | 204 42 49 | 38,65 | +41 28 45 | 18,21 | 2 | 87 März 18 |
| 180 | 1668 | 204 56 22 | 37,71 | +44 37 47 | 18,18 | 1 | 87 April 9 |
| 255 | 1674 | 205 32 10 | 29,98 | +61 44 58 | 18,09 | 1 | 90 März 19 |
| 256 | 1684 | 206 4 9 | 30,20 | +60 57 3 | 18,01 | 1 | 90 März 19 |
| 6 | 1703 | 207 7 12 | 45,11 | + 5 56 54 | 17,84 | 3 | 84 Jan. 19 |
| 187 | 1712 | 207 37 55 | 35,73 | +47 59 40 | 17,76 | 1 | 87 Mai 12 |
| 238 | ... | 207 39 10 | 29,81 | +60 12 19 | 17,76 | 2 | 89 April 24 |
| 181 | 1717 | 207 42 8 | 37,50 | +42 34 13 | 17,75 | 1 | 87 April 9 |
| 239 | ... | 207 42 43 | 29,64 | +60 27 20 | 17,75 | 3 | 89 April 24 |
| 240 | 1719 | 207 48 40 | 29,56 | +60 27 21 | 17,73 | 2 | 89 April 24 |
| 190 / 191 | {1723 / 1722} | 208 0 25 | 38,67 | +38 7 9 | 17,70 | 1 | 87 Mai 16 |
| 230 | 1736 | 208 48 57 | 31,79 | +55 54 21 | 17,57 | 2 | 89 April 14 |
| 231 | 1748 | 209 51 8 | 31,47 | +55 37 32 | 17,39 | 2 | 89 April 14 |
| 214 | ... | 209 54 46 | 32,09 | +54 25 14 | 17,38 | 1 | 88 Mai 1 |

### Bemerkungen.

I. 40 Scheint 3′ südlicher zu stehn; AR. nahe stimmend.
130 Der Kapkatalog gibt 7ˢ weniger in AR.
42 Wiederbeobachtet; Ort gut; Nebel ziemlich gross und hell.
96 Ziemlich in Uebereinstimmung mit 2 Beob. bei h., der den Nebel 3′ nördlicher macht.
85 AR. etwa 7ˢ zu vergrössern, Decl. gut.
97 Nahe richtige Position.
138 Bestätigt durch die Beob. im Südkataloge.
186 Wiedergesehn, sehr hell; wegen dieses Nebels siehe die vorstehenden Beobachtungen.
34 Eine gute Position.
98 AR. wenige Zeitsekunden zu klein.
170 . . . . . . . . .
180 Nach h wäre die AR. 21ˢ zu vergrössern; Decl. stimmt leidlich.
255 h. gibt der AR. 9ˢ weniger.
256 Eine sehr genaue Position.
6 Steht nach h. (4 gute Beob.) 3′ nördlicher.
187 AR. ist gegen 4 Beob. bei h. 15ˢ zu gross.
238 Nicht wiederbeobachtet.
181 Gut bestätigter Ort.
239 . . . . . . . . .
240 Bei h. ist die AR. 8ˢ kleiner und steht der Nebel 2′ nördlicher.
190.191 AR. und Decl. beide etwas zu vergrössern. Der von H. verglichene * ist 25441,42 Lalande.
230 Decl. gut, AR. vielleicht einige Zeitsekunden zu vergrössern.
231 Vortreffliche Uebereinstimmung mit h.
214 Häufig wiedergesehn: sehr gross, hell, verwaschen.

### Nebel erster Klasse.

| H. | h. | Rectascension 1850. | Praec. | Declination 1850. | Praec. | Beob. | Datum. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. 232 | ... | 210° 29′ 2″ | +31,″13 | +55° 43′ 38″ | −17,″28 | 1 | 1789 April 14 |
| 99 | 1776 | 213 5 31 | 37,76 | +37 11 6 | 16,80 | 2 | 85 Mai 1 |
| 144 | 1779 | 213 10 31 | 45,41 | + 3 24 18 | 16,78 | 1 | 86 April 30 |
| 145 146 | 1782 1783 } | 213 21 24 | 45,30 | + 3 37 20 | 16,75 | 1 | 86 April 30 |
| 235 | 1790 | 213 49 52 | 28,62 | +57 22 37 | 16,65 | 2 | 89 April 17 |
| 185 | 1818 | 215 25 59 | 33,68 | +46 48 9 | 16,34 | 2 | 87 Mai 11 |
| 70 | 1813 | 215 27 7 | 47,14 | − 5 19 19 | 16,34 | 1 | 85 März 5 |
| 236 | 1820 | 215 33 11 | 27,96 | +57 12 57 | 16,31 | 3 | 89 April 17 |
| 189 | 1842 | 216 50 44 | 31,66 | +50 8 22 | 16,04 | 1 | 87 Mai 15 |
| 237 | 1843 | 216 58 1 | 26,33 | +58 34 16 | 16,02 | 1 | 89 April 17 |
| 188 | 1848 | 217 38 4 | 31,74 | +49 27 56 | 15,88 | 2 | 87 Mai 12 |
| 182 | 1857 | 218 7 22 | 45,98 | + 0 23 23 | 15,77 | 2 | 87 April 11 |
| 184 | 1866 | 218 30 54 | 49,79 | −16 37 37 | 15,69 | 1 | 87 Mai 7 |
| 171 | 1873 | 219 9 21 | 34,45 | +42 31 26 | 15,55 | 2 | 87 März 18 |
| 126 | 1874 | 219 19 1 | 45,48 | + 2 36 13 | 15,51 | 1 | 86 Febr. 24 |
| 183 | 1875 | 219 38 6 | 45,96 | + 0 26 44 | 15,44 | 2 | 87 April 11 |
| 71 | 3587 | 223 13 27 | 47,71 | − 6 51 11 | 14,61 | 2 | 85 März 5 |
| 127 | 1896 | 223 23 14 | 45,51 | + 2 17 55 | 14,57 | 1 | 86 Febr. 24 |
| 128 | 1901 | 224 44 15 | 45,52 | + 2 14 16 | 14,24 | 1 | 86 Febr. 24 |
| 215 | 1909 | 225 27 35 | 24,63 | +56 18 13 | 14,06 | 1 | 88 Mai 5 |
| 148 | 1919 | 228 37 0 | +44,59 | + 5 36 22 | 13,25 | 1 | 86 Mai 1 |
| 280 | ... | 250 6 55 | −45,52 | +78 21 49 | 6,82 | 3 | 96 Dec. 1[illegible] |
| 147 | 3670 | 256 15 49 | +56,98 | −29 17 14 | 4,76 | 1 | 86 April 30 |
| 45 | 3671 | 256 49 44 | 56,41 | −27 56 3 | 4,57 | 2 | 84 Mai 24 |

### Bemerkungen.

I. 232 . . . . . . . . .

99 AR. etwa $15^s$ zu verkleinern.

144 Wiederbeobachtet; steht bei h. und am Himmel $1\frac{1}{2}$° nördlicher. Ziemlich hell.

145,146 Beobachtet; beide Nebel sind ziemlich klein und schwach; die Position gut.

235 Bei h. ist die AR. $20^s$ kleiner.

185 Keine gute Uebereinstimmung.

70 Hell und ansehnlich; Position gut.

236 h. macht die AR. in zwei Beob. $21^s$ kleiner, Decl. 2′ grösser.

189 Leidlich gute Uebereinstimmung mit h.

237 H's AR. scheint zu gross; Decl. gut.

188 In beiden Coordinaten beträchtlich abweichend von 1 Beob. im Nordkataloge.

182 Nahe an H's Orte wiederbeobachtet; deutlich wahrnehmbar.

184 Eine gute Position.

171 2 bis 3 Minuten von h's Orte abweichend.

126 Wiederbeobachtet, ziemlich hell. Die Position ist nahe richtig.

183 Im Nordkataloge nur 1, unsichere und abweichende Ortsbestimmung.

71 Vortrefflich stimmend mit der Position im Südkataloge. Wiederbeobachtet: gross, ziemlich [schwach.

127 Ort sehr gut stimmend. Wiederbeobachtet; leidlich hell.

128 Recht hell; H's Ort gut.

215 h. gibt, gleichfalls nur 1 Beob., $30^s$ mehr in AR.

148 Genaue Position.

280 Scheint seither niemals wiederbeobachtet.

147 Steht am Orte, leidlich hell.

45 Wiedergesehn; schwach und klein; H's Ort ziemlich gut stimmend.

Nebel erster Klasse.

| H. | h. | Rectascension 1850. | Praec. | Declination 1850. | Praec. | Beob. | Datum. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. 149 | ... | 258° 2′ 47″ | +52″,97 | −19° 24′ 32″ | − 1″,15 | 1 | 1786 Mai 28 |
| 48 | 3683 | 258 40 49 | 52,32 | −17 39 45 | 3,93 | 1 | 84 Juni 17 |
| 46 | 3681 | 258 41 29 | 55,74 | −26 13 21 | 3,93 | 1 | 84 Mai 24 |
| 44 | {1982 3697} | 262 23 28 | 54,84 | −23 49 47 | 2,66 | 2 | 84 Mai 21 |
| 150 | 1985 | 264 58 4 | 53,45 | −20 17 59 | 1,76 | 1 | 86 Mai 28 |
| 49 | 3720 | 268 27 53 | 57,64 | −30 2 10 | − 0,55 | 1 | 84 Juni 24 |
| 50 | 3742 | 273 36 3 | 57,81 | −30 25 52 | + 1,26 | 1 | 84 Juni 24 |
| 51 | 3748 | 275 28 46 | 55,67 | −25 42 25 | 1,92 | 1 | 84 Juli 12 |
| 47 | 3762 | 281 12 49 | 49,13 | − 8 51 35 | 3,90 | 1 | 84 Juni 16 |
| 103 | 2081 | 306 34 14 | 44,02 | + 7 14 23 | 11,94 | 1 | 85 Sept. 24 |
| 52 | 2097 | 313 36 56 | 42,02 | +15 33 33 | 13,83 | 4 | 84 Aug. 21 |
| 192 | 2099 | 314 4 11 | 26,27 | +53 56 35 | 13,94 | 3 | 87 Oct. 14 |
| 53 | 2172 | 337 32 12 | 40,99 | +33 29 12 | 18,53 | 2 | 84 Sept. 5 |
| 55 | 2205 | 344 22 33 | 44,96 | +14 31 12 | 19,31 | 3 | 84 Oct. 19 |
| 104 | {2228 3982} | 347 48 26 | 46,76 | − 9 18 1 | 19,60 | 1 | 85 Sept. 28 |
| 110 | 2261 | 352 48 9 | 46,68 | −13 49 53 | 19,89 | 2 | 85 Nov. 27 |
| 111 | 2262 | 353 2 21 | 46,63 | −13 8 53 | 19,90 | 2 | 85 Nov. 27 |

## Bemerkungen.

I 149 Gesehn Juni 1856; sehr schwach.
48 Sehr nahe stimmend. Wiederbeobachtet, hell, gross.
46 Nahe am Orte im Sudkataloge wiederbeobachtet.
44 Nahe richtiger Ort.
150 Eine gute Position.
49 Am Orte wiedergesehn; leidlich hell.
50 H's AR. ist 20′ zu gross.
51 Position schlecht in beiden Coordinaten; ziemlich hell, neubestimmt. Die Identität mit h 3748 wohl nicht zweifelhaft.
47 Am Orte wiederbeobachtet, hell, cometenartig.
103 Sehr schlechte Position, AR. 10′, Decl. ½° falsch. Hell, keine eigene Bewegung.
52 Die Decl. ist 3′ zu vergrössern; Nebel nicht hell; beobachtet.
192 AR. auch nach h's Wiederbeobachtung ganz zweifelhaft.
53 Decl. ist 9′ zu vergrössern; ziemlich hell und gut sichtbar. Ist Laugier 53.
55 Aeusserst schwach, kaum II. Klasse; H. „ansehnlich hell", h. „hell, ziemlich hell, ziemlich schwach".
104 Mehrmals vergeblich gesucht; kein Nebel erster Klasse.
110 Decl. bei h. 3′ nördlicher.
111 Ort nahe übereinstimmend.

## W. Herschel's Nebelflecke vierter Klasse.

### Planetarische Nebel u. s. w.

| H. | h. | Rectascension 1850. | Praec. | Declination 1850. | Praec. | Beob. | Datum. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| IV. 15 | 5 | 0° 41′ 0″ | +46,″18 | +26° 54′ 54″ | +20,″05 | 1 | 1784 Sept. 8 |
| 58 | 8 | 1 24 1 | 47,54 | +71 40 40 | 20,04 | 1 | 88 Nov. 25 |
| 42 | 151 | 25 16 1 | 46,83 | + 5 10 19 | 18,13 | 1 | 86 Sept. 30 |
| 23 | 223 | 34 57 52 | 45,70 | − 1 47 42 | 16,43 | 1 | 85 Jan. 6 |
| 43 | 281 | 43 55 3 | 58,71 | +42 16 34 | 14,44 | 2 | 86 Oct. 17 |
| 17 | ... | 46 39 29 | 45,17 | − 3 29 11 | 13,76 | 1 | 84 Sept. 20 |
| 77 | 2534 | 49 26 36 | 39,88 | −22 4 42 | 13,03 | 1 | 98 Dec. 19 |
| 53 | ... | 58 32 21 | 76,27 | +60 28 33 | 10,47 | 2 | 87 Nov. 3 |
| 69 | 311 | {59 58 46<br>{60 7 31 | 56,23 | +30 20 41}<br>20 7} | 10,03 | 1 | 90 Nov. 30 |
| 26 | 2618 | 61 49 27 | 41,93 | −13 8 32 | 9,47 | 2 | 85 Febr. 1 |
| 32 | 336 | 72 24 5 | 44,37 | − 5 3 49 | 6,06 | 2 | 85 Oct. 5 |
| 21 | 2860 | 81 47 3 | 38,03 | −22 2 10 | 2,87 | 1 | 84 Nov. 20 |
| 33 | ... | 82 16 19 | 43,68 | − 6 49 45 | 2,69 | 4 | 85 Oct. 5 |
| 24 | ... | 83 31 55 | 45,25 | − 2 18 40 | 2,26 | 1 | 85 Jan. 6 |
| 34 | 365 | 83 35 2 | 49,22 | + 8 59 54 | 2,24 | 2 | 85 Dec. 28 |
| 36 | ... | 84 52 2 | 46,14 | + 0 13 9 | + 1,79 | 3 | 86 Jan. 1 |
| 44 | 378 | 90 4 2 | 43,86 | − 6 15 12 | − 0,02 | 1 | 86 Nov. 28 |
| 19 | ... | 90 6 29 | 43,82 | − 6 23 11 | 0,03 | 1 | 84 Oct. 16 |
| 38 | 381 | 90 33 3 | 43,93 | − 6 18 25 | 0,19 | 2 | 86 Febr. 24 |
| 20 | 383 | 90 58 3 | 43,89 | − 6 10 31 | 0,34 | 1 | 1784 Oct. 16 |

### Bemerkungen.

IV. 15 h. 4 stimmt weder im Orte, noch in der Beschreibung mit diesem Nebelsterne überein; h. 5 steht freilich auch 5′ südlicher.

58 AR. 38ˢ grösser als bei h. aus 3 Beob.

42 Genaue Position; Lalande und Bessel haben den Stern nicht.

23 Am Orte beobachtet; hell, gross und gut sichtbar.

43 AR. genau übereinstimmend, Decl. bei H. 2′ grösser.

17 . . . . . . . . . .

77 Im Kapkataloge AR. 5ˢ grösser.

53 . . . . . . . . . .

69 Die erste Position ist die richtigere; wiederbeobachtet * 9 Gr.

26 Ort gut; sehr heller, planetarischer Nebel. h's Ort $1\frac{1}{3}^m$ zu klein in AR.

32 Der Nordkatalog setzt den Nebel 3′ südlicher.

21 Im Südkataloge ist die AR. etwas kleiner.

33 . . . . . . . . . .

24 Nebelstern 8 Gr., kommt bei Lalande und Bessel vor. Wiederbeobachtet.

34 Planetarischer Nebel = * 10.11 Gr. H's AR. 7′ im Bogen zu gross; wiederbeob.

36 . . . . . . . . . .

44 * 7 Gr. Lalande und Bessel; H's Ort schlecht.

19 AR. zu gross; Nebelstern 10 Gr. mit deutlich wahrnehmbarer Atmosphäre.

38 Position gut. Doppelstern 8.9 Gr. mit Nebel.

20 Nebelstern 11.12 Gr. am Orte wiederbeobachtet.

Nebel vierter Klasse.

| H. | h. | Rectascension 1850. | Praec. | Declination 1850. | Praec. | Beob. | Datum. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| IV. 3 | 393 | 96° 6′ 16″ | +19″,68 | +10° 17′ 59″ | − 2″,13 | 1 | 1784 Jan. 16 |
| 2 | 399 | 97 43 37 | 19,16 | + 8 52 45 | 2,70 | 1 | 83 Dec. 26 |
| 25 | 428 | 104 18 28 | 12,24 | −11 8 16 | 4,95 | 1 | 85 Jan. 31 |
| 65 | ... | 105 26 37 | 45,90 | − 0 28 29 | 5,31 | 1 | 90 März 5 |
| 45 | 450 | 110 3 17 | 53,37 | +21 13 26 | 6.87 | 2 | 87 Jan. 17 |
| 39 | {464, 3093} | 113 45 12 | 41,41 | −14 24 29 | 8,08 | 1 | 86 März 19 |
| 64 | 3095 | 113 47 50 | 40,15 | −17 52 16 | 8,09 | 2 | 90 März 4 |
| 22 | 472 | 116 31 41 | 39,12 | −25 57 29 | 8,96 | 2 | 84 Dec. 9 |
| 55 | 491 | 120 39 58 | 64,18 | +46 25 22 | 10,23 | 2 | 88 Febr. 6 |
| 35 | {513, 3127} | 126 36 22 | 41,56 | −15 37 46 | 11,95 | 1 | 85 Dec. 31 |
| 66 | 537 | 132 1 49 | 66,77 | +54 16 39 | 13,42 | 1 | 90 März 18 |
| 68 | 616 | 142 55 59 | 66,62 | +59 33 1 | 16,00 | 1 | 1790 März 19 |
| 79 | ... | 145 41 57 | 77,91 | +70 28 16 | 16,56 | 1 | 1802 Sept. 30 |
| 18 | 665 | 148 44 39 | 55,26 | +41 28 45 | 17,14 | 1 | 1787 März 18 |
| 10 | {710, 3246} | 154 16 9 | 48,87 | +17 53 43 | 18,06 | 1 | 84 März 21 |
| 27 | 3248 | 154 21 52 | 43,26 | −17 53 44 | 18,08 | 2 | 85 Febr. 7 |
| 60 | 731 | 157 22 10 | 56,79 | +54 16 33 | 18,51 | 2 | 89 April 12 |
| 6 | 777 | 160 59 37 | 46,82 | + 6 36 41 | 18,96 | 1 | 84 Febr. 23 |
| 29 | 792 | 161 27 24 | 44,33 | −15 8 55 | 19,01 | 1 | 85 Febr. 8 |
| 7 | 812 | 163 49 2 | 47,99 | +19 1 23 | 19,25 | 2 | 84 März 14 |

## Bemerkungen.

IV. 3 h. setzt diesen Nebelstern 2′ südlicher.

2 ∗ 10 Gr. mit hellem, fächerförmigem Nebel; beobachtet; ist = Laugier 12.

25 h. 428? Position und Beschreibung lassen die Identität nicht zweifelhaft.

65 . . . . . . . . .

45 Planetarischer Nebel = ∗ 8 9 Gr. Ort gut.

39 Position übereinstimmend, doch ist dieser planetarische Nebel nicht rund (H), sondern elliptisch; neu bestimmt.

64 Am angegebenen Orte vielfach wiederbeobachtet. Planetarischer Nebel = ∗ 9 Gr.

22 Eine unsichere Beob. bei h. weicht merklich ab.

55 In leidlicher Uebereinstimmung mit der Angabe des Nordkatalogs.

35 Ort gut; ∗ 12 Gr. mit Nebel. Abgebildet *Phil. Trans. Vol.* 74; wiederbeobachtet.

66 Steht nach h., nach einer Beob., 4′ nördlicher.

68 h. gibt der AR. 10ˢ weniger.

79 S. *Cape-Observ.* p. 128 Appendix.

18 Eine unsichere Beob. bei h. setzt die AR. 16ˢ kleiner.

10 AR. etwas zu gross; ∗ 9.10 Gr. mit Nebel, der beträchtlich heller ist, als bei H. und h. Siehe die vorstehenden Beobachtungen.

27 Sehr heller planetarischer Nebelfleck, der auch bei Lalande und Piazzi vorkommt. Wiederbeobachtet.

60 Im Nordkataloge ist die AR. 1 Zeitminute geringer.

6 h. gibt 69ˢ weniger in AR.

29 Steht nach einer Beob. 5′ südlicher und hat 10ˢ mehr in AR.

7 Hat am Himmel 27ˢ weniger und steht nach h. 5′ südlicher.

Nebel vierter Klasse.

| H. | h. | Rectascension 1850. | Praec. | Declination 1850. | Praec. | Beob. | Datum. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| IV. 59 | 877 | 168° 56′ 45″ | +49,″21 | +39° 23′ 28″ | −19,″67 | 1 | 1789 März 23 |
| 4 | 879 | 169 1 53 | 46,04 | − 0 18 27 | 19,68 | 2 | 84 Febr. 22 |
| 67 | 1015 | 176 50 8 | 47,88 | +59 21 2 | 20,02 | 1 | 90 März 18 |
| 62 | 1017 | 177 5 1 | 47,57 | +55 56 44 | 20,03 | 1 | 89 April 14 |
| 61 | 1030 | 177 26 58 | 47,30 | +54 12 43 | 20,03 | 2 | 89 April 12 |
| 28 | 1052,53 | 178 32 51 | 45,89 | −18 2 26 | 20,04 | 1 | 85 Febr. 7 |
| 56 | 1061 | 178 52 22 | 46,46 | +45 23 18 | 20,05 | 1 | 88 Febr. 6 |
| 54 | 1104 | 180 29 57 | 45,90 | +43 22 37 | 20,05 | 1 | 88 Jan. 14 |
| 5 | ... | 186 16 29 | 46,03 | + 0 55 20 | 19,93 | 2 | 84 Febr. 22 |
| 8} 9} | 1363 | 187 22 18 | 45,52 | +11 55 39 | 19,89 | 2 | 1784 März 15 |
| 78 | 1463 | 191 9 ... | 32,74 | +73 46 ... | 19,67 | 1 | 1801 Nov. 8 |
| 40 | ... | 192 0 19 | 46,96 | −12 14 14 | 19,61 | 1 | 1786 März 27 |
| 30 | 1499 | 192 59 19 | 42,83 | +35 41 1 | 19,54 | 2 | 85 Mai 1 |
| 47 | 1513 | 193 26 4 | 46,37 | − 3 46 2 | 19,50 | 1 | 87 März 11 |
| 70 | ... | 199 29 13 | 26,29 | +71 18 57 | 18,90 | 2 | 91 März 6 |
| 63 | 1625 | 201 5 12 | 33,97 | +59 10 21 | 18,74 | 1 | 89 April 24 |
| 46 | 1755 | 210 52 29 | 46,84 | − 4 19 43 | 17,21 | 1 | 87 Febr. 22 |
| 49 | 1758 | 211 25 12 | 46,50 | − 2 26 22 | 17,11 | 2 | 87 April 15 |
| 71 | 1904 | 225 7 57 | 41,19 | +19 0 38 | 14,21 | 1 | 91 Mai 24 |
| 50 | ... | 250 39 37 | 25,18 | +47 51 45 | 6,64 | 1 | 1787 Mai 12 |

## Bemerkungen.

IV. 59 Eine unsichere und abweichende Beobachtung im Nordkataloge.
4 Decl. bei h. 2′ nördlicher.
67 AR. scheint 20″ zu gross.
62 h's einzige Beobachtung gibt AR. 46″ kleiner.
61 = Laugier 37; vortrefflich stimmend. Sehr leicht wahrnehmbar (Juli 1848).
28 Mit dem ersten und helleren von beiden Nebeln eine schöne Uebereinstimmung.
56 Gute Position.
54 Beide Coordinaten beträchtlich abweichend von der einzigen, unsichern Beob. im Nordkataloge.
5 . . . . . . . . .
8, 9 } AR. gut; h. setzt diesen Doppelnebel über 5′ nördlicher (1 Beob.).
78 Steht bei h. 8′ nördlicher. Den genauen Ort des Vergleichsterns habe ich nirgend gefunden; auch nicht in Argelander's Zonen.
40 . . . . . . . . .
30 Eine genaue Position.
47 In sehr naher Uebereinstimmung mit dem Nordkataloge.
70 . . . . . . . . .
63 h. gibt in einer einzelnen Beob. die AR. 34″ kleiner.
46 Im Nordkataloge ist die AR. 11″ grösser.
49 h's AR. ist 6″ kleiner; Decl. stimmend.
71 ✶ 6 Gr. bei Lalande und Bessel. Ort bei H. nahe richtig, h's AR. 20″ zu gross; wiederbeob.
50 War bisher nur von Argelander, Zone 4, wiederbeobachtet, H's Ort ziemlich ungenau. — Ein heller planetarischer Nebel, neubestimmt.

### Nebel vierter Klasse.

| H. | h. | Rectascension 1850. | Praec. | Declination 1850. | Praec. | Beob. | Datum. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| IV. 57 | ... | 255° 55′ 1″ | +28,″24 | +42° 29′ 50″ | − 4,″88 | 2 | 1788 Juni 11 |
| 11 | (1981)<br>(3686) | 260 8 19 | 54,70 | −23 36 33 | 3,44 | 2 | 84 Mai 21 |
| 41 | (1991)<br>(3718) | 268 19 49 | +54,57 | −23 0 56 | 0,58 | 1 | 86 Mai 26 |
| 37 | ... | 269 41 9 | − 0,34 | +66 38 40 | − 0,11 | 1 | 86 Febr. 15 |
| 12 | 3730 | 270 3 31 | +55,82 | −25 56 55 | + 0,02 | 1 | 84 Mai 24 |
| 14 | 2032 | 286 41 54 | 47,08 | − 2 55 35 | 2,34 | 2 | 84 Juli 21 |
| 51 | 2047 | 293 51 12 | 50,80 | −14 31 10 | 8,11 | 2 | 87 Aug. 8 |
| 73 | 2050 | 295 10 33 | 24,30 | +50 10 8 | 8,54 | 1 | 93 Sept. 6 |
| 72 | ... | 304 45 59 | 32,76 | +37 56 47 | 10,55 | 1 | 92 Sept. 15 |
| 13 | 2072 | 302 26 54<br>31 54 | 36,26 | +30 6 51<br>5 51 | 10,76 | 2 | 84 Juli 17 |
| 16 | 2075 | 303 55 49 | 40,14 | +19 36 10 | 11,19 | 2 | 84 Sept. 16 |
| 76 | 2084 | 307 55 48 | 19,07 | +59 38 5 | 12,30 | 1 | 98 Sept. 9 |
| 1 | 2098 | 314 0 26 | 49,11 | −11 56 55 | 13,93 | 11 | 82 Sept. 7 |
| 74 | ... | 314 53 12 | 11,76 | +67 29 59 | 14,15 | 1 | 94 Oct. 18 |
| 75 | 2131 | 324 55 56 | 20,90 | +65 24 6 | 16,41 | 2 | 94 Oct. 18 |
| 31 | 2165 | 336 4 46 | 48,22 | −14 53 59 | 18,33 | 1 | 85 Oct. 3 |
| 52 | 2235 | 348 32 33 | 39,06 | +60 21 31 | 19,65 | 2 | 87 Nov. 3 |
| 18 | 2241 | 349 24 51 | 42,78 | +41 40 43 | 19,71 | 4 | 1784 Oct. 6 |

### Bemerkungen.

IV. 57 . . . . . . . . . .

11 Die mehrfach beobachtete AR. bei h. $18^s$ kleiner.

41 Der »dreispaltige« Nebel (= Messier 20); eine gute Position. Den ∗ innerhalb des Nebels haben Lalande und Argelander. Wiederbeobachtet.

37 . . . . . . . . . .

12 h. gibt $8^s$ weniger in AR.; im Kapkataloge irriger Weise VI. 12.

14 Steht nach h. 3′ südlicher.

51 Am Orte wiederbeobachtet; planetarischer Nebel = ∗ 8 Gr.

73 h. gibt der AR. $68^s$ mehr.

72 Ein Bessel'scher ∗ (Zone 314); H's AR. $3^s$ zu vergrössern.

13 AR. zu klein; ein sehr schwacher Ringnebel.

16 Lichtschwacher planetarischer Nebel, dessen Position bei H. sehr nahe richtig; wiederbeob.

76 Genau am Orte wiederbeobachtet.

1 Ort sehr gut. Planetarischer Nebel = ∗ 7.8 Gr. Siehe die vorstehenden Beobb. Ist Laugier $30^s$. Beschrieben von P. Secchi, Astr. Nachr. Nr. 1018.

74 . . . . . . . . . .

75 AR. scheint $15^s$ zu gross.

31 Eine sehr genaue Position.

52 In Uebereinstimmung mit der Beob. im Nordkataloge.

18 Heller planetarischer Nebel = ∗ 8 Gr. H's AR., wie oben angesetzt, ist nach Lalande, h. und meinen Beobachtungen 1 Zeitminute zu vergrossern. Beschrieben von Lord Rosse und P. Secchi.

## Verbesserungen.

S. 305 letzte Zeile v. u. lies 1853 statt 1835.

S. 309 Der Nebel h. 44 ist bereits im Jahre 1772 von Messier gefunden, bei Bildung seines Kataloges aber übersehn worden; vergl. Lalande's *Mélanges d'Astronomie*, Paris 1798, p. 461.

**VIERTER BAND:** Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Zweiter Band. Mit 19 Tafeln. 1855. Preis 6 Thlr. 20 Ngr.

Inhalt:

M. W. DROBISCH, über musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 1 Thlr.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit XVIII Tafeln. 1852. 1 Thlr. 10 Ngr.

P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 1 Thlr.

——— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2 + r'^2 - 2rr'$ (cos $U$ cos $U'$ + sin $U$ sin $U'$ cos $J$). 1854. 1 Thlr.

O. SCHLÖMILCH, über die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 8 Ngr.

——— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 16 Ngr.

P. A. HANSEN, die Theorie des Aequatoreals. 1855. 24 Ngr.

C. F. NAUMANN, über die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 10 Ngr.

A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. 1855. 20 Ngr.

**FÜNFTER BAND:** Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Dritter Band.

Hiervon ist bis jetzt erschienen:

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 12 Ngr.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 1 Thlr. 20 Ngr.

R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 16 Ngr.

H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 24 Ngr.

---

# SITZUNGSBERICHTE.

## KLEINERE ABHANDLUNGEN.

**BERICHTE** über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Erster Band. Aus den Jahren 1846 und 1847. Mit Kupfern. gr. 8. 12 Hefte.

—— Zweiter Band. Aus dem Jahre 1848. Mit Kupfern. gr. 8. 6 Hefte.

Vom Jahre 1849 an sind die Berichte der beiden Classen getrennt erschienen.

—— Mathematisch-physische Classe. 1849, 3 Hfte. 1850, 3 Hfte. 1851, 2 Hfte. 1852, 2 Hfte. 1853, 3 Hfte. 1854, 3 Hfte. 1855, 2 Hfte. 1856, 1 Heft.

—— Philologisch-historische Classe. 1849, 5 Hfte. 1850, 4 Hfte. 1851, 5 Hfte. 1852, 4 Hfte. 1853, 5 Hfte. 1854, 6 Hfte. 1855, 4 Hefte.

Jedes Heft der Berichte ist einzeln zu dem Preise von 10 Ngr. zu haben.

Aus den Berichten besonders abgedruckt:

Das Edict Diocletians de pretiis rerum venalium. Herausgegeben von *Th. Mommsen*. Mit Nachträgen. 1852. 14 Ngr.

M. Valerius Probus de notis antiquis. Herausgegeben von *Th. Mommsen*. 1853. 10 Ngr.

*Leipzig, April* 1856.

S. Hirzel.

# SCHRIFTEN

DER

# FÜRSTLICH-JABLONOWSKISCHEN GESELLSCHAFT

ZU LEIPZIG.

---

**ABHANDLUNGEN** bei Begründung der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtsfeier Leibnizens herausgegeben von der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft. Mit dem Bildnisse von Leibniz in Medaillon und zahlreichen Holzschnitten und Kupfertafeln. 61 Bogen in hoch 4. 1846. broch. Preis 5 Thlr.

Inhalt:

W. WACHSMUTH, Briefe von Leibniz an Christian Philipp.

A. F. MÖBIUS, Ueber eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik. Mit einer Tafel. (Einzeln 16 Ngr.)

M. W. DROBISCH, Ueber die mathematische Bestimmung der musikalischen Intervalle. (Einzeln 12½ Ngr.)

A. SEEBECK, Ueber die Schwingungen der Saiten. (Einzeln 10 Ngr.)

C. F. NAUMANN, Ueber die Spiralen der Conchylien. (Einzeln 16 Ngr.)

F. REICH, Elektrische Versuche. (Einzeln 7½ Ngr.)

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen. Mit Holzschnitten. (Einzeln 1 Thlr.)

E. H. WEBER, Zusätze zur Lehre vom Baue und den Verrichtungen der Geschlechtsorgane. Mit 9 Kupfertafeln. (Einzeln 1 Thlr. 10 Ngr.)

C. G. LEHMANN, Beiträge zur Kenntniss des Verhaltens der Kohlensäureexhalation unter verschiedenen physiologischen und pathologischen Verhältnissen. (Einzeln 10 Ngr.)

**PREISSCHRIFTEN** gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft.

1. H. GRASSMANN, Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Characteristik. Mit einer erläuternden Abhandlung von *A. F. Möbius.* hoch 4. 1847. 20 Ngr.
2. H. B. GEINITZ, das Quadergebirge oder die Kreideformation in Sachsen, mit Berücksichtigung der glaukonitreichen Schichten. Mit 1 color. Tafel. hoch 4. 1850. 16 Ngr.
3. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die Mondfinsternisse des Almagest. hoch 4. 1851. 10 Ngr.
4. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die wichtigeren Finsternisse, welche von den Schriftstellern des classischen Alterthums erwähnt werden. hoch 4. 1853. 20 Ngr.
5. H. B. GEINITZ, Darstellung der Flora des Hainichen-Ebersdorfer und des Flöhaer Kohlenbassins. hoch 4. Mit 14 Kupfertafeln in gr. Folio. 1854. 8 Thlr.

*Leipzig.* **S. Hirzel.**

---

Ferner ist bei mir erschienen:

**WIETERSHEIM**, E. von, Gedächtnissrede auf Seine Majestät Friedrich August, König von Sachsen, gehalten in der öffentlichen Sitzung der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften am 27. Oct. 1854. hoch 4. broch. 10 Ngr.

**S. Hirzel.**

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

W. G. HANKEL,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

# ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

ERSTE ABHANDLUNG

## ÜBER DIE MESSUNG DER ATMOSPHÄRISCHEN ELEKTRICITÄT NACH ABSOLUTEM MAASSE.

Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1856.

# ABHANDLUNGEN

DER

# KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

---

**ERSTER BAND:** Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Erster Band. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. broch. Preis 4 Thlr. 16 Ngr.

Inhalt:

A. F. MÖBIUS, über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. (Einzeln 24 Ngr.)

P. A. HANSEN, allgemeine Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1 - 2\,\alpha\,H + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von $\alpha$. (Einzeln 12 Ngr.)

A. SEEBECK, über die Querschwingungen elastischer Stäbe. (Einzeln 10 Ngr.)

C. F. NAUMANN, über die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. (Einzeln 10 Ngr.)

W. WEBER, elektrodynam. Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). (Einzeln 1 Thlr.)

F. REICH, neue Versuche mit der Drehwaage. (Einzeln 20 Ngr.)

M. W. DROBISCH, Zusätze zum florentiner Problem. (Einzeln 16 Ngr.)

W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus.) (Einzeln 20 Ngr.)

**ZWEITER BAND:** Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Erster Band. Mit einer Karte. hoch 4. 1850. broch. Preis 6 Thlr.

Inhalt:

A. WESTERMANN, Untersuchungen über die in die attischen Redner eingelegten Urkunden. 2 Abhandlungen. (Einzeln 1 Thlr.)

F. A. UKERT, über Dämonen, Heroen und Genien. (Einzeln 24 Ngr.)

TH. MOMMSEN, über das römische Münzwesen. (Einzeln 1 Thlr. 20 Ngr.)

E. v. WIETERSHEIM, der Feldzug des Germanicus an der Weser. (Einzeln 1 Thlr.)

G. HARTENSTEIN, Darstellung der Rechtsphilosophie des Hugo Grotius. (Einzeln 20 Ngr.)

TH. MOMMSEN, über den Chronographen vom Jahre 354. Mit einem Anhange über die Quellen der Chronik des Hieronymus. (Einzeln 1 Thlr. 10 Ngr.)

**DRITTER BAND:** Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Zweiter Band.

Hiervon ist bis jetzt erschienen:

W. ROSCHER, zur Geschichte der Englischen Volkswirthschaftslehre im sechzehnten und siebzehnten Jahrhundert. 1851. 1 Thlr.

——— Nachträge. 1852. 8 Ngr.

J. G. DROYSEN, Eberhard Windeck. 1853. 24 Ngr.

TH. MOMMSEN, Polemii Silvii laterculus. 1853. 16 Ngr.

——— Volusii Maeciani distributio partium. 1853. 6 Ngr.

J. G. DROYSEN, zwei Verzeichnisse, Kaiser Karls V. Lande, seine und seiner Grossen Einkünfte und anderes betreffend. 1854. 20 Ngr.

TH. MOMMSEN, die Stadtrechte der latinischen Gemeinden Salpensa und Malaca in der Provinz Baetica. 1855. 1 Thlr.

——— Nachträge. 1855. 16 Ngr.

# ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

**W. G. HANKEL.**

## ERSTE ABHANDLUNG

## ÜBER DIE MESSUNG DER ATMOSPHÄRISCHEN ELEKTRICITÄT NACH ABSOLUTEM MAASSE.

Obwohl schon seit einem Jahrhundert die Elektricität der Wolken und des heitern Himmels bekannt, und im Laufe dieses langen Zeitraums auch vielfach der Gegenstand sorgfältiger Beobachtungen und Versuche gewesen ist, so sind unsere Kenntnisse über dieselbe doch noch sehr mangelhaft, und zwar nicht nur in Bezug auf die Quelle, aus welcher sie stammt, sondern eben so sehr auch in Bezug auf die Grösse der dabei wirksamen Kräfte. Für die Bestimmung der Grösse dieser letztern gibt es, da die Umstände nicht gestatten, die Menge der in den einzelnen Wolken und den verschiedenen Schichten der Atmosphäre vorhandenen Elektricität zu messen, nur einen Weg, nämlich die Beobachtung der Wirkungen, welche diese Elektricität in die Ferne ausübt. Leider aber sind wir auch hier wieder beschränkt, indem wir diese Wirkungen nur an solchen Punkten, welche nahe an der Oberfläche der Erde liegen und unsern Messinstrumenten zugänglich sind, zu beobachten vermögen.

Die Untersuchung über die atmosphärische Elektricität befindet sich sonach in einer ganz ähnlichen Lage wie die Untersuchung über den Erdmagnetismus; denn die letztere ist ebenfalls nur auf die Beobachtung der Richtung und Stärke der erdmagnetischen Kraft an den verschiedenen Punkten der Erdoberfläche angewiesen. Die eigentliche Vertheilung des Magnetismus innerhalb der Erde, wenn wir ihn für den Augenblick im Sinne der ältern Theorie als eine selbstständige Kraft betrachten, erfahren wir durch solche Beobachtungen nicht.

Wenn daher von einer Messung der atmosphärischen Elektricität die Rede ist, so kann dieser Ausdruck zufolge des Vorhergehenden begreiflicherweise nur den Sinn haben, dass die Resultirende aus der Einwirkung der in der Atmosphäre und der Oberfläche der Erde vor-

handenen Elektricität auf die in der Nähe der eben genannten Oberfläche gelegenen Punkte gemessen werden soll. In diesem Sinne ist daher auch in dem Folgenden stets der Ausdruck Stärke oder Intensität der atmosphärischen Elektricität zu verstehen.

Da den Gegenstand dieser Abhandlung nicht sowohl die einfache Nachweisung der atmosphärischen Elektricität und ihrer je nach den verschiedenen Zuständen der Atmosphäre positiven oder negativen Beschaffenheit, sondern vielmehr die genaue Messung derselben ausmachen soll, so liegt ein ausführlicher Bericht aller bisher über die atmosphärische Elektricität angestellten Beobachtungen, in so weit sie nicht auf eine Messung derselben mit Bestimmtheit gerichtet sind, ausserhalb des Kreises dieser Abhandlung; ich beschränke mich daher auf eine kurze Anführung der behufs einer Messung der atmosphärischen Elektricität bisher angewandten Verfahrungsarten, und werde mich desshalb auch nicht auf eine ins Einzelne sich verlierende chronologische Aufzählung der von den verschiedenen Beobachtern eingeschlagenen Wege einlassen, sondern mich begnügen, die bisher angewandten Methoden im Allgemeinen auseinander zu setzen, um dadurch Gelegenheit zur Darstellung des Mangelhaften und Ungenügenden in denselben, und somit eine Rechtfertigung des von mir gemachten Versuches, etwas Besseres an ihre Stelle zu setzen, zu gewinnen.

## I. Frühere Verfahren zur Bestimmung der atmosphärischen Elektricität.

Die Verfahrungsarten, welche bisher benutzt worden sind, um die atmosphärische Elektricität zu messen, lassen sich im Allgemeinen in zwei Abtheilungen bringen, nämlich erstens in solche, bei welchen die für die unmittelbare Einwirkung der atmosphärischen Elektricität bestimmten Vorrichtungen feststehen, und zweitens in solche, bei denen die ganzen Vorrichtungen oder wenigstens einige ihrer Theile, welche die eben erwähnte unmittelbare elektrische Einwirkung empfangen sollen, jedes Mal behufs einer Bestimmung der Stärke der atmosphärischen Elektricität bewegt werden müssen.

### 1. *Beobachtungen an ruhenden Apparaten.*

Unter übrigens gleichen Umständen wird man der Bequemlichkeit und Sicherheit der Ausführung wegen demjenigen Verfahren, bei wel-

chem zur die Messung bestimmten Apparate ruhig in ihrer Stellung verbleiben, stets den Vorzug geben vor allen andern, bei welchen diese Apparate für jede einzelne Messung von einem Orte zum andern bewegt werden müssen, weil in dem ersten Falle unter sonst gleich günstigen Bedingungen die mit jeder Messung unvermeidlich verbundenen Fehler sich in viel engere Grenzen einschliessen lassen als in dem zweiten, wo offenbar die zu einer genauen Einstellung aller Theile des Apparates, wie sie nach jeder Ortsveränderung nöthig wird, erforderliche Zeit mangelt. Indess waren die Anwendungen, welche man bisher von feststehenden Apparaten zur Messung der atmosphärischen Elektricität gemacht hat, für diesen Zweck, wie sich leicht nachweisen lässt, nicht geeignet und konnten in keiner Weise zur Erzielung eines genauen Resultates dienen.

Um das Unzweckmässige der bisherigen Anwendung dieser Apparate einzusehen, bedarf es nur der Erinnerung, dass es sich bei der Messung der atmosphärischen Elektricität um die Messung ihrer Wirkung in die Ferne mittelst der dadurch in einem Leiter erregten Vertheilung handelt; wesshalb gleich von vornherein jede Vorrichtung, welche diese Vertheilung nicht ungetrübt und unvermischt wahrzunehmen gestattet, sofort zurückzuweisen ist. Der Vorwurf, diese Vertheilung nicht rein, sondern durch vielfache Nebenumstände getrübt und verdeckt darzustellen, trifft aber alle bisherigen Vorrichtungen, und zwar in gleicher Weise die grössern für immer fest aufgestellten, als auch die kleinern tragbaren, welche nach Belieben auf einem im Freien ausgewählten Standpunkte aufgestellt werden können. Auch macht es dabei keinen Unterschied, ob die zur eigentlichen Messung der durch Vertheilung in den aufgestellten Leitern erregten Elektricität dienenden Vorrichtungen unzertrennlich mit diesen Leitern verbunden sind oder ihnen nur von Zeit zu Zeit genähert werden; und eben so wenig vermag etwa die besondere Construction dieser Elektrometer, mögen sie Goldblatt-, Strohhalm- oder Torsions-Elektrometer sein, den zuvor erwähnten Mangel zu beseitigen.

Bekanntlich bestehen die Vorrichtungen dieser ersten Abtheilung aus mehr oder weniger langen an dem obern Ende zugespitzten und auf einem hervorragenden Orte isolirt aufgestellten leitenden Stangen oder Stäben (Conductoren), und man schliesst aus der Elektricität ihres untern Endes auf eine gleichnamige Elektricität in der Atmosphäre. Unter zwei Bedingungen nun würde die in dem untern Ende eines sol-

chen Conductors angehäufte Elektricität zur Messung der in der Atmosphäre vorhandenen dienen können: nämlich erstens, wenn dieser Conductor vollkommen isolirt wäre und nach seiner Aufstellung im nicht elektrischen Zustande auch keinen Verlust an irgend einer Elektricität durch Ausströmen aus der Spitze des obern Endes oder durch Mittheilung an die umgebende Luft erlitte, wenn er also stets ein gleich grosses Quantum durch Vertheilung von Seiten der Atmosphäre geschiedener positiver und negativer Elektricität besässe; und zweitens, wenn das obere Ende des Conductors mit einer Spitze von solcher Beschaffenheit versehen wäre, dass jede daselbst sich anhäufende Elektricität augenblicklich ausströmen könnte, und daher der Conductor stets nur eine Art von Elektricität, nämlich die der atmosphärischen gleichnamige enthielte. In beiden Fällen würde der elektrische Zustand des Conductors allein von dem jedesmaligen elektrischen Zustande der Atmosphäre abhängen und folglich als ein Maass für denselben dienen können.

Bei einem mit einer gewöhnlichen Drahtspitze versehenen Conductor finden aber die angegebenen Bedingungen nicht statt; ein solcher Conductor strahlt vielmehr durch seine Spitze die der atmosphärischen ungleichnamige Elektricität theilweise aus, gibt ferner an die ihn berührende Luft einen Theil seiner Elektricität ab oder empfängt, im Falle diese selbst elektrisch ist, von ihr, und verliert bei der mangelhaften und zu den verschiedenen Zeiten des Tages und des Jahres möglicherweise ungleichen Isolation einen mehr oder weniger grossen Theil der Elektricität seines untern Endes. Wer vermag nun, wenn ein solcher Conductor stundenlang gestanden hat, aus dem Zustande der Elektricität seines untern Endes einen sichern Schluss auf die Stärke der atmosphärischen Elektricität zu machen? Es stellt ja die Elektricität im untern Ende des Conductors nicht das einfache Resultat einer Einwirkung des augenblicklich vorhandenen Zustandes der Atmosphäre, sondern das sehr zusammengesetzte Resultat aus der gegenwärtigen Einwirkung und den Ueberresten aus den Einwirkungen der vorhergehenden Zeitmomente dar, und der Irrthum bei einem Schlusse von der Elektricität im untern Ende des Conductors auf den elektrischen Zustand der Atmosphäre kann unter Umständen selbst so gross werden, dass man grade die entgegengesetzte Elektricität von der zur Zeit der Beobachtung in der Atmosphäre wirklich vorhandenen findet.

Da die Flamme und die von ihr ausgehende Dampfsäule rücksicht-

lich der Vertheilung und Leitung der Elektricität sehr vollkommenen Spitzen gleichen, so könnte man eine wesentliche Verbesserung zu bewirken glauben, wenn man das obere Ende eines aufgerichteten Conductors mit einer Flamme versähe. Und in der That wird ein Conductor durch dieses von Bennet und Volta fast gleichzeitig angegebene Mittel viel geschickter, um auch bei sehr geringer Stärke der atmosphärischen Elektricität eine für die Wahrnehmung noch hinreichend grosse elektrische Spannung in seinem untern Theile zu veranlassen. Aber zur genauen Messung der atmosphärischen Elektricität ist derselbe durch die hinzugefügte Flamme doch nicht tauglich geworden. Denn selbst wenn die Flamme die in dem obern Ende des Conductors durch die Elektricität der höher gelegenen Luftschichten erregte Elektricität vollständig und augenblicklich zerstreute, und die Elektricität der in der Nähe des Conductors gelegenen Luftschichten dadurch nicht veränderte, sowie durch ihre eigene Elektricität das Resultat nicht trübte, so bildet sie doch mit ihrer Dampfsäule keinen starren, sondern vielmehr einen in seiner Ausdehnung, Form und Lage höchst veränderlichen und beweglichen Leiter, der durch diese Aenderungen, wie ein bewegter Leiter bei den Instrumenten der zweiten Klasse, stets eine entsprechende Elektricitätserregung in dem Conductor veranlasst. Man sieht also auch hier, dass die Elektricität des untern Endes dieses Conductors in keiner einfachen und festen Beziehung zu der Stärke der atmosphärischen Elektricität steht. Wollte man auch noch von den eben bezeichneten Uebelständen absehen, so würde dessenungeachtet eine solche Vorrichtung in keiner Weise dienen können, um die Stärke der Elektricität auf ein absolutes Maass zurückzuführen, was hier keines besonderen Beweises bedarf, da es aus den spätern Abschnitten dieser Abhandlung ohne Weiteres hervorgehen wird.

### 2. *Beobachtungen an bewegten Apparaten.*

Die Vorrichtungen der zweiten Abtheilung unterscheiden sich, wie oben schon angeführt, von denen der ersten dadurch, dass sie bei jeder Beobachtung der atmosphärischen Elektricität ganz oder wenigstens in denjenigen Theilen, welche der unmittelbaren Einwirkung dieser Elektricität ausgesetzt sind, bewegt werden müssen. Sie gründen sich ebenfalls sämmtlich auf das bekannte Gesetz der sogenannten elektrischen Vertheilung.

Man hat dieses Gesetz auf mehrfache Weise zur Beobachtung und Messung der atmosphärischen Elektricität zu benutzen versucht. Das Emporschleudern einer Kugel oder das Abschiessen eines Pfeiles, welche anfangs durch einen leitenden Faden mit einem Elektrometer verbunden sind, der jedoch zuletzt sich von dem Elektrometer ablöst und dasselbe mit einer der atmosphärischen gleichnamigen Elektricität geladen zurücklässt, kann, wenn es sich um eigentliche Messung handelt, wegen des nie in gleicher Weise zu wiederholenden Vorganges wohl nicht in Betracht kommen. Es bleiben daher nur diejenigen Verfahren übrig, bei welchen starre Leiter in Bewegung gesetzt werden, und zwar entweder die blossen Leiter für sich oder zugleich in Verbindung mit einem Elektrometer.

Wenn man die beiden Orte, an welchen der Leiter sich zu Anfang und zu Ende seiner Bewegung befindet, so wählt, dass sie einer ungleich starken Einwirkung der atmosphärischen Elektricität unterliegen, so wird allerdings die Aenderung in dem elektrischen Zustande des Leiters bei dem Uebertragen von dem ersten Orte nach dem zweiten als Mittel zum Nachweise einer in der Atmosphäre vorhandenen Elektricität überhaupt dienen können: zu einer eigentlichen Messung der ganzen Vertheilungswirkung der Atmosphäre ist sie jedoch nicht geeignet.

Man hebt bei diesem Verfahren entweder bloss einen isolirten Leiter in die Höhe, berührt ihn an seinem untern Ende ableitend, und senkt ihn dann bis zur Berührung mit einem im Freien einige Fusse über dem Erdboden stehenden Elektrometer; oder man hebt und senkt den Leiter zugleich mit dem Elektrometer, nachdem man ihn zuvor an seinem untern Theile ableitend berührt hat. Die Grösse des auf diese Weise am Elektrometer erhaltenen Ausschlages gestattet keinen sichern Schluss auf die Stärke der atmosphärischen Elektricität, selbst wenn man die einfache Voraussetzung machen dürfte, dass die elektrische Vertheilungswirkung allein von der Atmosphäre abhinge. Jener Ausschlag misst nur die Differenz der Vertheilungswirkungen an dem obern und untern Orte; aber Niemand kann mit Sicherheit dafür bürgen, dass diese Differenz unter allen Umständen der ganzen Wirkung der atmosphärischen Elektricität proportional ist. Die zuvor ausgesprochene Voraussetzung ist aber nicht einmal erlaubt. Die auf den Leiter ausgeübte Vertheilungswirkung hängt keineswegs blos von der in der Atmosphäre vorhandenen Elektricität, sondern gar sehr auch von dem Einflusse des Bodens ab, so dass aus

der in dem elektrischen Zustande eines Leiters durch eine Hebung oder Senkung eingetretenen Veränderung um so weniger die wirkliche Grösse der atmosphärischen Elektricität hergeleitet werden kann, als die Lage des Leiters gegen den Erdboden in der obern und untern Stellung eine verschiedene ist. Wollte man indess auch dieses Verfahren noch gelten lassen, wenn es sich nur um angenäherte Relationen in der Stärke der atmosphärischen Elektricität auf einem und demselben Standorte handelte, so würde es doch zu durchaus falschen Resultaten führen, wenn man die an zwei verschiedenen Standpunkten von ungleicher Gestaltung der umliegenden Erdoberfläche (z. B. auf einem ausgedehnten ebenen Felde und auf einer Bergspitze) durch das in Rede stehende Verfahren erhaltenen Ausschläge des Elektrometers als proportional der Stärke der atmosphärischen Elektricität an diesen beiden Orten betrachten wollte.

Um die ganze Stärke der atmosphärischen Elektricität zu messen, muss der eine der beiden Orte so gewählt werden, dass er gar keine Einwirkung von Seiten der Atmosphäre erfährt; dann allein gewährt die Aenderung in dem elektrischen Zustande eines Leiters bei dem Uebergange von diesem Orte zu einem andern, welcher jener Wirkung ausgesetzt ist, oder umgekehrt, ein Maass für die Vertheilungswirkungen der ganzen atmosphärischen Elektricität (selbstverständlich mit Einschluss der Wirkungen der Erdoberfläche) an diesem andern Orte. Man kann den ersten Ort, an welchem die atmosphärische Elektricität gar keine Wirkung ausübt, leicht dadurch gewinnen, dass man das Elektrometer sammt seinem Leiter in einen von Leitern rings umschlossenen Raum bringt, wie auch Saussure in einigen Fällen bereits gethan und Quetelet nach Peltier's Anleitung in einer mehrere Jahre hindurch fortgesetzten regelmässigen Reihe täglicher Beobachtungen ausgeführt hat. Quetelet erhebt bei seinen Messungen das Elektrometer zuerst im Freien auf dem Dache eines Thurmes auf eine bestimmte Höhe, berührt es in dieser Stellung so nahe als möglich am untern Ende seines Leiters ableitend und trägt es darauf in einen bedeckten Raum, woselbst dann die zuvor von Seiten der Atmosphäre gebundene Elektricität frei wird. Saussure's Elektrometer war mit einem oben zugespitzten Leiter versehen, was offenbar für dieses Verfahren nicht zweckmässig ist, indem die Spitze Veranlassung zur Ausströmung der Elektricität gibt; dieser Vorwurf trifft nicht die von Peltier construirte Vorrichtung, mittelst welcher

Quetelet seine Beobachtungen in Brüssel gemacht hat, indem diese an ihrem obern Ende von einer ziemlich grossen Kugel begrenzt wird.

Obwohl das von Quetelet angewandte Verfahren sich auf das richtige Princip stützt, so genügt es nach meinem Dafürhalten doch noch nicht allen Ansprüchen, welche daran gemacht werden müssen. Das Peltier'sche Elektrometer misst bekanntlich die in ihm angehäufte Elektricität durch die Abstossung einer beweglichen auf einer Spitze schwebenden und mit einem kleinen, schwachen Magnete versehenen Nadel von einem feststehenden Drahte. Der feststehende Draht wird in den magnetischen Meridian gestellt, und in diesem liegt auch die bewegliche Nadel, wenn das Instrument keine Elektricität enthält; nimmt es aber solche auf, so wird die bewegliche Nadel abgestossen, und der Winkel, bei welchem dieselbe zur Ruhe kommt, kann zur Herleitung eines Maasses für die vorhandene Elektricität benutzt werden. Die Beziehung zwischen diesem Ausschlagswinkel und der Intensität der ihn erzeugenden Elektricität ist aber nicht so einfach, dass man dieselbe durch blosse Rechnung herzuleiten vermöchte; es bleibt daher Nichts übrig, als dieselbe ganz auf empirischem Wege durch Vergleichung mit einem andern Messinstrumente z. B. einer Drehwage zu bestimmen. Dabei findet sich dann, dass die Intensitäten der Elektricität bedeutend stärker wachsen, als die Grade der zugehörigen Ausschlagswinkel, wesshalb die Genauigkeit der Bestimmung der erstern mit dem Wachsen der letztern abnimmt. Wenn z. B. bei dem von Quetelet gebrauchten Elektrometer nach den von Peltier durch Vergleichung mit einer Drehwage gemachten Bestimmungen die Elektricität 1 die Nadel von $0^0$ bis $1^0$ ablenkt, so bedarf es eines Zuwachses der Elektricitätsmenge um 3, um die Nadel von $14^0$ auf $15^0$, und um 8, um sie von $35^0$ auf $36^0$, und um 30, um sie von $56^0$ auf $57^0$ u. s. f. zu treiben.

Da ferner die bewegliche Nadel auf einer Spitze schwebt, so darf die Richtkraft des kleinen mit ihr verbundenen Magnets nicht gar zu gering sein, weil sonst die Nadel sich nicht genau wieder einstellt; dann aber wird auch wieder eine entsprechend grössere elektrische Kraft nöthig, um eine bestimmte Ablenkung zu erhalten. Diese stärkere Elektricität erfordert wieder eine bessere Isolirung, die hier um so nöthiger wird, als einige Zeit verfliesst, ehe das Elektrometer nach seiner ableitenden Berührung im Freien in das Haus zurückgebracht wird, und hier zur Ablesung bereit ist. In Betreff der Schwierigkeit eine hinlänglich

gute oder sich stets gleichbleibende Isolation zu erhalten, genügt die Verweisung auf Dellmann's Abhandlung in *Poggendorff's Annalen* Bd. 89 S. 262 ff. Die von Lamont gewählte Isolirung mit Gutta percha ist jedenfalls ungenügend, wie auch wohl aus Lamont's Worten selbst erhellt. Er sagt (*Abhandlungen der Baierschen Akademie* Bd. 6 S. 435 in der Anmerkung): »Nur ein grosser Uebelstand bietet sich hierbei dar, dass nämlich die Gutta percha hygroskopisch ist, und an einen feuchten Ort hingestellt, in ganz kurzer Zeit die Isolirungsfähigkeit verliert. Ein Elektrometer, welches auf solche Weise unbrauchbar geworden ist, wird erst wieder brauchbar, wenn man es längere Zeit an einem trockenen Orte aufbewahrt.«

Quetelet hat keine directen Versuche mitgetheilt, woraus sich die Genauigkeit, welche das Instrument bei den Messungen gestattet, entnehmen liesse; aus einer mitgetheilten Tabelle dreier Versuchsreihen über die Abnahme des Ausschlags, wenn die im Elektrometer vorhandene Elektricität durch Berührung mit einem zweiten, genau gleichen Instrumente halbirt wird, mag ich keinen strengen Schluss auf diese Genauigkeit machen, weil bei dieser Halbirung durch die Nähe des Körpers des Beobachters und andere Umstände leicht beträchtliche Störungen eintreten können. Jedenfalls aber scheinen diese Versuchsreihen, wie man leicht findet, wenn man jeden Werth mit seinem unmittelbar nachfolgenden vergleicht, zu der Annahme zu berechtigen, dass, weil bei der geringen Länge der Nadel nur ein getheilter Kreis von kleinem Halbmesser angewendet werden konnte, und bei etwas grössern Ausschlägen die Intensitäten der Elektricität für jeden einzelnen Grad so bedeutend zunehmen, durch eine einmalige Messung keine grosse Genauigkeit verbürgt werden kann. Und doch ist grade bei dem beabsichtigten Zwecke der Messung der atmosphärischen Elektricität nach diesem Verfahren immer nur eine einzige Messung möglich.

Wahrscheinlich liegt eine ziemlich bedeutende Fehlerquelle bei den mit diesem Instrumente gemachten Messungen in der Art und Weise, wie bei der von Peltier dem Instrumente gegebenen Einrichtung die Ausschläge abgelesen werden müssen. Um nämlich die Parallaxe zu vermeiden, lässt Peltier diese Winkel an zwei getheilten Kreisen ablesen, deren einer auf dem Boden, und der andere auf dem gläsernen Deckel des cylindrischen Gefässes, welches die Nadeln umschliesst, angebracht ist. Behufs der allein von oben her möglichen Ablesung muss

nothwendig der Kopf des Beobachters dem aus dem Cylinder hervorragenden Theile des Leiters mehr oder weniger nahe kommen, wodurch, auch abgesehen von vielleicht zufällig in den Haaren vorhandener eigenen Elektricität die Vertheilung der Elektricität in jenem Leiter abgeändert und namentlich ihre Stärke in der Nadel geschwächt werden muss. Der Betrag dieser Aenderungen wird nun aber je nach der Stellung des Kopfes mehr oder weniger gross ausfallen. Die von Lamont bei einem ähnlich construirten Instrumente angewandte Ablesung mittelst eines unterhalb des auf Glas getheilten Kreises befindlichen Spiegels, der mit dem Horizonte einen Winkel von $45^0$ bildet, ist von diesem Fehler frei.

Dem Gebrauche des Peltier'schen Instrumentes lässt sich noch der Vorwurf machen, dass dasselbe in seinen Angaben sich mit der Zeit ändern kann, wenn die Kraft des kleinen Magnets sich vermindert, wozu durch die öftere Bestrahlung der Sonne hinreichend Veranlassung gegeben wird. Eine Bürgschaft für die unverändert gebliebene Richtkraft derselben könnte jedoch durch die Bestimmung der Schwingungsdauer der an einem Coconfaden aufgehangenen Nadel erhalten werden.

Das Aufstellen und Uebertragen des Peltier'schen Instrumentes von dem einen Orte zum andern nimmt stets eine ziemliche Zeit in Anspruch, und man wird in Fällen, wo die Elektricität sich sehr schnell ändert, und also Beobachtungen in sehr kurzen Zeiträumen nöthig werden, dieselben nicht in gewünschter Schnelligkeit einander folgen lassen können, da eine jede einzelne Beobachtung eine zweimalige Uebertragung des Instrumentes (hin und zurück), eine zweimalige Aufstellung, die eine sogar behufs einer Messung und ausserdem die nöthige Zeit zum ruhigen Einstellen der Nadel und zum Ablesen ihres Standes erfordert. Das Hin- und Hertragen eines Messinstrumentes mit beweglichen Theilen dürfte wohl niemals zu den Bequemlichkeiten eines Verfahrens gerechnet werden.

Im Jahre 1853 hat Dellmann in *Poggendorff's Annalen* Bd. 89 S. 258 seine Beobachtungen über die Luftelektricität und das von ihm dabei angewandte Verfahren bekannt gemacht. Dellmann benutzt als Elektrometer die von ihm construirte Drehwage. Als Körper, welcher der vertheilenden Einwirkung der atmosphärischen Elektricität ausgesetzt wird, dient eine messingene Kugel, welche mittelst einer eigends dazu construirten Vorrichtung in die Höhe gehoben, nach ableitender Berüh-

rung gehörig isolirt, darauf heruntergelassen und in das Zimmer getragen wird, um einen Theil der auf ihr jetzt frei gewordenen Elektricität zum Elektrometer überzuführen und zu messen. Unter der Voraussetzung grosser Umsicht und Sorgfalt in der Behandlung der genannten Vorrichtungen lassen sich auf diesem Wege vergleichbare Werthe für die Intensität der atmosphärischen Elektricität an einer und derselben Stelle erhalten. Das angewandte Verfahren würde sich aber nur sehr schwer für die Gewinnung absoluter Messungen umgestalten lassen; auch gestattet es keinen Transport der Apparate auf beliebige Orte im Freien. Diese beiden Forderungen aber, nämlich die Gewinnung absoluter Werthe und die Messung auf vollkommen freien, von den Rauchsäulen bewohnter Orte ganz entfernten Standpunkten sind, wenn unsere Kenntniss der atmosphärischen Elektricität wahrhaft vorwärts schreiten soll, unerlässlich zu erfüllen.

Wie aus dem Vorstehenden sich ergibt, genügt keines der bis jetzt für die Messung der atmosphärischen Elektricität eingeschlagenen Verfahren völlig allen an dasselbe zu machenden Ansprüchen. Ich habe daher die Messung dieser Elektricität auf einem im Princip mit den zuletzt besprochenen Methoden übereinstimmenden, aber in der Ausführung ganz davon abweichenden Wege zu erlangen gesucht, und mich dabei ganz besonders von der Rücksicht leiten lassen, den Apparat transportabel zu machen, und die mit ihm angestellten Messungen auf ein absolutes Maass zurückführen zu können, wodurch allein eine Vergleichung der zu verschiedenen Zeiten an verschiedenen Orten mit verschiedenen Instrumenten ausgeführten Messungen ermöglicht wird.

Wie jedes Neue aber nicht gleich auf einmal in vollkommener Weise gewonnen werden kann, so verhehle ich mir keinesweges, dass in den Einzelheiten des von mir gewählten Weges noch manche Verbesserungen eingeführt werden können. Wenn ich dessenungeachtet kein Bedenken getragen habe, diese Arbeit auch in der vorliegenden Form zu veröffentlichen, so geschieht es grade in der bestimmten Erwartung, der Wissenschaft durch die schon jetzt erfolgte Veröffentlichung einen grössern Dienst zu leisten, als durch noch Jahre langes Zurückhalten; denn der Hoffnung glaube ich mich überlassen zu dürfen, dass die in derselben ausgesprochenen Grundsätze über die Messung der

atmosphärischen Elektricität und ihre Zurückführung auf ein absolutes Maass, sowie die dazu im Allgemeinen von mir angegebenen Methoden den Beifall der Physiker erhalten werden, und dass diejenigen unter ihnen, welche an der Entwickelung dieses Zweiges der Elektricitätslehre gleiches Interesse mit mir nehmen, nicht säumen werden, ihre Kräfte mit den meinigen zu vereinigen, um in rascherer Weise den Ausbau dieses Theiles der Physik zu fördern, die von mir noch zurückgelassenen Mängel zu beseitigen oder auch die von mir angegebenen Methoden durch bessere und vollkommnere zu ersetzen.

## II. Beschreibung der von mir zur Messung der atmosphärischen Elektricität angewandten Elektrometer.

Wie schon im Eingange dieser Abhandlung erwähnt, kann eine Messung der atmosphärischen Elektricität nur die Bedeutung haben, dass die Grösse der Vertheilung, welche dieselbe an irgend einem Punkte der Erde ausübt, gemessen werden soll. Dem Einflusse dieser atmosphärischen Elektricität muss also ein bis dahin nicht elektrischer isolirter Leiter ausgesetzt und dann die Grösse der in ihm erregten Vertheilung bestimmt werden. Soll nun die Stärke der atmosphärischen Elektricität auf ein sogenanntes absolutes Maass zurückgeführt werden, so muss nach Feststellung einer Einheit für die Menge der Elektricität angegeben werden, welche Anzahl dieser Einheiten, wenn sie aus einer bestimmten Entfernung wirken, erfordert wird, um in dem isolirten Leiter dieselbe Vertheilung wie zuvor die atmosphärische Elektricität, hervorzurufen.

Das erste Erforderniss nun für die Messung der atmosphärischen Elektricität ist die Herstellung eines Elektrometers, das mit hinreichender Bequemlichkeit, Schnelligkeit und Genauigkeit die durch Vertheilung von Seiten der Atmosphäre in einem Leiter erregte Elektricität zu messen erlaubt. Ich glaube ein solches gefunden zu haben in einer Abänderung (die jedoch nur das Aeussere betrifft) des von mir schon früher construirten Instrumentes, dessen ganz specielle Beschreibung ich bereits in den *Berichten der mathematisch-physischen Classe der Gesellschaft* für 1850 S. 71 ff. gegeben habe. Ausgehend nämlich von der Ueberzeugung, dass ein zwischen zwei mit den entgegengesetzten Elektricitäten geladenen Körpern hängendes Goldblättchen ein brauchbares Elek-

trometer liefern müsste, wofern nur die beiden Körper ihre Elektricität unverändert behielten, construirte ich damals ein solches Elektrometer, in welchem ein mit seinem obern Ende an einen dünnen isolirten Messingcylinder angeklebtes Goldblättchen so weit herabhängt, dass es sich mit seinem untern Ende grade zwischen zwei ebenfalls isolirten ebenen Metallscheiben von elliptischer Form ($24^{mm}$ im verticalen und $16^{mm}$ im horizontalen Durchmesser) befindet. Beide Metallscheiben sind durch Schellackcylinder an zwei durch Mikrometerschrauben bewegliche Schlitten befestigt, und können daher dem untern Ende des Goldblättchens beliebig nahe gebracht und von ihm entfernt werden. Jede der beiden Scheiben steht mit dem einem Pole einer Volta'schen Säule, deren Mitte zur Erde abgeleitet ist, in Verbindung. Das Goldblättchen und diese Scheiben sammt den zugehörigen Schlitten und Mikrometerschrauben (mit Ausschluss ihrer eingetheilten Köpfe) sind in einem Glaskasten, der auf einer gefirnissten Serpentinplatte befestigt ist, eingeschlossen. Die Ausschläge des Goldblättchens, wenn demselben Elektricität mitgetheilt ist, werden nicht mit freiem Auge, sondern mittelst eines Mikroskops, das durch die vordere Glaswand hindurch geht und ein in $0,2^{mm}$ getheiltes Ocularmikrometer enthält, beobachtet. Ich werde dieses Elektrometer, das von mir vielfach zu Messungen benutzt worden und daher im Folgenden sehr oft erwähnt werden wird, als Elektrometer *A* bezeichnen.

So vortrefflich sich dieses Instrument auch für Messungen, bei denen es ruhig auf seinem Orte stehen bleibt, eignet, so passt es doch eben seines grossen Gewichtes und seiner Zerbrechlichkeit wegen nicht zu Versuchen, bei denen es weiten Transporten ausgesetzt ist. Das Gewicht des Instrumentes, die Grösse des Gehäuses (es war $160^{mm}$ lang und hoch und $128^{mm}$ breit) und das Material des letztern aus Glas haben aber auf die Empfindlichkeit und Genauigkeit keinen Einfluss; die beiden erstern konnten daher unbeschadet dieser beiden Eigenschaften beliebig verringert und das Glas wenigstens zum Theil durch Metall oder Holz ersetzt werden. Diese Verringerung des Volumens und die Ersetzung des Glases durch Metall hat sogar noch einige Vortheile, indem ein geringeres Volumen die Luftströmungen innerhalb des Gehäuses weniger sich entwickeln lässt, und die Anwendung des Metalles eine Anhäufung von Elektricität auf den Wänden nicht gestattet. Bei dem Elektrometer *A* hatte ich die Dimensionen des Gehäuses absichtlich so

gross genommen, um alle Theile gehörig aufstellen und sehen zu können, was bei neuen Apparaten, die man einer genauern Prüfung unterwerfen will, allerdings sehr wünschenswerth ist.

Für die Beobachtung der atmosphärischen Elektricität habe ich daher zwei neue kleinere Elektrometer anfertigen lassen, von welchen das eine, ich werde es in der Folge stets als das Elektrometer *B* bezeichnen, auf Tafel I (Fig. 1) in der Ansicht etwas schief von vorn und oben, und auf Tafel II in seinem Aufrisse von der hintern Seite in halber natürlicher Grösse abgebildet ist. Es wird, um die Zeichnungen vollständig verständlich zu machen, nur einer kurzen Erläuterung der einzelnen Theile, welche in beiden Zeichnungen mit denselben Buchstaben bezeichnet sind, bedürfen. *NNN* ist ein messingener Bogen, der die Seitenwände und die Decke des Gehäuses bildet. *AA* ist ein dünner Messingcylinder, der mittelst Schellack isolirt in eine kleine Hülse eingekittet ist, welche durch die Klemmschraube *O* festgestellt wird; an seinem untern Ende ist er einige Linien lang zur Hälfte weggeschnitten und trägt hier das punktirt gezeichnete Goldblättchen *B*. *C* und *C* sind zwei elliptische Messingscheiben ungefähr von der Grösse, wie im Elektrometer *A*, deren grösserer Durchmesser vertikal, der kleinere horizontal gerichtet ist. Sie sind mittelst Charniergelenke mit den Köpfen *P,P*, welche auf den Schellackstäbchen *D,D* stehen, verbunden, damit sie einander genau parallel gestellt werden können. Die Schellackstäbchen sitzen auf zwei nach unten etwas keilförmig sich verschmälernden Messingstücken (in der Zeichnung nicht sichtbar), die sich innerhalb einer entsprechenden Nuth in dem Messingstücke *QQ* mittelst der durch sie hindurchgehenden Mikrometerschrauben *G,G* verschieben lassen. Die ganzen Umgänge der Schrauben werden auf einer neben dieser Nuth angebrachten Eintheilung, und die Bruchtheile derselben auf den eingetheilten Köpfen *H,H* abgelesen. Die Elektricität wird den beiden Scheiben *C,C* durch zwei feine Drähte zugeführt, die spiralförmig aufgewunden sind, um die Bewegung der Scheiben *C,C* nicht zu hemmen. Die äussern Enden der beiden Drähte sind an die isolirt in die Seitenwände eingefügten Messingstücke *E,E* angelöthet. In eben diesen Messingstücken werden mittelst der Klemmschrauben *F,F* die Poldrähte einer Volta'schen Säule befestigt. Die vordere und hintere Wand des Gehäuses werden durch zwei Glasplatten (Spiegelplatten) gebildet, welche unten in einen Falz eingesetzt und oben durch eine Schraube gegen die genau eben abge-

schliffenen Ränder des messingenen Bogens *NNN* angedrückt werden, und so einen dichten Verschluss bilden.

Der specielle Zweck, für welchen dieses Elektrometer bestimmt war, erforderte noch eine besondere Vorrichtung zur Befestigung des Goldblättchens beim Transport, um dasselbe zu verhindern, sich beim Schwanken oder Umkehren des Instrumentes an die benachbarten Theile anzuhängen. Zu diesem Behufe liess ich durch die angesetzten kurzen Metallcylinder *M,M* mit einiger Reibung die Messingdrähte *K,K* hindurchgehen; diese tragen an ihrem äussern Ende einen geränderten Knopf, an ihrem innern dagegen eine kleine Metallplatte *L,L*, welche in der Figur 2 nach unten hängend gezeichnet ist. Die dem Goldblättchen zugewandten ebenen Seiten dieser kleinen Platten sind mit Papier überzogen, das mit Bolus (wie das Papier, zwischen welchem die Goldblättchen gewöhnlich aufbewahrt werden) oder auch mit sehr fein gepulvertem Speckstein eingerieben ist. Um das Goldblättchen festzustellen, wird zunächst mittelst des Drahtes *K* die eine der Platten *L* nach innen geschoben, darauf, wenn sie sich innerhalb des Raumes zwischen den beiden Scheiben *C,C* befindet, so gedreht und einwärts geschoben, dass das Goldblättchen etwas oberhalb seines Endes quer über die Platte hinweggeht. Es ist zweckmässig die erste Platte so weit vorzuschieben, dass das Goldblättchen ein wenig aus seiner vertikalen Lage gebracht wird, damit beim nachherigen Andrücken der zweiten Platte kein Zerren desselben entstehen kann. In dieser Lage wird dann der Draht *K* der ersten Platte durch eine bei *M* befindliche Klemmschraube vollständig festgestellt. Sodann schiebt man die andere Platte nach innen und drückt sie, wenn sie durch Drehung ihres Drahtes sich grade in der richtigen Lage der ersten Platte gegenüber befindet, fest gegen diese an. Wird auch sie durch die Klemmschraube an ihrem Drahte festgestellt, so ist das Goldblättchen gegen jede Verletzung geschützt. Es erleichtert das Arretiren und Loslassen des Goldblättchens, wenn die Drähte *K,K* sich, wie schon vorhin bemerkt, nur mit einiger Reibung bewegen lassen, so dass sie sich nicht von selbst drehen, wenn die Platten *L,L* horizontal stehen. Ferner ist es zweckmässig das Goldblättchen ein wenig oberhalb seines untern Endes einzuklemmen, so dass es vielleicht noch eine Linie aus den Platten hervorragt, weil es in diesem Falle weniger an den Platten adhärirt, als wenn seine untere Spitze eingeklemmt ist. Durch den Gebrauch zweier solcher Instrumente auf einer

mehrwöchentlichen Reise im Herbste 1852 habe ich mich von der Tauglichkeit dieser Vorrichtung überzeugt.

Die Volta'sche Säule, welche die Elektricität ihrer Pole den Scheiben, zwischen welchen das Goldblättchen hängt, mittheilt, kann sehr einfach construirt sein und lässt sich den jedesmaligen Umständen entsprechend verschiedenartig gestalten. Zu messenden Versuchen, welche mit dem Elektrometer *A* in der Stube ausgeführt werden können, bediene ich mich kleiner, etwa einen Zoll hoher und zweidrittel Zoll weiter mit Wasser gefüllter Gläschen, die auf einem Harzkuchen stehen und in welche aus schmalen Kupfer- und Zinkstreifchen in Form eines umgekehrten U (∩) zusammengelöthete Elemente eingesetzt werden.

Bei dem zur Messung der atmosphärischen Elektricität dienenden Elektrometer *B* mussten die Dimensionen der einzelnen Elemente möglichst verringert werden. In dem Fig. 1 und 2 in halber Grösse abgebildeten Instrumente bezeichnet *aaa* einen viereckigen flachen blechernen Kasten mit sehr niedrigem Rande. Auf dem Boden dieses Kastens ist eine starke Messingplatte, welche den eigentlichen Fuss des Elektrometers bildet, festgeschraubt. Auf dem vordern Theile dieser Messingplatte nach *b* zu liegt ein dicker Kuchen aus Schellack *ccc*, der mittelst zweier Metallstücke, von denen das eine *d* in Fig. 1 sichtbar ist, befestigt wird. In diesen Schellackkuchen sind 28 messingene Schraubenmuttern eingedrückt, in welche die einzelnen Elemente eingeschraubt werden können. Ein jedes Element (wie *ef* oder besonders im Durchschnitt gezeichnet Fig. 3) besteht aus einem kupfernen Cylinder, der in einem mit einer Schraube versehenen Stift $\varepsilon$ ausgeht, mit dem er in die Schraubenmuttern des Schellackkuchens eingeschraubt wird. Der oben offene Kupfercylinder wird durch einen Deckel *e* geschlossen. Die Seitenwand dieses Deckels $\alpha\beta$, welche ein Schraubengewinde zum Aufschrauben auf den Kupfercylinder enthält, besteht aus Metall; dagegen ist die obere Seite $\beta\gamma$ aus Elfenbein. In der Mitte dieses Elfenbeins ist ein dickes Zinkstück $\delta$ eingeschraubt, in welches von unten ein dünnes Zinkstäbchen $\zeta$ etwas kürzer als der Kupfercylinder fest eingeschraubt ist. Auf der obern Seite enthält jenes Zinkstück noch ein kleines mit einem Schraubengewinde versehenes Loch, in welches die zur Verbindung der einzelnen Elemente dienenden Schrauben $\eta$ passen. Wird der Kupfercylinder mit Wasser gefüllt, und der mit dem Zinkstäbchen versehene Deckel aufgeschraubt, so hat man ein Volta'sches Element. Zur

Verbindung der einzelnen Elemente dienen schwache Messingstreifen $\vartheta$; oben werden sie auf das Zinkstück des einen Elementes aufgeschraubt, und unten über den am untern Ende des nächstfolgenden Kupfercylinders befindlichen Stift gesteckt und durch Einschrauben des letztern in den Schellackkuchen an den Kupfercylinder angedrückt.

Eine solche Säule bleibt ungeachtet ihrer Kleinheit länger als vier Wochen wirksam, weil die Gefässe gut verschlossen sind. Chemische Zersetzungen kann sie als Säule nicht veranlassen, da sie niemals geschlossen wird. Das Auseinandernehmen, Reinigen und Wiederzusammensetzen erfordert, wenn man es erst ein oder zwei Mal gemacht hat, nur eine Stunde Zeit.

Ausser der in Fig. 1 abgebildeten Form habe ich die Säule auch aus Glasgefässen und eingesetzten Kupfer- und Zinkdrähten gebildet. In einen sehr dicken Schellackkuchen werden Löcher, die aber nicht ganz hindurchgehen, gebohrt, und in dieselben kleine mit Wasser angefüllte unten verschlossene Glascylinder eingesetzt. Diese Gläschen werden oben mittelst eines Korkes oder hölzernen Pfropfes oder einer Elfenbeinfassung, durch welche zwei kleine Löcher gehen, geschlossen. Durch diese Oeffnungen steckt man die zusammengelötheten Zinkkupferdrähte von der Form eines umgekehrten U (∩) so hindurch, dass der Kupferdraht in das eine Glas, der Zinkdraht aber in das nächstfolgende zu stehen kommt. Es ist zweckmässig, die Gläser einzeln aus dem Kuchen herausheben zu können; ein Festkitten aller auf einer und derselben Schellackmasse ist mit vielen Unannehmlichkeiten bei der Reinigung verbunden.

Der Ort, welchen diese Säule einnimmt, ist an sich sehr gleichgültig; bei gewissen Einrichtungen und für bestimmte Zwecke kann es bald bequemer sein, dieselbe neben dem eigentlichen Elektrometer zu haben, bald auch wünschenswerther, sie gleich unter dasselbe zu stellen; ich habe nach beiden Angaben Instrumente ausführen lassen.

Um nun aber eine constante elektrische Spannung in den Polen dieser Säule zu erhalten, muss man sich hüten, die Kette zu schliessen. Jede Entstehung eines Stroms, auch nur eine kurze Berührung des einen Poles mit dem Finger, während die Mitte der Säule mit der Erde in Verbindung steht, schwächt infolge der in dieser Hälfte der Säule eingetretenen Polarisation die elektrische Spannung am berührten Pole. Sind die Metallbügel vielleicht erst seit einigen Stunden in das Wasser ihrer

Gefässe eingesetzt, so verschwindet die Schwächung bald wieder; wenn dagegen diese Bügel wochen- oder monatelang unangerührt schon in den Gefässen gestanden haben, ziemlich stark mit Oxyden bedeckt sind, und das Wasser in den Gefässen bis auf geringe Rückstände verdampft ist, so geschieht die Herstellung des ursprünglichen Zustandes langsamer. Es ist desshalb sehr wichtig, die Pole der Säule und ebenso die Gläser der einzelnen Volta'schen Elemente gehörig mit Schellack oder anderm passenden Harze zu isoliren; eine Isolation durch Glas mit gewöhnlicher nicht gefirnisster Oberfläche genügt nicht. So bedurfte z. B. in dieser Hinsicht das Instrument *A* nach seiner ersten Construction einer Verbesserung. Nach der Beschreibung in der angeführten Stelle der *Berichte der königl. Gesellschaft* vom Jahre 1850 wurden die Verbindungsdrähte von den Polen der Säule zu den Scheiben, zwischen denen das Goldblättchen hängt, durch die obere Glasplatte des Gehäuses in einem Abstande von $60^{mm}$ von einander durchgeführt. Ich habe schon damals erwähnt, dass die Elektricität der Pole sich von den Stellen aus, wo diese Verbindungsdrähte das Glas berührten, über die Glasfläche hin, bis zu einer Fassung, welche den Träger des Goldblättchens aufnahm, verbreitete; bei genauerer Prüfung ergab sich dann auch, dass die elektrische Spannung an den Polen der Säule, weil die Oberfläche der zwischen den Zuleitungsdrähten liegenden Glasschicht von $60^{mm}$ Länge nicht gehörig isolirte, nicht hinreichend constant zu erhalten war. Ich musste desshalb in den Glasdeckel noch zwei grössere Oeffnungen zur Aufnahme von Schellackcylindern, durch welche dann die Zuleitungsdrähte geführt wurden, einschleifen lassen. So vorgerichtet, also nachdem alle Theile, die es bedurften, durch Schellack gehörig isolirt waren, liess das Instrument *A* Nichts zu wünschen übrig. Dass die Spannungen in den Polen nicht in aller Strenge für jede beliebige Zeitdauer constant bleiben können, bedarf wohl keiner Erinnerung; es wird aber jetzt überflüssig sein, besondere Beispiele anzuführen, wie hoch die Aenderungen in denselben bei richtiger Behandlung des Instrumentes nach Verlauf mehrerer Stunden etwa steigen, da später sich mehrfach Gelegenheit zur Mittheilung solcher Angaben finden wird. In dem weitern Verlaufe dieser Abhandlung werde ich übrigens auch ein sehr einfaches Mittel angeben, um die kleinen eintretenden Aenderungen mit Genauigkeit zu bestimmen und auszuscheiden.

Um die elektrische Spannung in beiden Polen sehr nahe constant

zu erhalten, muss aber ausser den angegebenen Vorsichtsmaassregeln die Mitte der Säule zur Erde abgeleitet werden.

Ebendesshalb ist auch die Anwendung einer isolirten Zamboni'schen Säule in dem gewöhnlichen Goldblattelektrometer mit trockener Säule unzweckmässig; will man nur eine Säule anwenden, so muss ihre Mitte abgeleitet werden. Dasselbe leisten natürlich zwei Säulen, welche mit ihren ungleichnamigen Polen auf einer oder zwei mit der Erde in leitende Verbindung gesetzten Metallschienen stehen. Ich habe diese Einrichtung schon im Jahre 1839 angegeben*), und seitdem eine grössere Anzahl solcher Instrumente construiren lassen. Man hat nur darauf zu achten, den Durchmesser der Papierscheiben nicht zu klein zu nehmen. Um die Empfindlichkeit nach Belieben zu vergrössern oder zu verringern, können die Säulen auf der Metallschiene dem Goldblättchen genähert oder von ihm entfernt werden. In dieser Weise eingerichtete Elektrometer lassen sich ohne Mühe so empfindlich machen, dass sie bei der blossen Berührung mit einem einzigen Zinkkupferelemente einen sehr deutlichen Ausschlag geben.

Als Bestätigung für das zuletzt Angeführte will ich hier noch bemerken, dass ich selbst bei dem Elektrometer *B* die nasse Säule durch zwei trockene Säulen, deren eines Ende zur Erde geleitet war, versuchsweise ersetzt habe. Jede Säule bestand in den verschiedenen Versuchen aus 100 bis 200 Scheiben von Gold- und Silberpapier, die ½ bis 1 Zoll im Durchmesser hatten. Das Goldblättchen hing zwischen den Scheiben $C, C$, welche mit den isolirten Polen dieser Säulen in Verbindung standen, so ruhig, dass man selbst durch das Mikroskop keine Bewegung wahrnahm. Bei gleichbleibenden Verhältnissen der Luft, namentlich bei constanter Temperatur ändert sich die elektrische Spannung in den Polen dieser Säulen selbst während eines ganzen Tages nur wenig. Dessenungeachtet musste ich die trockenen Säulen für gewöhnlich aufgeben, so bequem sie sonst gewesen wären, weil die Temperatur auf die elektrische Spannung derselben von zu grossem Einflusse ist. Ich werde später die Belege hiefür mittheilen.

Bei vielen Versuchen ist es, wie sich nachher zeigen wird, sehr wünschenswerth, die Elektricität in den beiden Scheiben, zwischen denen das Goldblättchen hängt, plötzlich umkehren zu können; es ist

*) De thermoelectricitate crystallorum, Halae 1839. S. 5.

daher zweckmässig, die Verbindung der Pole mit diesen Scheiben durch einen Commutator, dessen Theile überall durch Schellackstäbe oder gefirnisste Glasstäbe isolirt sind, zu bewerkstelligen. Das Elektrometer *A* steht zur bequemeren Beobachtung gewöhnlich auf einem kleinen Tischchen von 1 Fuss Höhe, das auf einem Fensterbrette aufgestellt ist; unterhalb dieses Tischchens befindet sich der Commutator, so dass er bequem mit der Hand umgelegt werden kann. Die Verbindung der Metalltheile an den Berührungsstellen geschieht bei diesem Commutator durch Quecksilber. Bei dem Elektrometer *B* musste, weil es transportabel sein sollte, das Quecksilber im Commutator vermieden werden; die Schliessungen erfolgen daher hier nur durch das Andrücken blanker Metallfedern gegen metallische Flächen. Bei diesem Instrumente befand sich der Commutator gleich unterhalb des messingenen Gehäuses. Die drehbare Axe *gih* ist aussen bei *h* quadratisch zum Aufstecken einer kleinen Curbel *u*, die besonders daneben gezeichnet ist; von *i* bis *g* besteht sie aus einem mit Schellackfirniss sorgfältig überzogenen Glasstabe, auf welchem in einiger Entfernung von einander die beiden Messingringe *k,k* aufgesetzt sind. Jeder dieser Messingringe enthält eine kleine Schraube zum Festklemmen eines Zuleitungsdrahts *l,l*, und ausserdem zwei Federn (die untere an jedem Ringe ist in der Figur sichtbar), welche durch Anlegen an zwei Messingplatten einen Commutator bilden. Damit der Commutator in jeder der beiden Lagen ruht, und stets entweder beide obern oder beide untern Federn an die Messingplatten andrücken, dient die auf den quadratischen Theil der Axe *h* aufgesteckte Curbel *u*, deren Arm ein kleines Bleigewicht *v* von angemessener Grösse trägt. Die Curbel wird so auf das Quadrat der Axe gesteckt, dass wenn keine der Federn die Messingplatten berührt, ihr Arm mit dem Bleigewichte nach oben gerichtet ist; dann gibt das Bewegen des Gewichts nach vorn und hinten die beiden gewünschten Lagen des Commutators. Um einen zu starken Druck, welchen die Hand auf die Federn ausüben könnte, unschädlich zu machen, befindet sich auf der Axe des Commutators dicht neben der Wand bei *i* eine kleine Scheibe mit passendem Ausschnitte, welche durch Anschlagen an einen in dieser Wand befindlichen Stift jede weitere Drehung verhindert.

*RR* und *RR* (Fig. 2) sind Messingstäbchen, isolirt in der hintern Wand des Elektrometers mit Schellack befestigt; an ihrem obern Ende befinden sich seitwärts die Knöpfchen *m,m*; etwas weiter nach unten dienen

die Schrauben *n,n* zur Befestigung der Poldrähte, welche von den Endgliedern der Volta'schen Säule kommen. Von den untern Enden dieser Stäbchen, welche nach dem Durchgange durch die hintere Wand nach innen noch hervorragen, gehen die schon zuvor erwähnten Drähte *l,l*, die etwas spiralförmig gewunden sind, nach den Metallringen *k,k*, und leiten dadurch die Elektricität der Pole zu den Federn des Commutators.

Diese Federn drücken, wie schon angeführt, gegen zwei Messingplatten, welche isolirt in der hintern Wand befestigt sind, und auf der Rückseite des Instrumentes Schrauben *S,S* zum Einklemmen von Drähten besitzen. Mit jedem dieser Messingstücke wird ein Draht verbunden und nach dem nächsten Metallstücke *E* geführt, um hier von der Schraube *F* an seinem andern Ende gefasst zu werden. Auf diese Weise gelangt also die Elektricität der beiden Säulenpole zu den Scheiben *C,C*, und zwar empfängt je nach der Lage des Commutators bald die rechte, bald die linke Scheibe die positive oder negative Elektricität.

An dem Elektrometer sind ferner noch zwei hebelartige Vorrichtungen *TUV*, je eine jederseits, sichtbar. Ihr Zweck ist, die Elektricität des einen Poles der Säule nach dem Goldblättchen *B* zu führen. Diess geschieht auf folgende Weise. Der von *e* (in Fig. 1) aus nach rückwärts zu der auf seiner Seite gelegenen Schraube *n* (Fig. 2) gehende Draht führt die negative Elektricität nach dem zugehörigen Messingstabe *RR*. Wird der rechte Hebelarm *T* niedergedrückt und unter das Knöpfchen *m* gelegt, so berührt der obere federnde Theil *V* den kleinen Schirm *X* des Conductors *A*, und theilt so dem Goldblättchen die Elektricität des negativen Poles der in ihrer Mitte abgeleiteten Volta'schen Säule mit. Löst man den Hebelarm wieder von dem Knöpfchen, so drückt die Feder *W* (Fig. 1) den Arm *UV* wieder zurück und legt ihn gegen das später anzuführende Gehäuse, um ihn zu entladen. Auf gleiche Weise dient der Arm der andern Seite zur Leitung der positiven Elektricität der Säule zum Goldblättchen. Es versteht sich von selbst, dass die Drehpunkte der Hebel und die Befestigungspunkte der Federn durch Schellack isolirt sind. In der Fig. 1 dargestellten Lage sind die Federn nicht isolirt, weil die obern Theile der Hebel *V,V* an dem metallischen hier nicht mitabgebildeten Gehäuse, welches das ganze Instrument bedeckt, anliegen; sobald aber die horizontalen Arme *T,T* niedergedrückt werden, und die obern Theile *V,V* das Gehäuse verlassen, tritt Isolation ein.

Das Mikroskop *Y*, welches zur Messung der Ausschläge des Goldblättchens dient, ist mit seinem hintern Ende in eine mittelst der Schraube und des Anschlags *Z* an dem messingenen Gehäuse des Elektrometers befestigte etwas federnde Hülse *p* eingeschoben, und ruht weiter vorn auf der Gabel *bb*. Die Theilstriche des in ihm befindlichen Ocularmikrometers stehen um $\frac{1}{8}$ Millimeter von einander ab. Die Glasplatte, welche die vordere Seite des Gehäuses *NNN* bildet, besteht aus einer gewöhnlichen gut geschliffenen Spiegelplatte; um jedoch das Bild nicht undeutlich zu machen, ist dieselbe grade dem Objective des Mikroskops gegenüber durchbohrt, und diese Oeffnung durch ein kleines Planglas bedeckt.

Das ganze Instrument wird sowohl beim Transport, als auch bei dem Gebrauche im Freien mit einem blechernen Gehäuse von parallelepipedischer Form bedeckt, das sich unten auf den Rand des flachen Kastens *aaa* aufsetzt, und durch Drähte, welche man in die zu engen Röhrchen umgebogenen Ränder des Gehäuses und des Kastens einschiebt, befestigt wird. Das Gehäuse ist in der Zeichnung hinweggelassen. Sein horizontaler Querschnitt ergiebt sich durch den Kasten *aaa*; sein oberer Boden liegt sehr wenig oberhalb des kleinen Schirmes *X*. Zum Durchlassen des Mikroskops während des Uebersetzens des Gehäuses ist es vorn von unten herauf mit einem Schlitze versehen, der nachher durch eine in zwei Falzen verschiebbare Metallplatte geschlossen wird. Eine zweite Oeffnung befindet sich dem Mikroskope gegenüber in der hinteren Wand zum Eintritt des Lichtes. Eine dritte Oeffnung in dem obern Boden dient zum Durchlassen des Conductors *AA'*; in dieselbe treten auch die obern Enden der Hebel *V,V* ein und legen sich, wenn die Arme *T,T* von den Knöpfen *m,m* gelöst werden, durch den Druck der Federn *W,W* gegen den Rand der Oeffnung. Eine vierte Oeffnung ist der Axe *h* des Commutators gegenüber und dient zum Durchstecken des cylindrischen hohlen Theiles der Curbel, der auf das quadratische Ende *h* der Axe passt. Endlich finden sich an der hintern Seite noch zwei kleinere länglich gestaltete Oeffnungen, um mittelst eines Drahtes, der an einem Siegellackstücke befestigt ist, die horizontalen Arme *T,T* der Hebel unter die kleinen Knöpfchen *m,m* zu legen oder von ihnen loszumachen, ohne dass man nöthig hat, das Gehäuse abzuheben. Die Oeffnungen sind mit kleinen Rändern versehen, auf welche sich Deckel aufschieben lassen. Die Oeffnung im obern Boden kann nur nach dem

Abschrauben des Conductors $A'$ verschlossen werden. Für die Oeffnung in der vordern Wand des Gehäuses ist es bequem, zwei Deckel zu besitzen: 1) einen kurzen, der nur nach Wegnahme des Mikroskops auf die Oeffnung passt, und zum bequemeren Transport des Instrumentes, wenn es voraussichtlich längere Zeit nicht gebraucht wird, dient; und 2) einen längern, der den ganzen Körper des Mikroskops mit in sich aufnimmt. Ausserdem befindet sich an dem Gehäuse noch ein Bügel zum Tragen des Instrumentes. — Ein an der Hinterwand des Gehäuses angebrachtes kleines Röhrchen dient, um das eine Ende eines Messingdrahtes aufzunehmen, dessen anderes Ende in eine kleine federnde Zange ausgeht. In diesen aufgeschnittenen federnden Theil wird ein Stückchen weissen Papiers eingeklemmt, und dann der Draht so gebogen und gestellt, dass die weisse Fläche sich hinter der Oeffnung des Gehäuses zum Eintritte des Lichtes befindet, während sie von der Sonne oder von einer hellen Stelle des Himmels beleuchtet wird. Diese letztere Einrichtung ist sehr vortheilhaft bei einem dunklen grünen Hintergrunde, wo sonst, namentlich bei etwas schwachem Lichte, die Theilung des Mikrometers nicht mehr zu erkennen ist. Wenn ein solches Elektrometer zu Versuchen im Zimmer bei Lampenbeleuchtung gebraucht werden soll, so bedecke ich entweder die Oeffnung in der hintern Wand mit einem Stückchen dünnen weissen, auch wohl geölten Papiers, welches durch das von einem Spiegel zurückgeworfene Licht einer entfernt stehenden Lampe erleuchtet wird oder stelle je nach den Umständen in der verlängerten Axe des Mikroskops in 5 bis 6 Fuss Entfernung ein solches Blatt Papier auf, das auf der hintern Seite scharfes Licht empfängt.

Ein drittes Elektrometer, das in dem Folgenden, wo es erwähnt wird, mit $C$ bezeichnet werden soll, wich von dem Elektrometer $B$ nur darin ab, dass seine Säule aus kleinen, oben mit einer Elfenbeinfassung verschlossenen und in Löchern eines dicken Schellackkuchens aufgestellten Gläschen mit eingesetzten Kupfer- und Zinkdrähten (vergl. S. 397) bestand, und gleich unterhalb des Commutators angebracht war. Das ganze Instrument war dadurch höher, aber auch schmäler, was für Reisen zweckmässig ist. Ausserdem war noch eine Verbesserung in der Weise angebracht, dass alle am Instrumente durch Schellack isolirte Theile nicht unmittelbar in das Instrument, sondern erst in kleine niedrige Cylinder eingekittet wurden, welche sich mit einem auf ihrer

äussern Fläche eingeschnittenen Schraubengewinde an den betreffenden Stellen in entsprechende Oeffnungen des messingenen Gehäuses einschrauben liessen. Diese Einrichtung hat den Vortheil, dass etwa im Schellack locker gewordene Metalltheile sich mit Bequemlichkeit nach dem Herausschrauben ihrer Cylinder aus dem Gehäuse durch Erhitzen in der Flamme wieder festschmelzen lassen.

Zum Aufstellen der Elektrometer im Freien dienen Gestelle mit drei Füssen, die sich der Bequemlichkeit wegen zusammenlegen lassen.

## III. Prüfung des Elektrometers.

Wenn man eine zusammengesetzte Vorrichtung zu genauen Messungen gebrauchen will, so ist es wichtig, die Wirkungen der einzelnen Theile, aus denen sie besteht, und die bei den Messungen in Betracht kommen, gesondert zu kennen, um alle möglicherweise dadurch veranlassten Störungen ausschliessen zu können. Es wird also auch im vorliegenden Falle eine genaue Untersuchung der Wirkungen, welche die einzelnen mit Elektricität geladenen Theile des Instrumentes in grösserer oder geringerer Nähe auf einander ausüben, von Interesse sein. Freilich gelten solche Bestimmungen in aller Strenge nur für das besondere Instrument, mit welchem sie ausgeführt werden; sie finden indessen in angenäherter Weise noch ihre Anwendung für alle ähnlich gebauten. In vielen Fällen genügt übrigens auch für die Behandlung der Instrumente schon eine solche angenäherte Kenntniss der gegenseitigen Wirkungen ihrer Theile und ich führe daher in dem Nachstehenden solche Bestimmungen an, welche ich für das Elektrometer *A* gemacht habe, lasse dabei aber alle weitläufigen Berechnungen fort, weil diese eben nur für diess einzelne Instrument *A* Geltung haben und daher ein allgemeines Interesse nicht darbieten würden.

Die Entfernungen der beiden Scheiben *C,C* von den Goldblättchen werde ich in einem Maasse angeben, dessen Einheit 0,0296 pariser Linie beträgt. Ich wähle grade diese Länge als Einheit, weil sie diejenige ist, welche im Mikroskope gesehen so gross erscheint, wie die Entfernung zweier nächsten Theilstriche des Ocularmikrometers. Weiterhin werden die Abweichungen des Goldblättchens von der verticalen Richtung (die Ausschläge) auch in Theilstrichen des Ocularmikrometers angegeben werden, so dass dann die Annäherungen des Goldblättchens

an die Scheiben unmittelbar mit der gemachten Angabe seiner anfänglichen Entfernung von denselben vergleichbar sind. Die Entfernung der linken Scheibe $C$ von dem Goldblättchen $B$ will ich mit $L$, die der rechten mit $R$ bezeichnen; die Grösse des Ausschlags mit $V$.

Da die elektrische Spannung in den Polen der Volta'schen Säule während einer längeren Zeit nicht völlig constant bleibt, so wurde die Messung für einen bestimmten Zustand, mit welchem die andern verglichen werden sollten, öfter wiederholt, und die Mittelwerthe aus zwei zunächst liegenden mit den zwischen ihnen gemachten Messungen der abgeänderten Zustände verglichen, oder diese letzteren mit Bezug auf jene Abweichungen corrigirt, so dass alle Beobachtungen dann als für einen und denselben Zustand der angewandten Volta'schen Säule geltend betrachtet werden konnten. Bemerken will ich nur noch, dass, wenn bei den in diesem Abschnitte mitgetheilten Messungen eines und desselben Zustandes im Laufe einer Versuchsreihe Abweichungen sich finden, welche die Grösse von $\frac{1}{10}$ Theilstrich übersteigen, diess seinen Grund in einer Nichtbeachtung der oben S. 397 u. 398 angegebenen Vorsichtsmaassregeln hat. Diese Nichtbeachtung ging in den folgenden Versuchsreihen theils noch aus einer Unkenntniss dieser Regeln hervor, theils muss sie in allen den Versuchen, wo einzelne Elemente in die Säule aufgenommen oder wieder ausgeschieden werden, und die Schliessung der Säule durch die Hände ohne gar zu weitläufige Vorrichtungen nicht wohl vermeidlich ist, eintreten. Durch Wiederholung dieser Messungen nach der Kenntniss dieser Regeln und durch Anwendung complicirter Vorrichtungen, um das Schliessen der Kette und das Erschüttern derselben zu vermeiden, hätten sich allerdings genauere Werthe erhalten lassen; da jedoch die folgenden Versuchsreihen nur zur Darlegung von Wirkungen dienen sollen, welche die einzelnen Theile des Instrumentes auf einander ausüben, so habe ich ihre Wiederholung für überflüssig gehalten. Bei Beachtung der oben (S. 397 u. 398) angegebenen Vorsichtsmaassregeln werden die Abweichungen im Laufe einer mehrere Stunden dauernden Versuchsreihe 0,1 Theilstrich des Ocularmikrometers nicht übersteigen. Diese kleinen Abweichungen haben ihren Grund gewöhnlich in Temperaturveränderungen, lassen sich aber jedenfalls, wie später ausführlicher gezeigt werden wird, bestimmen, so dass die gemessenen Werthe davon befreit werden können.

1. *Ausschläge des Goldblättchens, wenn nur eine der Scheiben C mit dem einen Pole der Volta'schen Säule in Verbindung steht, während die andere Scheibe und das Goldblättchen zur Erde abgeleitet sind.*

**a. Aenderung der Ausschläge mit Aenderung der Entfernung der einen Scheibe.**

Man kann zunächst die Frage stellen: welchen Einfluss hat die Aenderung der Entfernung der einen Scheibe *C*, wenn sie allein mit einer gegebenen Elektricität geladen ist, während das Goldblättchen und die andere Scheibe *C*, welche letztere auf ihrem Platze unverrückt bleibt, mit der Erde in leitender Verbindung stehen?

In der folgenden Versuchsreihe wurde die linke Scheibe in verschiedene Entfernungen vom Goldblättchen gebracht, von 76,1 bis 237,8, während die rechte Scheibe unverändert in der Entfernung 284,1 vom Goldblättchen stehen blieb. Die rechte Scheibe war durch einen Draht unausgesetzt mit der Erde in Verbindung, während ein in den Träger des Goldblättchens eingeklemmter und mit nassem Papier umwundener Platindraht vor jeder Ablesung des Standes des Goldblättchens mit dem nassen Finger ableitend berührt wurde. Als Elektricitätsquelle diente die freie Elektricität an den Polen der oben (S. 396) erwähnten Volta'schen Säule aus schmalen Kupfer- und Zinkstreifen, welche in kleine auf einem Harzkuchen isolirte Gläser eingesetzt waren.

Da es bei den Berührungen der verschiedenen Leiter, des Goldblättchens, seines Trägers und der Ableitung zur Erde nicht möglich ist, das Goldblättchen völlig unelektrisch zu machen, so musste die Wirkung der durch diese Berührungen entstehenden Elektricität durch eine doppelte Messung unschädlich gemacht und ausgeschieden werden; ich verband desshalb erst den positiven und gleich darauf den negativen Pol der kleinen Volta'schen Säule, deren anderer Pol jedes Mal durch Verbindung mit dem Blitzableiter des Universitätsgebäudes zur Erde abgeleitet wurde, mit der linken Scheibe. Da das Goldblättchen infolge der oben erwähnten Berührungen eine schwache negative Elektricität besass, so war die Anziehung desselben durch die linke Scheibe *C* eine etwas geringere, wenn diese negativ, als wenn sie positiv war. Das Mittel aus beiden Ausschlägen gab dann den Werth, wie er stattgefunden haben würde, wenn das Goldblättchen völlig unelektrisch gewesen wäre. Der ursprüngliche Stand des Goldblättchens, so lange die linke Scheibe keine Elektricität besass, war z. B. bei der ersten der nach-

stehenden Messungen 17,15. Als die linke Scheibe dann mit dem positiven Pole der Volta'schen Säule verbunden wurde, bewegte sich das untere Ende des Goldblättchens bis 27,6; als aber der negative damit verbunden, nur bis 27,4; der Ausschlag des unelektrischen Goldblättchens hätte also nur 27,5—17,15=10,35 betragen. In der nachstehenden Tabelle führe ich unter der Rubrik *V* (Ausschläge) gleich die Unterschiede zwischen dem ursprünglichen und dem mittleren Stande bei Zuleitung der beiden Elektricitäten an. Der ursprüngliche Stand ist zwar infolge von Temperatureinflüssen, welche Luftströme im Innern des Gehäuses erzeugen, nicht immer ganz constant. Diess schadet aber, wo es eintritt, der Genauigkeit der Messungen nicht, da die Aenderungen nur allmählig und in geringem Grade erfolgen; man bestimmt den Stand vor und nach jeder Ablenkung des Goldblättchens und vergleicht das Mittel aus den beiden Ständen mit der zwischen ihnen beobachteten Ablenkung. Bei Anstellung der nachstehenden Versuchsreihe sank der Stand des Goldblättchens z. B. von 17,15 gegen Ende derselben hinab bis auf 16,95. Den beträchtlichsten Einfluss in Betreff dieser Aenderungen hat bei dem Instrumente *A*, mit welchem diese Messungen gemacht wurden, der Athem des Beobachters; man thut desshalb gut, was auch zugleich das Ablesen erleichtert, einen grossen Schirm aus Pappe auf den hervorstehenden Theil des Körpers des Mikroskops zu setzen, damit der ausgestossene Athem die vordere Glaswand nicht unmittelbar treffen und erwärmen kann. Ist der Schirm mit Metallpapier bekleidet und mit der Erde in leitender Verbindung, so verhindert er gleichzeitig jede elektrische Einwirkung von Seiten des Kopfes des Beobachters. Um ferner jede Störung durch eine fremde Elektricität zu vermeiden, war auch das kleine Tischchen, worauf das Elektrometer *A* stand, mit Metallpapier überzogen, und ebenfalls mit der Erde verbunden; denn bevor diess geschehen erregte jede beim Umlegen des Commutators zufällig eintretende Berührung des trockenen Holzes mit der Hand Elektricität, welche sich durch ihre vertheilende Wirkung auf das Goldblättchen kund gab.

In der folgenden Tabelle findet sich also unter *L* die Entfernung der linken, und unter *R* die Entfernung der rechten Scheibe von dem Goldblättchen, während unter *V* die bei diesen Entfernungen durch die sehr nahe gleich grosse elektrische Spannung erzeugten Ausschläge stehen. Die Zahlen der letzten Spalte geben zugleich Auskunft über

die Grösse der Aenderungen in der elektrischen Spannung, da z. B. die Messung bei der Entfernung 76,1 der linken Scheibe drei Mal zu verschiedenen Zeiten angestellt ist. Bemerken will ich noch, dass die Entfernung zweier nächsten Theilstriche des Ocularmikrometers so gross erschien, dass ich den zwischen ihnen liegenden Raum nach der Schätzung recht gut in Zehntel oder auch Zwanzigstel eintheilen konnte. Die Bestimmung des Standes des Goldblättchens geschah stets durch die Beobachtung der Lage eines und desselben scharf begrenzten Punktes an dem untern im Mikroskope etwas zerrissen erscheinenden Ende des Goldblättchens.

| *L.* | *R.* | *V.* | *L.* | *R.* | *V.* |
|---|---|---|---|---|---|
| 76,1 | 284,1 | 10,35 | 134,9 | 284,1 | 3,85 |
| 90,8 | » | 7,72 | 169,3 | » | 2,72 |
| 110,4 | » | 5,50 | 198,6 | » | 1,97 |
| 76,1 | » | 10,40 | 237,8 | » | 1,37 |
| 90,8 | » | 7,75 | 76,1 | » | 10,20 |
| 110,4 | » | 5,57 | | | |

Um eine Beziehung zwischen den Grössen $V$ und $L$ zu suchen, mögen bei den geringen Abweichungen aus den mehrfach wiederholten Bestimmungen, die Mittel genommen werden, was zu vorliegendem Zwecke genügt. Diese Mittelwerthe stehen in der folgenden Tabelle unter $V$. Die Entfernung des Goldblättchens von der Scheibe im Zustande der Ablenkung ist aber nicht mehr $L$, sondern $L-V$, weil das Blättchen, wenigstens sein unteres Ende der Scheibe um $V$ näher gekommen ist; es sei der Werth von $L-V=L'$.

| *R.* | *L.* | *L'.* | *V.* | *W.* | *D.* |
|---|---|---|---|---|---|
| 284,1 | 76,1 | 65,73 | 10,37 | 10,46 | —0,09 |
| » | 90,8 | 83,07 | 7,73 | 7,68 | +0,05 |
| » | 110,4 | 104,87 | 5,53 | 5,45 | +0,08 |
| » | 134,9 | 131,05 | 3,85 | 3,84 | +0,01 |
| » | 169,3 | 166,58 | 2,72 | 2,72 | +0,00 |
| » | 198,6 | 196,63 | 1,97 | 1,95 | +0,02 |
| » | 237,8 | 236,43 | 1,37 | 1,42 | —0,05 |

Bei der Berechnung zeigt sich nun, dass weder $L'V$ noch auch $L'^2V$ eine constante Grösse ist, dass also die Ausschläge des Goldblättchens

weder im umgekehrten Verhältnisse der einfachen Entfernungen noch auch ihrer Quadrate stehen; ein Gleiches gilt von der Beziehung zwischen *L* und *V*. Diese letztere Beziehung lässt sich hinlänglich genau darstellen durch die Formel $V = \frac{2051}{L^{\frac{7}{4}}}$; die nach derselben berechneten Werthe befinden sich in der fünften mit *W* überschriebenen Spalte der vorstehenden Tabelle, während die sechste Spalte die Differenzen der Beobachtung und der Rechnung enthält.

Diese Differenzen sind hinlänglich klein, so dass man also nach einer bei einer bestimmten Entfernung ausgeführten Messung sogleich die Entfernung berechnen kann, welche man der linken Scheibe zu geben hat, damit der Ausschlag des Goldblättchens bei Anwendung derselben elektrischen Spannung eine angegebene Grösse erreicht.

**b. Aenderung der Ausschläge mit Aenderung der Entfernung beider Scheiben.**

Die im Vorstehenden angegebenen Ausschläge erleiden natürlich Aenderungen, wenn die rechte Scheibe *C* nicht unverrückt stehen bleibt, sondern sich dem Goldblättchen immer mehr und mehr nähert, während sie und das Goldblättchen eben so wie vorhin zur Erde abgeleitet werden. Die nächstfolgende Tabelle enthält eine Versuchsreihe, welche diese Aenderungen uns vorführt. Die Ausschläge sind wieder das Mittel aus den beiden Ausschlägen, wenn die linke Scheibe *C* mit dem positiven und dem negativen Pole in Verbindung gesetzt wurde. Die mit *Q* überschriebene Columne gibt die Verhältnisse der Ausschläge bei einerlei *R* und verschiedenem *L*.

| *L.* | *R.* | *V.* | *Q.* | *L.* | *R.* | *V.* | *Q.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 76,1 | 284,1 | 9,16 | 1,00 | 76,1 | 93,0 | 10,59 | 1,00 |
| 110,4 | » | 4,97 | 0,54 | 110,4 | » | 6,35 | 0,59 |
| 198,6 | » | 1,82 | 0,20 | 76,1 | 68,5 | 10,68 | |
| 76,1 | 240,0 | 9,29 | 1,00 | 76,1 | 39,1 | 10,30 | |
| 110,4 | » | 5,02 | 0,54 | 76,1 | 14,6 | 8,57 | 1,00 |
| 198,6 | » | 1,82 | 0,19 | 110,4 | » | 3,60 | 0,42 |
| 76,1 | 191,0 | 9,80 | 1,00 | 76,1 | 9,7 | 7,67 | 1,00 |
| 110,4 | » | 5,27 | 0,54 | 110,4 | » | 3,05 | 0,41 |
| 76,1 | 142,0 | 10,17 | 1,00 | 76,1 | 7,3 | 7,10 | |
| 110,4 | » | 5,58 | 0,55 | 76,1 | 4,8 | 6,32 | 1,00 |
| 198,6 | » | 1,90 | 0,19 | 110,4 | » | 2,55 | 0,40 |

Denken wir uns die linke elektrische Scheibe in der Entfernung 76,1 unverändert stehen bleibend, und die rechte, mit der Erde in leitende Verbindung gesetzte, immer mehr und mehr dem Goldblättchen genähert, so nehmen anfangs, wenn die linke Scheibe mit derselben Elektricitätsquelle in Verbindung bleibt, die Ausschläge des Goldblättchens zu, erreichen, wenn die rechte Scheibe ungefähr denselben Abstand von dem Goldblättchen, wie die linke hat, ein Maximum und nehmen dann bei noch grösserer Annäherung der rechten Scheibe schnell ab. Diese Erscheinung entsteht dadurch, dass, wenn die rechte Scheibe der linken aus etwas grösserem Abstande her genähert wird, in der linken Scheibe infolge der Rückwirkung von Seiten der erstern eine stärkere Elektricität sich anhäuft, und diese auf das Goldblättchen stärker vertheilend und anziehend einwirkt. Freilich wirkt die entgegengesetzte in der rechten Scheibe durch Vertheilung erregte Elektricität auf das Goldblättchen in grade entgegengesetzter Weise vertheilend als die Elektricität der linken; wenn indess die Entfernung der rechten Scheibe von dem Goldblättchen noch gross ist, so wächst beim Annähern die Einwirkung der linken Scheibe stärker als die von der rechten ausgeübte. Dabei ist nicht zu übersehen, dass, während die rechte Scheibe die durch die linke erzeugte Vertheilung schwächt, sie doch in Betreff ihrer bewegenden Wirkung auf das Goldblättchen ihre Kraft zu der der andern Scheibe hinzufügt. Diess bleibt so, bis bei einer gewissen Nähe der Zuwachs beider Einwirkungen bei weiterer Annäherung sich ausgleicht; wird dann aber die rechte Platte noch mehr dem Goldblättchen genähert, so überwiegt der Zuwachs ihrer schwächenden Einwirkung, die Ausschläge werden also wieder geringer, ohne jedoch Null werden zu können. Aehnlich verhalten sich die Ausschläge, wenn die linke Scheibe auf 110,4 steht, während die rechte genähert wird; auch hier scheint das Maximum der Ausschläge einzutreten, wenn beide Platten ungefähr gleiche Entfernungen von dem Goldblättchen haben. — Die Verhältnisse, in welchen sich die Ausschläge ändern, wenn die rechte Scheibe in nicht zu geringem Abstande feststeht, und die linke sich entfernt, bleiben anfangs ziemlich dieselben; z. B. 1 : 0,54 für die Entfernungen 76,1 und 110,4. Bei grösserer Annäherung der rechten Scheibe werden sie aber etwas kleiner.

c. Aenderung der Ausschläge durch Aenderung der elektrischen Spannung in der Scheibe.

Es war ferner nöthig zu untersuchen, wie sich die Ausschläge ändern, wenn die Intensität der Elektricitätsquelle, mit welcher die linke Scheibe verbunden wird, sich ändert. Diese Aenderungen der Intensität geschahen auf die Weise, dass die Anzahl der kleinen Elemente aus Zink, Kupfer und Wasser vermehrt oder verringert wurde. Bei der Berechnung dieser Versuche mache ich die freilich nicht in aller Strenge richtige Annahme, dass alle angewandten Elemente eine gleich grosse elektrische Spannung gaben, dass also die elektrische Spannung in der linken mit den Polen der Säule in Verbindung stehenden Scheibe bei einerlei Stellung genau der Anzahl der angewandten Elemente proportional war. Nimmt man stets mehrere Elemente zusammen, so darf man hoffen, dass ein grosser Theil der Ungleichheiten sich ausgleichen werde. Die rechte Scheibe und das Goldblättchen waren bei den folgenden Versuchen unausgesetzt zur Erde abgeleitet. Die erste Spalte der Tabelle enthält die Anzahl der Elemente unter $E$, die letzte Spalte unter $Q$ die Quotienten aus den Ausschlägen dividirt durch die Quadrate der Anzahl der Elemente; die Ausschläge $V$ sind wieder die bekannten Mittel.

| E. | L. | R. | V. | Q. | E. | L. | R. | V. | Q. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 43 | 76,1 | 284,1 | 9,15 | 0,00495 | 13 | 51,6 | 284,1 | 1,35 | 0,00799 |
| 38 | » | » | 6,85 | 0,00474 | 8 | » | » | 0,55 | 0,00859 |
| 33 | » | » | 4,97 | 0,00456 | | | | | |
| 28 | » | » | 3,52 | 0,00449 | 18 | 27,1 | 284,1 | 10,95 | 0,03480 |
| 23 | » | » | 2,42 | 0,00459 | 13 | » | » | 3,47 | 0,02054 |
| 18 | » | » | 1,50 | 0,00463 | 8 | » | » | 1,40 | 0,01719 |
| 13 | » | » | 0,85 | 0,00503 | 4 | » | » | 0,35 | 0,02188 |
| 33 | 51,6 | 284,1 | 11,50 | 0,01156 | 10 | 17,3 | 284,1 | 6,10 | 0,06100 |
| 28 | » | » | 7,50 | 0,00956 | 8 | » | » | 2,87 | 0,04484 |
| 23 | » | » | 4,50 | 0,00851 | 4 | » | » | 0,72 | 0,04500 |
| 18 | » | » | 2,70 | 0,00833 | | | | | |

Wenn die Elektricität des Goldblättchens allein von der Elektricität der Scheibe, welche mit dem einen Pole der Säule in Verbindung steht, abhinge, also bei einer Verdoppelung derselben ebenfalls verdoppelt und daher die Anziehung vervierfacht würde, so müssten die Ausschläge in der vorstehenden Tabelle proportional sein dem Quadrate der Anzahl der angewandten Elemente, oder die Quotienten aus den Ausschlägen dividirt durch die Quadrate der Anzahl der Elemente, eine constante

Grösse geben. Wie aber die vorstehende Tabelle zeigt, geschieht diess nicht (wohl infolge der bei der veränderten Stellung des Goldblättchens abgeänderten Wirkung von Seiten der zweiten Scheibe), sondern alle vier Abtheilungen stimmen darin überein, dass wenn man von einer geringen Anzahl Elemente ausgehend zu einer immer grössern fortschreitet, die erwähnten Quotienten anfangs sich etwas verringern, dann aber wieder wachsen.

2. *Ausschläge, wenn das Goldblättchen allein mit einer Elektricitätsquelle verbunden wird, während beide Scheiben zur Erde abgeleitet sind.*

Nachdem in dem Vorstehenden die Einwirkungen der elektrisirten Scheibe *C* auf das Goldblättchen einer genauern Untersuchung unterworfen worden sind, soll jetzt die Einwirkung, welche zwischen dem elektrisirten Goldblättchen und den mit der Erde in Verbindung gesetzten Scheiben stattfindet, nachgewiesen werden.

Da die Umstände in diesem zweiten Falle anders als in dem ersten sind, indem der elektrisirte Körper die geringste Breite hat, und sich zwischen den beiden zur Erde abgeleiteten Scheiben befindet, so werden wir nicht dieselben Resultate als in dem ersten Falle erwarten dürfen. Namentlich wird sogleich einleuchten, dass, weil das Goldblättchen auf jede Scheibe vertheilend wirkt, und also nach jeder Seite hin eine Anziehung erfährt, die daraus resultirende Ablenkung desselben, da sie nur die Differenz dieser beiden Wirkungen ist, geringer ausfallen muss, als in dem vorhergehenden Falle, wo freilich auch die Ablenkung in gewisser Hinsicht von einer Differenz der Wirkungen beider Platten, aber in anderer Weise, abhing. Bei einem Versuche, wo die linke Scheibe um 76,1 und die rechte um 284,1 von dem Goldblättchen abstand, wurde eine und dieselbe Elektricitätsquelle erst mit der linken Scheibe, während die rechte Scheibe und das Goldblättchen zur Erde abgeleitet waren, und dann mit dem Goldblättchen, während beide Scheiben zur Erde abgeleitet waren, verbunden. Die Ablenkung betrug im ersten Falle 11, 57, im zweiten dagegen nur 5,35.

**a. Aenderung der Ausschläge durch Aenderung der Entfernung der Scheiben.**

Die folgende Tabelle zeigt, in welcher Weise die Ablenkungen sich ändern, wenn die linke Scheibe ihren Ort ändert und die rechte unverändert stehen bleibt, während das Goldblättchen stets mit einer und derselben Elektricitätsquelle in Verbindung gesetzt wird. Die an-

geführten Ausschläge *V* sind wieder das Mittel aus den beiden, welche durch die Verbindung des Goldblättchens mit dem positiven und negativen Pole entstehen.

| *L.* | *R.* | *V.* | *V'.* | *L'.* | *W.* | *D.* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 56,5 | 284,1 | 10,1 | | | | |
| 76,1 | » | 4,87 | 4,87 | 71,23 | 4,81 | +0,06 |
| 90,8 | » | 3,37 | 3,42 | 87,43 | 3,36 | +0,01 |
| 110,4 | » | 2,32 | 2,31 | 108,08 | 2,32 | 0,00 |
| 134,9 | » | 1,47 | 1,55 | 133,43 | 1,60 | —0,13 |
| 169,3 | » | 0,90 | 1,04 | 168,50 | 1,07 | —0,17 |

Hier stehen ebenfalls die Ablenkungen nicht genau im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen des Goldblättchens von der linken Scheibe, wie auch unter vorliegenden Umständen nicht zu erwarten stand; sie nähern sich aber diesem Verhältnisse doch mehr, wenigstens von der zweiten Messung bei 76,1 an, als in dem frühern Falle auf S. 408, wo die Elektricität der linken Scheibe mitgetheilt wurde, wie man aus der mit *V'* überschriebenen Spalte ersieht, welche unter der Voraussetzung, dass die Ausschläge im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate von *L* stehen, berechnet ist. Uebrigens sind die Entfernungen des Endes des Goldblättchens, welche zu den einzelnen Ablenkungen gehören, nicht *L*, sondern *L*—*V*, und ebenso nicht *R*, sondern *R*+*V*. Berechnet man diese Entfernungen *L'*=*L*—*V* und wendet auf dieselben, indem man von dem vierten der vorstehenden Versuche ausgeht, das Gesetz an, dass sich die Ablenkungen umgekehrt verhalten sollen, wie die $\frac{7}{4}$ Potenzen der Entfernungen *L'*, so erhält man die unter der Spalte *W* verzeichneten Werthe. Die letzte Spalte *D* enthält die Differenzen zwischen der Rechnung und der Beobachtung. Die erste Beobachtung ist aus der Rechnung ausgeschlossen worden. Innerhalb der Ablenkungen bis 4,87 kann man also, wenn es sich um Reduction einer Ablenkung auf eine andere Entfernung, welche nicht sehr von der ursprünglichen abweicht, handelt, das obige Gesetz anwenden. Wollte man die obigen Ablenkungen genauer darstellen, so müsste man eine andere Form der Beziehung zwischen *L'* und *V* aufstellen, wobei auch *R* in Betracht zu ziehen wäre; was aber kein weiteres Interesse hat, da das obige einfache Gesetz für Reductionen auf nicht sehr abweichende Entfernungen vollständig genügt.

In der folgenden Versuchsreihe blieb die linke Scheibe auf 76,1 stehen, während die rechte von 284,1 aus dem Goldblättchen immer weiter genähert wurde.

| L. | R. | V. | L. | R. | V. |
|---|---|---|---|---|---|
| 76,1 | 284,1 | +4,87 | 76,1 | 77,1 | +0,20 |
| » | 240,0 | +4,65 | » | 75,8 | —0,07 |
| » | 191,0 | +4,20 | » | 76,1 | — sehr wenig |
| » | 142,0 | +3,52 | » | 76,3 | 0 |
| « | 93,0 | +1,67 | | | |

+ bedeutet eine Ablenkung des Goldblättchens nach der linken Scheibe hin und — nach der rechten. Im vorletzten Versuche der Tabelle war die Bewegung nach der rechten Scheibe hin sehr gering, so dass sie nicht gut gemessen werden konnte; in dem letzten Versuche trat nur ein äusserst schwaches Zucken des Goldblättchens von nicht messbarer Grösse ein. Die Ausschläge nehmen also bei der Annäherung der rechten Scheibe ab, und werden Null, wenn beide Scheiben gleich weit von dem Goldblättchen abstehen. Ein Versuch dieser Art, wo das Goldblättchen allein mit der Elektricitätsquelle in Verbindung steht, während die beiden Scheiben zur Erde geleitet sind, kann sehr zweckmässig benutzt werden, um bei der Regulirung des Instrumentes ohne besondere Rechnung sogleich die Stellungen zu finden, in welchen die Scheiben gleichen Abstand von dem Goldblättchen haben.

**b. Aenderung der Ausschläge durch Aenderung der elektrischen Spannung in dem Goldblättchen.**

Die nächste Versuchsreihe gibt die Aenderungen in den Ausschlägen an, welche entstehen, wenn bei unveränderter Entfernung beider Scheiben, die Elektricitätsquelle, mit welcher das Goldblättchen verbunden ist, geändert wird. Ich werde diese Versuchsreihe ausnahmsweise vollständig mittheilen. Die mit *S* überschriebene Spalte gibt den ursprünglichen Stand des Goldblättchens; die mit — bezeichnete gibt den Stand bei der Verbindung mit dem negativen und die mit + bezeichnete bei Verbindung mit dem positiven Pole. Da das Goldblättchen an sich etwas — elektrisch ist, so müssen jetzt die negativen Ausschläge etwas grösser werden als die positiven, während früher, wo die Pole der Säule mit der linken Scheibe verbunden waren, grade das Umgekehrte stattfand. Die im Goldblättchen schon vor seiner Verbindung

mit den Polen der Säule enthaltene Elektricität ist gleich der halben Differenz der beiden Ausschläge bei negativer und positiver Elektricität, und diese Differenz muss also bei gleichbleibender Entfernung der Scheiben eine constante Grösse sein, womit die Versuche auch hinlänglich übereinstimmen. In der mit *V* überschriebenen Spalte findet sich wie früher das Mittel aus beiden Ausschlägen.

| *E.* | *L.* | *R.* | *S.* | — | + | *V.* | *W.* | *D.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 43 | 76,1 | 284,1 | 17,0 | 21,80 | 21,65 | 4,72 | 4,67 | +0,05 |
| 38 | » | » | 17,0 | 20,70 | 20,60 | 3,65 | 3,65 | 0,00 |
| 33 | » | » | 17,0 | 19,75 | 19,65 | 2,70 | 2,75 | —0,05 |
| 28 | » | » | 17,0 | 18,95 | 18,90 | 1,90 | 1,98 | —0,08 |
| 23 | » | » | 17,0 | 18,35 | 18,25 | 1,30 | 1,34 | —0,04 |
| 18 | » | » | 17,0 | 17,85 | 17,75 | 0,80 | 0,82 | —0,02 |
| 18 | 27,1 | 284,1 | | | | 7,42 | | |
| 13 | » | » | | | | 2,90 | | |
| 8 | » | » | | | | 1,0 | | |

Da die Elektricität in den beiden Scheiben nur von der Elektricität des Goldblättchens abhängt, also proportional mit ihr zu- und abnimmt, so müssen die aus den gegenseitigen Wirkungen resultirenden Anziehungen, wenn die Entfernungen ungeändert bleiben, sich verhalten wie die Quadrate der elektrischen Spannungen, oder wenn wir diese letztern der Anzahl der angewandten elektrischen Elemente *E* proportional annehmen, wie die Quadrate der Anzahl der Elemente. Nehmen wir für den Augenblick darauf nicht Rücksicht, dass die Entfernung *L* bei der Ablenkung etwas verringert wird (die Aenderung für *R* kömmt bei der grossen Entfernung von *R* nicht sehr in Betracht), so erhält man ausgehend von dem zweiten Versuche bei der Berechnung nach dem angegebenen Gesetze die unter *W* verzeichneten Ablenkungen. Die letzte Spalte enthält die Differenzen. Die Betrachtung dieser Differenzen zeigt aber, obwohl sie noch nicht $\frac{1}{10}$ Skalentheil erreichen, dennoch deutlich den Einfluss der vorhin gemachten Vernachlässigung. Indem wir nämlich bei der Rechnung die zweite Messung zu Grunde legen, erhalten wir bei Berechnung der ersten einen geringern Werth als ihn die Beobachtung gibt, weil der beobachtete Werth zu einer geringern Entfernung gehört, also nothwendig grösser sein muss; und umgekehrt erhalten wir bei der Berechnung der folgenden Ablenkungen einen etwas zu hohen Werth, weil der zu Grunde gelegte 3,65 zu hoch ist.

Die vorstehende Versuchsreihe kann benutzt werden, um ein Urtheil über die Genauigkeit der mit diesem Instrumente ausgeführten Messungen zu gewinnen. Ich will zu diesem Zwecke an die Ausschläge die mit Rücksicht auf die oben angegebene Aenderung der Entfernungen nöthigen Correctionen anbringen und dann das zuvor ausgesprochene Gesetz, dass die Ablenkungen sich wie die Quadrate der Anzahl der Elemente verhalten, darauf anwenden. Man erhält die Entfernungen des Goldblättchens im Zustande der Ablenkung von der linken Scheibe, wenn man die Werthe von $V$ in der vorstehenden Tabelle von den zugehörigen Werthen von $L$ abzieht. Es sei $L'=L-V$. Oben wurde nun nachgewiesen, dass, wenn das Goldblättchen mit der Elektricitätsquelle verbunden ist, die Reduction der Ablenkungen auf verschiedene Entfernung sich ausführen lässt nach dem Gesetze, dass die Ablenkungen sich verhalten umgekehrt wie die $\frac{7}{4}$ Potenzen der Entfernungen. Werden nach diesem Gesetze die Ausschläge, welche bei den Entfernungen $L'$ beobachtet waren, für die Entfernung $L=76{,}1$ berechnet, so erhält man die in nachstehender Tabelle unter $U$ befindlichen Werthe. Berechnet man dann die Ausschläge nach der Formel $W=0{,}0023005E^2$, wo $E$ die Anzahl der Elemente bedeutet, so erhält man die mit $W$ überschriebenen Werthe derselben Tabelle. Die letzte Spalte $D$ gibt die Differenzen zwischen $U$ und $W$.

| *E.* | *L.* | *R.* | *V.* | *L'.* | *U.* | *W.* | *D.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 43 | 76,1 | 284,1 | 4,72 | 71,38 | 4,22 | 4,25 | −0,03 |
| 38 | » | » | 3,65 | 72,45 | 3,35 | 3,32 | +0,03 |
| 33 | » | » | 2,70 | 73,40 | 2,54 | 2,51 | +0,03 |
| 28 | » | » | 1,90 | 74,20 | 1,82 | 1,80 | +0,02 |
| 23 | » | » | 1,30 | 74,80 | 1,26 | 1,22 | +0,04 |
| 18 | » | » | 0,80 | 75,30 | 0,78 | 0,74 | +0,04 |

Man sieht, dass die Fehler noch nicht $\frac{1}{10}$ Skalentheil erreichen, dass also die Genauigkeit der Beobachtungen vollkommen genügt.

3. *Ausschläge, wenn beide Scheiben mit den Polen einer Säule in Verbindung sind, und dem Goldblättchen ebenfalls Elektricität mitgetheilt wird.*

In den meisten Fällen, wo man das von mir construirte Elektrometer in Gebrauch nimmt, wird man dasselbe nicht auf die bisher angeführten Arten, wo die Elektricitätsquelle entweder nur mit der einen

Scheibe, oder mit dem Goldblättchen in Verbindung stand, während alle übrigen Theile zur Erde abgeleitet waren, benutzen (obwohl in manchen Fällen, wo es sich z. B. um die Aenderung einer Elektricitätsquelle im Laufe der Zeit handelt, grade eine solche Einrichtung mit Vortheil angewendet werden kann); sondern man wird die beiden Scheiben mit den beiden Polen einer Volta'schen in ihrer Mitte zur Erde abgeleiteten Säule verbinden, und dem Goldblättchen die zu messende Elektricität mittheilen. Die Ablenkung ist also dann das Resultat aus den Einwirkungen beider entgegengesetzt elektrischen Scheiben auf das Goldblättchen und des elektrischen Goldblättchens auf die Scheiben. Sämmtliche Wirkungen sind in dem Vorhergehenden gesondert betrachtet, und es liesse sich daraus allerdings die aus ihrer Vereinigung entstehende Resultirende herleiten. Es wird aber, da es sich hier grade um den experimentellen Gebrauch des Instrumentes handelt, zweckentsprechender sein, die Beziehungen zwischen den Ablenkungen des Goldblättchens und der Entfernung der Scheiben, so wie der in diesen drei Körpern vorhandenen elektrischen Spannungen ebenfalls wieder auf experimentellem Wege zu suchen.

**a. Aenderung der Ausschläge durch Aenderung der elektrischen Spannung im Goldblättchen bei constanter Elektricität in den Scheiben.**

In dem Folgenden sind also mit den beiden Scheiben stets die Pole einer in ihrer Mitte zur Erde abgeleiteten, und zwar wenn nicht ausdrücklich etwas anderes erwähnt wird, aus kleinen Elementen Zink, Kupfer und Wasser bestehenden Volta'schen Säule in Verbindung, und dem Goldblättchen wird ausserdem auch noch Elektricität mitgetheilt. Zunächst will ich den Beweis führen, dass unter diesen Umständen bei gleichbleibender elektrischer Spannung in den beiden Scheiben die Ablenkungen des Goldblättchens, wenn sie eine gewisse Grösse nicht überschreiten, den Intensitäten der dem Goldblättchen mitgetheilten Elektricitäten proportional sind. Um an Genauigkeit der Beobachtung zu gewinnen, ist es vortheilhaft, nicht die einfachen Ablenkungen des Goldblättchens, sondern vielmehr die doppelten zu beobachten, was sich leicht durch den zwischen den beiden Polen der Säule und den beiden Scheiben eingeschalteten und S. 400 beschriebenen Commutator erreichen lässt, indem man nach der Mittheilung der Elektricität an das Goldblättchen die Ablenkung des letztern in den beiden entgegenge-

setzten Lagen des Commutators abliest. Die Hälfte des Unterschiedes der in beiden Stellungen des Goldblättchens abgelesenen Skalentheile gibt dann die einfache Ablenkung des Goldblättchens. Man hat bei diesem Verfahren den grossen Vortheil, dass man von der Stellung des Goldblättchens im nicht elektrischen Zustande ganz unabhängig ist und die Messung dieser doppelten Ablenkung des Goldblättchens, ohne diesem seine Elektricität zu nehmen, so oft man will, und zwar sehr schnell hintereinander wiederholen kann, so dass man völlig sicher ist, dass die Ruhelage des Goldblättchens sich unterdess nicht geändert hat.

Handelt es sich nun, wie im vorliegenden Falle, darum, die Beziehung zwischen den Ablenkungen und der Elektricität des Goldblättchens nachzuweisen, so wird solches am leichtesten gelingen, wenn man eine zweite kleine Säule aus Zink, Kupfer und Wasser nimmt, und den einen Pol derselben mit dem Goldblättchen, den zweiten aber mit der Erde in Verbindung setzt. Um den früher schon erwähnten Einfluss der im Goldblättchen durch die Berührung der verschiedenen Theile vorhandenen Elektricität auszuscheiden, könnte man denselben messen, und als Correction an die bei Verbindung eines Poles der zweiten Säule mit dem Goldblättchen gemessenen Ablenkungen anbringen, negativ oder positiv, je nachdem diese Elektricität mit der des verbundenen Poles gleichnamig oder ungleichnamig ist. Vortheilhafter wird es aber sein, diese Correction wieder wie früher dadurch zu vermeiden, dass man zwischen dem Goldblättchen und der zweiten Säule noch einen zweiten Commutator anbringt, der es gestattet in jedem Augenblicke jeden beliebigen Pol dieser zweiten Säule mit dem Goldblättchen zu verbinden, während der andere Pol zur Erde abgeleitet ist. Beobachtet man bei jeder der zwei Lagen dieses Commutators die Ablenkungen des Goldblättchens in jeder der zwei Lagen des ersten Commutators, so gibt der vierte Theil der Summe aus den beiden Unterschieden in den verschiedenen Lagen des zweiten Commutators die Ablenkung des Goldblättchens, wie sie befreit von den Aenderungen der Lage und von der Elektricität des Goldblättchens würde gemessen worden sein.

Man wird bei solchen Versuchen, um die Elektricität des Goldblättchens nicht noch durch die stärkere Vertheilungswirkung von Seiten der einen oder andern Scheibe abzuändern, beide Scheiben so nahe als möglich in gleiche Entfernungen von dem Goldblättchen stellen. Ein Mittel, diese Stellungen leicht zu finden, ist schon oben S. 414 ange-

geben worden. Kleinere Abweichungen in diesen Entfernungen schaden nicht, und sind auch wegen der infolge der Luftströmungen im Innern der Gehäuse eintretenden Aenderungen in der Ruhelage des Goldblättchens nie ganz zu vermeiden. Ich werde daher in dem Folgenden anstatt der Entfernung der Scheiben von dem Goldblättchen stets die halbe Entfernung beider Scheiben angeben, obwohl die eine Entfernung von der andern möglicherweise selbst um einige Hundertstel einer Linie verschieden sein kann.

In der nachfolgenden Versuchsreihe waren die beiden Scheiben mit den Polen einer Säule von 24 Elementen (Zink, Kupfer, Wasser) durch einen Commutator in Verbindung. Der eine Pol einer zweiten Säule non 12 Elementen stand mittelst eines zweiten Commutators mit dem Goldblättchen in Verbindung; die Anzahl dieser letztern Elemente wurde nach und nach vermindert. Die halbe Entfernung beider Scheiben war 74,7.

Die Mittheilung aller einzelnen Ablesungen würde zu viel Raum hinweg nehmen, ich werde daher in dem Folgenden stets nur die aus den vier Ablesungen bei den verschiedenen Stellungen der beiden Commutatoren berechneten Ablenkungen des Goldblättchens angeben. Um jedoch eine Einsicht in die einzelnen Vorgänge möglich zu machen, will ich einige Ablesungen vollständig hinschreiben. Ich habe jeden Satz aus vier Ablesungen zwei Mal gemacht und theile alle acht Ablesungen mit. Die erste Spalte *E* enthält die Anzahl der Elemente der zweiten Säule, deren Pol mit dem Goldblättchen verbunden ist.

| *E.* | + *A.* | *B.* | − *C.* | *D.* | + $B-A$ | − $D-C$ | $\frac{(B-A)+(D-C)}{4}$ | $\frac{(D-C)-(B-A)}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 12,40 | 21,00 | 12,00 | 21,40 | 8,60 | 9.40 | 4,50 | −0,40 |
| | 12,35 | 21,00 | 12,00 | 24,40 | 8,65 | 9,40 | 4,51 | −0,37 |
| 11 | 12,80 | 20,70 | 12,45 | 21,00 | 7,90 | 8,55 | 4.09 | −0,32 |
| | 12,75 | 20,75 | 12,40 | 21,00 | 8,00 | 8,60 | 4,15 | −0,30 |
| 10 | 13,00 | 20,45 | 12,85 | 20,70 | 7,45 | 7,85 | 3,82 | −0,20 |
| | 13,00 | 20,40 | 12,85 | 20,70 | 7,40 | 7,85 | 3,82 | −0,22 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 12 | 12,15 | 20,90 | 11,95 | 21,15 | 8,75 | 9,20 | 4,49 | −0,22 |
| | 12,15 | 20,95 | 11,95 | 21,15 | 8,80 | 9.20 | 4,50 | −0,20 |

*A* und *B* sind die beiden Ablesungen, wenn der positive Pol, und *C* und *D*, wenn der negative Pol der Säule mit dem Goldblättchen in Verbindung steht. *A* und *D* gehören zu der einen Lage des ersten Commutators, *B* und *C* zu der andern; dagegen *A* und *B* zu der einen, und *C* und *D* zu der andern Lage des zweiten Commutators. Ich habe die vorstehenden Versuche noch desshalb ausführlich mitgetheilt, um nachzuweisen, wie selbst, wenn kleine Aenderungen in der ursprünglich im Goldblättchen vorhandenen Elektricität (vielleicht eine Folge der nicht absoluten Undurchdringlichkeit des Schellacks für die Elektricität) eintreten, doch das zuvor angegebene Verfahren Resultate liefert, welche davon frei sind. Durch einen zufälligen Umstand war die ursprünglich im Goldblättchen vorhandene Elektricität etwas erhöht worden; dieselbe nahm dann nach und nach bis zu einem constanten Werthe ab, wie die Zahlen der letzten Spalte zeigen. Diese Aenderung hat aber, wie die zweite Wiederholung der Beobachtungen bei 12 Elementen lehrt, keinen Einfluss auf die Werthe der vorletzten Spalte, welche die richtigen Ablenkungen angibt. Ebenso sieht man, dass die Aenderung der Ruhelage des Goldblättchens bei nicht elektrischem Zustande nicht weiter in Betracht kommt; bei den ersten Messungen mit 12 Elementen war sie $\left(\frac{A+B}{2}\right.$ oder $\left.\frac{C+D}{2}\right)$ gleich 16,17 und bei den letzten Wiederholungen gleich 16,55.

In der nächsten Tabelle stehen in der mit *V* überschriebenen Spalte die aus zwei sehr nahe übereinstimmenden Versuchsreihen berechneten Mittelwerthe.

| *E.* | *V.* | *V/E.* | *W.* | *D.* | *E.* | *V.* | *V/E* | *W.* | *D.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 4,50 | 0,375 | 4,56 | −0,06 | 5 | 1,91 | 0,382 | 1,90 | +0,01 |
| 11 | 4,13 | 0,375 | 4,18 | −0,05 | 4 | 1,53 | 0,382 | 1,52 | +0,01 |
| 10 | 3,82 | 0,382 | 3,80 | +0,02 | 3 | 1,11 | 0,370 | 1,14 | −0,01 |
| 9 | 3,46 | 0,383 | 3,42 | +0,04 | 2 | 0,75 | 0,375 | 0,76 | −0,01 |
| 8 | 3,05 | 0,376 | 3,04 | +0,01 | 1 | 0,34 | 0,340 | 0,38 | −0,04 |
| 7 | 2,72 | 0,388 | 2,66 | +0,06 | 12 | 4,49 | 0,374 | | |
| 6 | 2,30 | 0,383 | 2,28 | +0,02 | | | | | |

Die dritte Spalte enthält die Ablenkungen, wie sie im Mittel für ein Element beobachtet werden würden. Man sieht, dass diese Werthe sehr nahe übereinstimmen, auch selbst der Werth bei einem Elemente, wo

alle Beobachtungsfehler in voller Grösse vorhanden sein können, weicht von dem Mittel der übrigen nur um 0,04 Theilstrich ab. Die vierte Spalte enthält die unter der Voraussetzung, dass die Ablenkungen proportional mit der Elektricität des Goldblättchens zunehmen, berechneten Ausschläge. Die fünfte Spalte enthält die Differenzen zwischen der Beobachtung und Rechnung.

Die verschiedenen Zeichen der Differenzen in der fünften Spalte haben jedenfalls ihren Grund in einer Verschiedenheit der elektromotorischen Kraft der einzelnen Elemente, deren Einfluss in den vorstehenden Versuchen nicht beseitigt werden konnte. Es gibt indess ein sehr einfaches Mittel, um diesen Einfluss unschädlich zu machen; ich will seine Anführung zugleich benutzen, um den Beweis zu führen, dass die Ausschläge bei der oben angegebenen Entfernung der Scheiben selbst bis zu 8 Theilstrichen hin der elektrischen Spannung im Goldblättchen sehr nahe proportional sind.

Ich bildete eine Säule aus 30 der kleinen Zinkkupferelemente, und richtete sie so ein, dass ich sowohl die elektrische Spannung der ganzen Säule, als auch jeder ihrer Hälften, wenn sie in der Mitte getrennt wurde, messen konnte.

| | |
|---|---|
| Die eine Hälfte aus 15 Elementen gab | 4,12 |
| Die andere Hälfte aus den übrigen 15 Elementen gab | 4,20 |
| Die ganze Säule gab | 8,36 |
| Dieselbe Säule nochmals gab | 8,39 |
| Die erste Hälfte von Neuem gemessen | 4,17 |
| Die andere Hälfte | 4,19 |

Der Werth einer Hälfte ist im Mittel 4,17

Die halbe Spannung der ganzen Säule ist 4,18.

Werden die Ausschläge noch grösser, so beginnt der Ausschlag stärker als einfach proportional der elektrischen Spannung im Goldblättchen zu wachsen. Die Weite, bei welcher die Ausschläge beginnen merklich stärker als einfach proportional den elektrischen Spannungen des Goldblättchens zu wachsen, hängt von der Entfernung der Scheiben ab. Bei weiterer Entfernung der Scheiben tritt dieser Punkt erst bei grösseren Ablenkungen ein.

Ich will hier noch eine ähnliche Versuchsreihe mit dem Elektrometer *B* anführen, in welcher die beiden Scheiben einander näher standen, als in den vorhergehenden Versuchen:

| | | |
|---|---|---|
| 1) 16 Elemente gaben einen (einfachen) Ausschlag von | 6,91 | |
| Die erste Hälfte derselben . . . . . . . . | 3,32 | 3,33 |
| Die zweite . . . . . . . . . . . . . . | 3,33 | |
| 2) 12 Elemente gaben . . . . . . . . . . . | 5,02 | |
| Die erste Hälfte derselben . . . . . . . . | 2,48 | 2,47 |
| Die zweite . . . . . . . . . . . . . . | 2,46 | |
| 3) 8 Elemente gaben . . . . . . . . . . . . | 3,31 | |
| Die erste Hälfte derselben . . . . . . . . | 1,67 | 1,66 |
| Die zweite . . . . . . . . . . . . . . | 1,66 | |

Das letzte Mittel 1,66 stimmt mit $\frac{3,31}{2} = 1,65$ überein; das vorletzte 2,47 weicht nur um 0,05 von $\frac{5,02}{2} = \frac{2,51}{2}$; das erste Mittel 3,33 aber schon um 0,12 von $\frac{6,91}{2} = 3,45$ ab.

Bei demselben Elektrometer wurden dann die Scheiben weiter von einander entfernt, so dass 16 Elemente erst den Ausschlag 5,2 gaben, der zuvor schon durch 12 fast erreicht worden war. Während bei den vorigen Versuchen die Proportionalität sich nicht bis auf 6 Skalentheile erstreckte, ging sie bei der weitern Entfernung bis auf 9 Skalentheile. Um bei dieser letzten Entfernung der Scheiben den Gang der Abweichungen der Ausschläge von der Proportionalität mit den elektrischen Intensitäten anschaulich zu machen, habe ich in der folgenden Figur die Anzahl der Elemente oder die elektrischen Intensitäten als Abscissen genommen, die Ausschläge der Scheiben als Ordinaten aufgetragen und deren Endpunkte durch die Linie $AB$ verbunden. Man sieht, dass bis zu 28 Elementen oder bis zu 9,2 Skalentheilen die Linie $AB$ grade ist, also die Ausschläge proportional mit den Intensitäten wachsen, darüber hinaus aber rascher zunehmen. Verlängert man die grade Linie $AC$ bis $D$, so gibt der Unterschied der Ordinaten von $CB$ und $CD$ die Abweichungen von der Proportionalität. Wird eine solche graphische Darstellung, wie Fig. 4, auf einem in gleich grosse Quadrate eingetheilten Papiere in vergrössertem Maassstabe ausgeführt, so kann sie sehr bequem dienen, um die zu einem beobachteten Ausschlage, für welchen die Proportionalität nicht mehr gilt, gehörige wahre Intensität zu finden. Man sucht den Punkt der Curve $CB$, dessen Ordinate durch diesen Ausschlag ausgedrückt wird, und bestimmt dann die Länge der zu den-

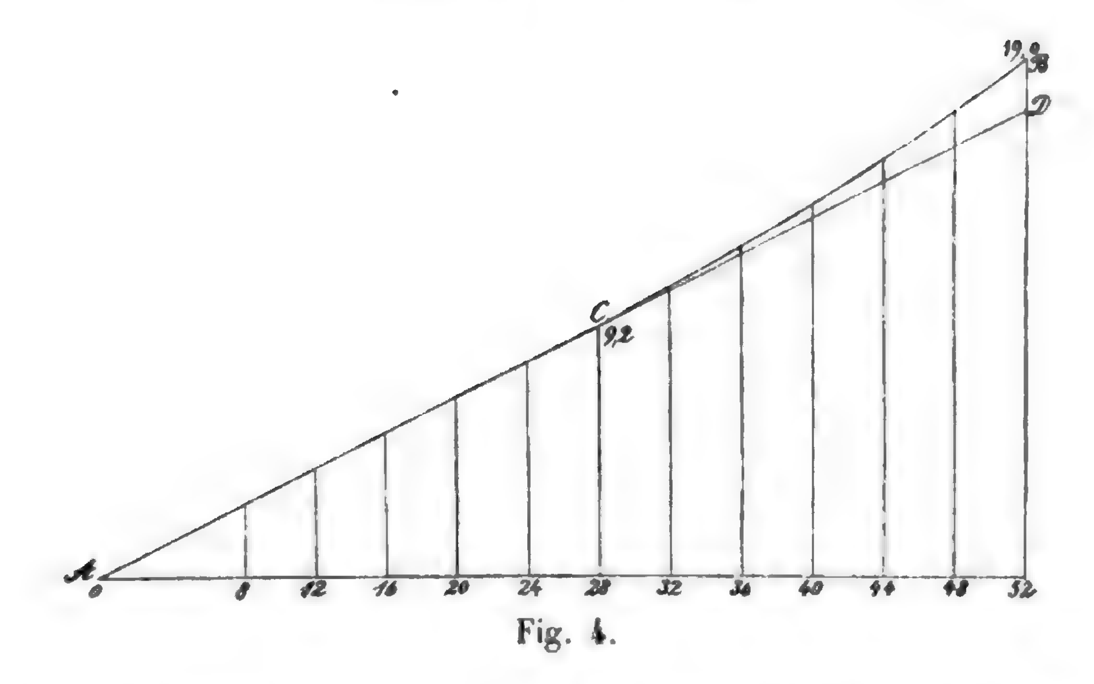



Fig. 4.

selben Abscisse gehörigen Ordinate der graden Linie *CD;* die Länge der letztern Ordinate ist die gesuchte Intensität.

Es ist, wie man sieht, leicht, in jedem Falle zu bestimmen, wie weit die Proportionalität der Ausschläge und der elektrischen Spannungen geht; will man grössere Ausschläge benutzen, so ermittelt man durch Versuche, wie sie im Vorstehenden beschrieben sind, die für grössere Ablenkungen nöthigen Correctionen, die sich mit aller Schärfe auswerthen lassen.

**b. Aenderung der Ausschläge durch Aenderung der Entfernung der Scheiben.**

Die Verhältnisse, in welchen die Ablenkungen des Goldblättchens bei einerlei elektrischer Spannung desselben mit der Entfernung der Scheiben von demselben sich ändern, legt die folgende Versuchsreihe dar. Die erste Spalte *S* enthält die halbe Entfernung beider Scheiben, die durch den Commutator stets mit den Polen derselben Säule in Verbindung standen. Die zweite Spalte *E* gibt die Anzahl der Elemente, deren Elektricität zum Goldblättchen geleitet wurde, oder unter der Voraussetzung ihrer vollkommenen Gleichheit, die Grösse der elektrischen Spannung in dem Goldblättchen. Die dritte Spalte *V* gibt die Ablenkungen, die vierte berechnet dieselben für jeden dieser Werthe auf 12 Elemente, die letzte Spalte nimmt das Mittel aus diesen für 12 Elemente berechneten Ablenkungen.

| S. | E. | V. | | | S. | E. | V. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 248,7 | 36 | 4,52 | 1,51 | | 150,7 | 36 | 9,64 | 3,21 | |
| » | 24 | 2,97 | 1,48 | 1,50 | » | 24 | 6,45 | 3,22 | 3,19 |
| » | 12 | 1,50 | 1,50 | | » | 12 | 3,15 | 3,15 | |
| | | | | | 126,2 | 24 | 8,35 | 4,17 | |
| 224,0 | 36 | 5,27 | 1,76 | | » | 12 | 4,13 | 4,13 | 4,13 |
| » | 24 | 3,51 | 1,75 | 1,75 | » | 6 | 2,05 | 4,10 | |
| » | 12 | 1,74 | 1,74 | | 101,7 | 24 | 11,56 | 5,78 | |
| | | | | | » | 12 | 5,69 | 5,69 | 5,68 |
| 199,7 | 36 | 6,28 | 2,09 | | » | 6 | 2,79 | 5,58 | |
| » | 24 | 4,19 | 2,09 | 2.09 | 77,2 | 12 | 8,64 | 8,64 | 8,62 |
| » | 12 | 2,10 | 2,10 | | » | 6 | 4,30 | 8,60 | |
| 175,2 | 36 | 7,69 | 2,56 | | 248,7 | 36 | 4,27 | 1,32 | |
| » | 24 | 5,11 | 2,55 | 2,54 | » | 24 | 2,73 | 1,36 | 1,35 |
| » | 12 | 2,50 | 2,50 | | » | 12 | 1,36 | 1,36 | |

Man sieht in der vorstehenden Tabelle deutlich, dass die Ausschläge des Goldblättchens bei einer bestimmten Entfernung der Scheiben, wenn sie gross werden, in einem etwas stärkern Verhältnisse als die Anzahl der Elemente zunehmen. Da aber die Unterschiede meist sehr unbedeutend sind, so habe ich aus allen bei einer und derselben Entfernung gemachten Messungen das Mittel genommen; nur in einem Falle, bei 101,7 Entfernung beträgt der Unterschied zwischen dem Mittel und der ersten und dritten Messung $\frac{1}{10}$ Skalentheil. Aus der ersten und letzten Abtheilung der Versuche, welche bei derselben Entfernung der Scheiben und mit derselben Anzahl Elemente angestellt wurden, geht hervor, dass im Laufe der Versuche die Ausschläge für dieselbe Anzahl Elemente abgenommen haben von 1,50 bis 1,35. Diese Aenderung darf uns hier, wo die Elemente der mit dem Goldblättchen in Verbindung gesetzten Säule oft anders verbunden werden mussten und daher mit den Händen ableitend berührt, oder auch wohl zum Theil aus der Flüssigkeit ausgehoben wurden, nicht verwundern; die Elemente der andern Säule, deren Pole den Scheiben die Elektricität mittheilten, blieben unverändert stehen. Um nun auf jene Aenderungen Rücksicht zu nehmen, bleibt, da leider keine zwischenliegenden Beobachtungen für den anfänglichen Werth von $S$ vorliegen, Nichts übrig, als die Annahme zu machen, dass die elektrische Spannung der Elemente proportional mit der Zeit sich geändert habe, und hiernach die oben angegebenen Mittel

auf die anfängliche Spannung von 1,50 für zwölf Elemente zu reduciren. Die erste Spalte *S* der folgenden Tabelle enthält die halben Entfernungen beider Scheiben, die zweite *V* die obigen Mittelwerthe für 12 Elemente, wie sie sich aus den Beobachtungen ergeben haben. Die dritte Spalte *V'* enthält die Ausschläge, wie sie für 12 Elemente bei den zugehörigen Entfernungen der ersten Spalte gewesen sein würden, wenn keine Abnahme in der elektrischen Spannung eingetreten wäre. Die vierte Spalte *V''* enthält die Werthe für diese Ausschläge, wie sie eine unter der Voraussetzung, dass die Ausschläge im umgekehrten Verhältnisse der 1,56 Potenz der Entfernung des Goldblättchens von den Scheiben stehen, geführte Berechnung ergibt. In der letzten Spalte *D* finden sich die Differenzen zwischen den durch Beobachtung und Rechnung erhaltenen Werthen.

| S. | V. | V'. | V''. | D. | S. | V. | V'. | V''. | D. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 248,7 | 1,50 | 1,50 | 1,53 | −0,03 | 126,2 | 4,13 | 4,43 | 4,42 | +0,01 |
| 224,0 | 1,75 | 1,77 | 1,80 | −0,03 | 101,7 | 5,68 | 6,17 | 6,21 | −0,04 |
| 199,7 | 2,09 | 2,15 | 2,16 | −0,01 | 77,2 | 8,62 | 9,51 | 9,51 | 0,00 |
| 175,2 | 2,54 | 2,65 | 2,65 | 0,00 | 248,7 | 1,35 | | | |
| 150,7 | 3,19 | 3,37 | 3,35 | +0,02 | | | | | |

Eine Versuchsreihe wie die vorstehende hat für den Gebrauch des Instrumentes eine grosse Wichtigkeit, indem ihre Berechnung das Mittel liefert, um die Empfindlichkeit des Instrumentes auf einen beliebigen Grad zu erhöhen und um Messungen, die bei verschiedenen Entfernungen der Scheiben ausgeführt sind, auf eine und dieselbe Entfernung derselben zu reduciren, und dadurch mit einander vergleichbar zu machen.

Für alle dem Elektrometer *A* ähnlich construirten Instrumente wird der Exponent der Potenz, mit welcher im umgekehrten Verhältnisse sich die Ausschläge ändern, nicht beträchtlich von dem vorstehend gefundenen abweichen. Für das Elektrometer *C* z. B., dessen Scheiben in Grösse und Form etwas von denen des Instrumentes *A* verschieden sind, beträgt derselbe 1,72. Die erste Spalte der nachstehenden Tabelle enthält die Entfernungen der beiden Scheiben dieses Instrumentes in einer beliebigen Einheit ausgedrückt, die zweite die beobachteten und die dritte die im umgekehrten Verhältnisse der 1,72 Potenz berechneten

Ausschläge. Die vierte Spalte zeigt, dass die Unterschiede zwischen der Beobachtung und Rechnung nur gering sind:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 241,4 | 5,98 | 5,98 | 0,00 |
| 318,4 | 3,75 | 5,72 | +0,03 |
| 395,4 | 2,62 | 2,62 | 0,00 |
| 472,4 | 1,82 | 1,88 | −0,06 |

**c. Aenderung der Empfindlichkeit des Elektrometers.**

Die Herstellung einer bestimmten Empfindlichkeit des Elektrometers gewährt nicht nur in vielen Fällen eine grosse Bequemlichkeit, sondern wird in andern selbst zu einer Nothwendigkeit. Man kann die Empfindlichkeit dadurch ändern, dass man entweder die Anzahl der Elemente, welche mit den Scheiben verbunden sind, oder auch die Entfernung der Scheiben von dem Goldblättchen abändert; jedes dieser Verfahren hat seinen bestimmten Kreis von Versuchen, in welchem es am zweckmässigsten angewendet wird. Wenn es sich um Versuche handelt, bei welchen sich die Spannung der Elektricität, welche dem Goldblättchen mitgetheilt wird, sehr rasch ändert, so ist das zweite Verfahren, die Empfindlichkeit abzuändern, nicht anwendbar, weil man nicht die nöthige Zeit zur Einstellung der Scheiben mittelst der Mikrometerschrauben auf eine andere Entfernung gewinnen kann. Solche Fälle treten z. B. ein bei Beobachtung der Elektricität des Turmalins, Boracits u. s. w. beim Erwärmen und beim Erkalten; macht man die Empfindlichkeit des Instrumentes so gross, dass man die ersten schwachen Anfänge der Elektricitäten messen kann, so geht später das Goldblättchen ganz aus dem Gesichtsfelde. Um in solchen Fällen die Empfindlichkeit nach und nach, so wie die Elektricität des Krystalles steigt, zu verringern, brachte ich die Elemente der Säule, deren Pole zu den Scheiben ihre Elektricität gaben, so unter einander und mit dem Commutator mittelst einer Vorrichtung, deren nähere Construction ich hier nicht weiter ausführen will, in Verbindung, dass, ohne irgend ein Element zu schliessen oder zu berühren, die blosse Verrückung eines gläsernen mit Schellack überzogenen Schiebers nach der einen Seite hin genügte, um die Anzahl der Elemente in der Säule und damit die Empfindlichkeit des Instrumentes zu verringern. Eine Verrückung des

Schiebers im entgegengesetzten Sinne erhöhte die Empfindlichkeit wieder. Ist nun die Beziehung zwischen der Grösse der Ausschläge und der Anzahl der durch den Schieber mit den Scheiben verbundenen Elemente bekannt, (beide sind einander einfach proportional), so lassen sich alle bei verschiedener Anzahl von Elementen angestellten Versuche auf dieselbe Empfindlichkeit des Instrumentes reduciren und mit einander vergleichbar machen. Ich will hier keine besonderen Versuche zur Nachweisung des einfach proportionalen Verhältnisses zwischen der Grösse der Ausschläge und der Anzahl der mit den Scheiben verbundenen Elemente anführen, da die nächste Versuchsreibe, welche mitgetheilt werden wird, zugleich diese Nachweisung liefern kann.

In solchen Fällen, wo man hinlänglich Zeit hat, die Stellung der Scheiben zu ändern, wird man zur Regulirung der Empfindlichkeit dieses letztere Verfahren vorziehen, weil man dabei der vorhin erwähnten Vorrichtung nicht bedarf, und ausserdem die Empfindlichkeit auf jeden beliebigen Grad zu bringen im Stande ist, während man nach dem früheren Verfahren dieselbe nur in gewissen Abstufungen zu verringern oder zu vergrössern vermag. Um eine ganz beliebige Empfindlichkeit herzustellen, d. h. für eine bestimmte elektrische Spannung in dem Goldblättchen einen gewünschten Ausschlag zu erhalten, bedarf es nur der Messung eines einzigen Ausschlages bei irgend einer Entfernung der Scheiben vom Goldblättchen; daraus lässt sich unter Zuziehung des Resultates der Versuchsreihe auf S. 424 für das Instrument *A* sogleich die Stellung berechnen, welche den Scheiben, wenn sie mit derselben Säule in Verbindung bleiben, gegeben werden muss, damit das Goldblättchen für die gegebene Elektricität den gewünschten Ausschlag zeigt. Es hält hiernach nicht schwer, zwei Instrumente so zu reguliren, dass ihre Ausschläge, wenn sie eine gewisse Grösse nicht überschreiten, genau mit einander übereinstimmen.

**d. Reduction der Empfindlichkeit des Instrumentes auf ein bestimmtes Maass.**

Das bisher Vorgetragene würde uns allerdings in den Stand setzen, die Empfindlichkeit unseres Instrumentes beliebig abzuändern, und Messungen, die bei verschiedenen Empfindlichkeiten ausgeführt sind, auf einander zu reduciren und untereinander vergleichbar zu machen, wenn die Voraussetzung erlaubt wäre, dass die mit den Scheiben verbundenen elektrischen Pole ihre Spannung unverändert behielten; eine

Voraussetzung, die bei vorsichtiger Behandlung des Instrumentes in genäherter Weise für kürzere Zeiträume allerdings, wie wir sahen, Geltung hat, aber auf längere Zeiträume, auch nur bis zu einem Tage hin, durchaus unstatthaft ist. So weit wir also das Elektrometer bis jetzt betrachtet haben, ist es zur Messung der atmosphärischen Elektricität, wo es sich um Vergleichung der in längern Zeiträumen mit ihm gemachten Beobachtungen handelt, noch nicht brauchbar. Es gibt aber, wie wir sogleich sehen werden, ein höchst einfaches Mittel, um durch die vorläufige Messung eines Ausschlages des Goldblättchens die nöthigen Angaben zur Bestimmung der vorhandenen Empfindlichkeit des Instrumentes zu gewinnen, und die mit ihm ausgeführten Messungen unter einander vergleichbar zu machen.

Schon öfter ist erwähnt, dass die Volta'sche Säule, deren Pole mit den Scheiben in Verbindung stehen, in ihrer Mitte zur Erde abgeleitet ist, um diese Mitte stets unelektrisch zu erhalten. An jedem Pole dieser Säule, die z. B. aus 20 Elementen bestehen mag, herrscht daher eine elektrische Spannung, wie sie dem isolirten Pole einer Säule von 10 Elementen, deren anderer Pol zur Erde abgeleitet ist, entspricht. Anstatt nun, wie in den vorhergehenden Versuchen, ausser dieser Kette noch eine zweite zur Elektrisirung des Goldblättchens aufzustellen, kann man den einen oder andern Pol, der mit den Scheiben in Verbindung steht, auch zugleich mit dem Goldblättchen in Verbindung setzen.

Nehmen wir an, dass die erwähnten 20 Elemente, deren Pole mit den Scheiben in Verbindung sind, alle dieselbe Kraft besitzen, und verbinden den einen Pol derselben gleichzeitig mit dem Goldblättchen, so wird ein Ausschlag von bestimmter Grösse entstehen. Verringern wir jetzt die Anzahl der Elemente auf die Hälfte, also auf 10 (wobei aber ihre Mitte stets zur Erde abgeleitet bleibt), so wird die Elektricität sowohl in beiden Scheiben als auch in dem Goldblättchen genau auf die Hälfte verringert werden; die daraus resultirende Ablenkung wird folglich, weil sie der elektrischen Spannung in beiden auf einander wirkenden Körpern proportional ist, jetzt nur ein Viertel soviel betragen, als vorhin. Man sieht leicht, dass man allgemein den Satz aufstellen kann, dass bei dem eben bezeichneten Verfahren, wo Scheiben und Goldblättchen aus derselben Säule ihre Elektricität empfangen, die Ausschläge stets im Verhältnisse der Quadrate der elektrischen Spannungen in den Scheiben und dem Goldblättchen, oder alle Elemente als gleich kräftig wirkend

vorausgesetzt, im Verhältniss der Quadrate der Anzahl der Elemente stehen. Daraus folgt aber natürlich auch umgekehrt, dass man aus den auf diese Weise gemessenen Ausschlägen einen Schluss auf die Grösse der in den Scheiben vorhandenen elektrischen Spannung und somit auch auf die Empfindlichkeit des Instrumentes machen kann, indem unter sonst gleichen Bedingungen bei einem und demselben Elektrometer die in den Scheiben vorhandenen elektrischen Spannungen sich verhalten wie die Quadratwurzeln aus den genannten Ausschlägen. Mit diesen elektrischen Spannungen in den Scheiben ist aber unter sonst gleichen Umständen, wie schon weiter oben erwähnt, die Empfindlichkeit des Instrumentes proportional. Da oben für diesen Ausspruch kein experimenteller Beweis beigebracht worden ist, so verdient die nachfolgende Versuchsreihe um so mehr mitgetheilt zu werden, als durch die Nachweisung, dass bei dem eben angeführten Verfahren die Ausschläge sich verhalten wie die Quadrate der einander gleichen elektrischen Spannungen in den Scheiben und dem Goldblättchen, zugleich der Beweis geführt ist, dass diese Ausschläge nur in einfach proportionalem Verhältnisse sich ändern, wenn die Elektricität allein in den Scheiben (oder allein in dem Goldblättchen) sich ändert, und in dem Goldblättchen (oder respective in den Scheiben) constant bleibt.

Da jedoch auf die vollkommene Gleichheit der Elemente nicht zu rechnen ist, so können die beiden Hälften der Säule möglicherweise etwas verschieden sein. Da nun beide Hälften mit ihren isolirten Polen mit den Scheiben in Verbindung stehen, und also die von diesen ausgeübte Wirkung von beiden Polen abhängt, so muss man, um diese Ungleichheiten kennen zu lernen und zu eliminiren, beide Pole nach einander mit dem Goldblättchen verbinden und aus beiden Ausschlägen das Mittel nehmen. Aus früher erörterten Gründen wird man aber ausserdem mittelst eines passend eingeschalteten Commutators die Elektricität in den Scheiben umkehren, während sie in dem Goldblättchen unverändert bleibt; das Goldblättchen muss also vom Elektrometer aus jenseits des Commutators mit dem einen Pole der Säule in Verbindung gesetzt werden Man wird sonach, ebenso wie weiter oben, nicht aus 2, sondern aus 4 Ablesungen das Mittel nehmen.

Im Nachstehenden theile ich eine Versuchsreihe mit, bei welcher die Säule anfangs aus 20 Elementen bestand, die dann nach und nach bis auf zwei verringert wurden. Die Scheiben blieben unverändert von Anfang

bis zu Ende stehen. Die Elemente waren Daniell'sche, zusammengesetzt aus einem Kupfercylinder, der innerhalb eines porösen Porcellancylinders in Kupfervitriollösung stand; dieser Cylinder war wieder in ein Glas mit verdünnter Schwefelsäure gesetzt, in welchem den Cylinder umgebend das amalgamirte Zink sich befand. Die Elemente waren neu gemacht und aus demselben Stück Kupfer geschnitten; dessenungeachtet ist schon wegen der beim Bearbeiten mehr oder weniger ungleichartig gewordenen Oberfläche nicht anzunehmen, dass sie vollkommen gleiche elektrische Spannungen erregt haben werden, und dasselbe gilt von den amalgamirten Zinkringen. Dass indess der Unterschied nirgends bedeutend gewesen ist, zeigen die nachfolgenden Versuche. Ich hätte vielleicht eine vollkommene Gleichheit erzielen können, wenn ich die Elemente eine Zeit lang geschlossen gehalten hätte, um die Kupferflächen mit frischem Kupfer zu überziehen; ich wollte aber auch gleichzeitig einmal erfahren, wie weit man bei aus derselben Platte geschnittenen Elementen ohne weitere Vorbereitungen auf Gleichheit rechnen darf. Die folgende Versuchsreihe ist ausserdem noch mit andern kleinen Fehlern behaftet. Das Ausschliessen und Wiedereinfügen der Elemente geschah mittelst Schraubenklemmen, die mit den Händen aufgepresst wurden, wodurch die einen oder andern Elemente eine Zeit lang mittelst meines Körpers geschlossen waren, da die Mitte der Säule stets zur Erde abgeleitet blieb. Diess bringt nothwendig eine, wenn auch nur geringe Aenderung in den elektromotorischen Kräften hervor, die hier aber wahrscheinlich nicht wie bei Elementen aus Kupfer, Zink und Wasser dieselben schwächt, sondern etwas erhöht. Die Vermeidung der Berührung mit den Händen hätte erst neuer Vorrichtungen bedurft; da nun die Versuche auch in der nachfolgenden Gestalt vollständig und in aller Strenge das beweisen, was bewiesen werden soll, so hielt ich eine Wiederholung derselben unter den angegebenen Vorsichtsmaassregeln für überflüssig. Gleichzeitig können diese Versuche auch zum Nachweise dienen, wie gross ohne dieselben mit Einschluss der ursprünglichen Ungleichheiten die Abweichungen werden können. Eine neu zusammengestellte Säule aus Daniell'schen Elementen, deren Porcellancylinder vorher im Wasser gelegen haben, ändert sich im Laufe der Versuche anfangs so, dass die Spannung an ihren Polen etwas zunimmt.

Die erste mit $E$ überschriebene Spalte der folgenden Tabelle enthält die Anzahl der angewandten Elemente; die zweite mit $V$ über-

schriebene die Mittel aus den angezeigten vier Beobachtungen; in der dritten Spalte finden sich dieselben Mittel, nachdem die beiden grössten Ablenkungen wegen zu grosser Annäherung des Goldblättchens an die Scheiben eine Correction erfahren haben; die vierte gibt unter *W* die unter der Voraussetzung, dass die Ausschläge im quadratischen Verhältnisse der elektrischen Spannungen in den Scheiben und dem Goldblättchen stehen, berechneten Werthe dieser Ablenkungen, und die letzte Spalte die Differenzen zwischen der Beobachtung und der Rechnung.

| *E.* | *V.* | *V'.* | *W.* | *D.* | *E.* | *V.* | *V'.* | *W.* | *D.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 6,17 | 6,06 | 5,97 | +0,09 | 10 | 1,42 | 1,42 | 1,49 | −0,07 |
| 18 | 4,89 | 4,84 | 4,84 | 0,00 | 8 | 0,89 | 0,89 | 0,95 | −0,06 |
| 16 | 3,75 | 3,75 | 3,82 | −0,07 | 6 | 0,50 | 0,50 | 0,54 | −0,04 |
| 14 | 2,83 | 2,83 | 2,92 | −0,09 | 4 | 0,21 | 0,21 | 0,24 | −0.03 |
| 12 | 2,08 | 2,08 | 2,15 | −0,07 | 2 | 0,05 | 0,05 | 0,06 | −0,01 |

Die Differenzen werden in der vorstehenden Versuchsreihe durch den ersten Versuch beinahe bis auf $\frac{1}{10}$ Skalentheil erhöht; wollte man diesen ersten Versuch ausschliessen, so liessen sich die Werthe der übrigen, wie man sogleich übersieht, so berechnen, dass die Abweichungen von den Beobachtungen bedeutend kleiner werden. Ein Theil der Abweichung des ersten Versuchs von den übrigen kann allerdings in einer nicht ganz genauen Correction des beobachteten Ausschlags, die erst aus einem andern Versuche am folgenden Tage hergeleitet war, seinen Grund haben; den grössten Theil derselben glaube ich aber doch einer Ungleichheit in den Elementen zuschreiben zu müssen. Eine solche Ungleichheit muss im vorliegenden Falle um so auffälliger hervortreten, weil die Aenderungen der Ausschläge im quadratischen Verhältnisse erfolgen. Jedenfalls genügen aber die Versuche vollständig, um den Satz, um den es sich handelt, dass nämlich die Ausschläge den Quadraten der elektrischen Spannungen in dem Goldblättchen und den Scheiben proportional sind, zu beweisen.

Ist nun aber dieser Satz richtig, so sind wir im Stande, die bei der Benutzung dieses Elektrometers zur Messung der atmosphärischen Elektricität auch in längeren Zeiträumen gemachten Beobachtungen mit einander zu vergleichen. Es ist vor jeder Beobachtung der atmosphärischen Elektricität nur nöthig, die Pole der Säule wie zuvor angegeben, mit den Scheiben und dem Goldblättchen zu verbinden, und aus den

gemachten vier Ablesungen den Mittelwerth zu nehmen. Die Quadratwurzel aus dem jedesmaligen Mittelwerthe bildet dann den zur Reduction der Messungen der atmosphärischen Elektricität auf eine bestimmte Empfindlichkeit dienenden Factor; denn diese Quadratwurzel ist proportional mit der Aenderung der elektrischen Spannung in den Scheiben, von welcher bei den erwähnten Messungen unter sonst gleichen Einrichtungen des Elektrometers die Empfindlichkeit des Instrumentes abhängt.

## IV. Ueber die Aenderung der elektrischen Spannung in den Polen einer Säule durch Aenderung der Temperatur.

Wenn ich auch in dem Vorstehenden eine Methode angegeben habe, welche es möglich macht, die Aenderungen in der elektrischen Intensität der Pole der angewandten Säule mit aller nur gewünschten Genauigkeit zu bestimmen, so wird man doch nichtsdestoweniger zugeben, dass es wünschenswerth ist, bei einer längern Reihe von Messungen die desshalb erforderlichen Correctionen möglichst zu verringern. In dem Bestreben, diese Correctionen so klein als nur möglich zu machen, liegt auch einer der Gründe, wesshalb ich die trockne Zamboni'sche Säule durch eine gewöhnliche Volta'sche Säule ersetzt habe. Da es jedoch Umstände geben kann, wo diese letztere aus Bequemlichkeitsrücksichten oder selbst dringenden Umständen (z. B. in sehr grosser Kälte) durch eine trockne Säule ersetzt werden soll, so werden die folgenden Angaben über das Verhalten beider Säulen bei Temperaturänderungen nicht ohne Interesse sein.

Schon oben S. 399 habe ich erwähnt, dass die Anwendung nur einer isolirten trocknen Säule, deren beide Pole mit den das Goldblatt umgebenden Scheiben eines Elektrometers in Verbindung gebracht sind, auf eine unrichtige Auffassung der Verhältnisse sich stütze; dass es vielmehr, um die Spannung der Elektricität in den Polen möglichst constant zu erhalten, zweckentsprechender sei, die Mitte der Säule mit der Erde in leitende Verbindung zu setzen, und nur ihre Pole sorgfältig zu isoliren. Zwischen Platten, welche mit den Polen einer solchen Säule von nicht zu kleinem Querschnitte verbunden sind, hängt das Goldblättchen sehr ruhig, und man kann einem Elektrometer dieser Art, wie schon oben S. 399 erwähnt, einen hohen Grad von Empfindlichkeit

geben, wenn man die Platten dem Goldblättchen mittelst Mikrometerschrauben in angemessener Weise nähert. Ich habe auch schon erwähnt, dass man die Stellung des Goldblättchens sogar mit dem Mikroskope beobachten kann, grade wie es oben mit der nassen Säule ausgeführt wurde.

Wenn eine solche trockne Säule Temperaturveränderungen ausgesetzt ist, wie solches nothwendig im Freien der Fall ist, so erleidet die elektrische Intensität ihrer Pole starke Veränderungen. Um eine ungefähre Einsicht in diese Verhältnisse hier zu geben, will ich kurz die Resultate einer Versuchsreihe mittheilen.

In dem Elektrometer *B* wurde die nasse Säule durch zwei trockne Säulen, jede von ungefähr 70 scheibenförmigen Elementen, deren Durchmesser fast einen Zoll betrug, ersetzt. Die untern ungleichnamigen Enden beider Säulen standen mit der Erde in leitender Verbindung, während die beiden andern nach oben gerichteten Enden durch Schellack gut isolirt waren. In diesen Schellack waren Schraubenmuttern eingekittet, durch welche Schrauben zum festen Zusammenpressen der Scheiben hindurchgingen. Als Material zu diesen Scheiben diente das gewöhnliche unächte Gold- und Silberpapier, dessen Papierseiten beim Aufbau der Säulen bloss aufeinander gelegt wurden. Die Elektricität der isolirten Pole wurde auf dem früher angegebenen Wege durch den Commutator zu den Messingplatten, zwischen denen das Goldblättchen hing, geleitet. Darauf wurde mittelst der Federn *TUV* (Fig. 1) erst die Elektricität des einen Poles, dann die des andern zu dem Goldblättchen geführt, und jedes Mal durch Umlegen des Commutators die Stärke der Intensität der Pole bestimmt. Die in dem Folgenden angegebenen Werthe sind, wie früher, die Mittelwerthe aus den vier Ausschlägen bei der verschiedenen Elektrisirung des Goldblättchens und den verschiedenen Lagen des Commutators. Diese Zahlenangaben bedürften, um als Maass der elektrischen Intensitäten zu dienen, eigentlich noch einer Correction wegen Mangels an Proportionalität, wie diess früher erwähnt; indess ist in dem vorliegenden Falle auch aus den unmittelbar erhaltenen Ausschlägen das, was erwiesen werden soll, hinlänglich ersichtlich.

Diese Versuche wurden angestellt, bevor die nassen Säulen die in der Zeichnung Fig. 1 angegebene Form erhielten. Anfangs befanden sich nämlich diese Säulen in einem kleinen Holzkästchen, das in den hohlen ebenfalls von Holzwänden umgebenen Raume unterhalb des

Elektrometers eingeschoben wurde. In dieses fast völlig verschlossene Holzkästchen waren auch die trockenen Säulen gestellt. Das ganze Instrument wurde dann noch mit seinem gewöhnlichen Blechgehäuse überdeckt. Eine ableitende Berührung der Pole beim Niederdrücken der Federn *TUV* wurde sorgfältig vermieden, um nicht Störungen durch die Schwächung des einen oder andern Poles hervorzurufen.

In der Stube schwankten an einem Tage (5. Juni) die Quadrate der Intensitäten zwischen 9,8 und 10,4 und der Uebergang von dem einen Werthe zu dem andern geschah sehr allmählig. Am Nachmittage des darauffolgenden Tages (6. Juni) wurde das Instrument mit seinem Blechgehäuse, wie zuvor angegeben, bedeckt im Garten in den Sonnenschein gestellt, und zu den in der ersten verticalen Spalte nachstehender Tabelle beobachteten Zeitpunkten die in der zweiten aufgeführten Ablenkungen beobachtet, welche dem Quadrate der Intensitäten proportional sind. Die dritte Spalte gibt den Zustand der Bestrahlung in der Zwischenzeit von einer Messung zur folgenden. Die Langsamkeit des Durchdringens der Sonnenwärme bis zu den Scheiben der trockenen Säulen lässt sich nach der angegebenen Umhüllung derselben einigermaassen veranschlagen. Die erste Messung wurde möglichst bald nach dem Aufstellen gemacht.

| Zeit der Beobachtung. | Quadrate der Intensitäten. | Zustand der Bestrahlung in der Zwischenzeit. |
|---|---|---|
| $2^h$ 44′ | 10,67 | Blechgehäuse völlig von der Sonne bestrahlt, |
| 2 49 | 11,32 | ebenso, |
| 2 58 | 12,00 | ebenso, |
| 3 8 | 12,65 | ebenso, |
| 3 18 | 12,97 | ebenso, |
| 3 28 | 13,35 | kurze Zeit Schatten durch Wolken, dann wieder voller Sonnenschein, |
| 3 38 | 13,67 | voller Sonnenschein, |
| 3 48 | 13,75 | bisweilen etwas beschattet durch Wolken, |
| 3 58 | 13,87 | Sonnenschein, |
| 4 8 | 13,85 | viel Schatten durch Wolken, |
| 4 18 | 13,85 | Sonnenschein, |
| 4 28 | 13,95 | ebenso, |
| 4 38 | 13,95 | ebenso, |
| 4 48 | 14,42 | ebenso, |
| 4 58 | 14,40 | ebenso, |
| 5 8 | 14,07 | Gehäuse theilweis durch Bäume beschattet, |

| Zeit der Beobachtung. | Quadrate der Intensitäten. | Zustand der Bestrahlung in der Zwischenzeit. |
|---|---|---|
| 5h 20 | 13,52 | Gehäuse völlig im Schatten der Bäume, |
| 5 28 | 13,50 | ebenso, |
| 5 38 | 13,07 | ebenso, |
| 5 48 | 12,90 | ebenso, |
| 5 58 | 12,67 | ebenso, |
| 6 8 | 12,52 | ebenso, |
| 6 18 | 12,05 | ebenso, |
| 6 28 | 11.60 | ebenso. |

Am folgenden Morgen (7. Juni) betrug das Quadrat dieser Intensität bei der Aufstellung des Instrumentes in meiner Wohnstube bei einer Temperatur von 21° *R*. 11,2.

Während eines zweistündigen Aussetzens an die Sonne stieg also das Quadrat der Intensität in den Polen ungefähr in dem Verhältniss von 3 : 4, und nahm dann während der Beschattung und des Sinkens der Lufttemperatur mit etwas grösserer Schnelligkeit wieder ab.

Bei einer neuen oder wenigstens neugefüllten und gereinigten Volta'schen Säule, wie sie in der Zeichnung Fig. 1 dargestellt ist, sind die Aenderungen, welche infolge einer Temperaturerhöhung eintreten, äusserst gering. Als das in Fig. 1 abgebildete Elektrometer mit seinem Blechgehäuse bedeckt in den vollen Sonnenschein gestellt wurde, erhielt ich zu den in der ersten Spalte stehenden Zeitpunkten die in der zweiten Spalte daneben stehenden Quadrate der Intensitäten. Die erste Messung wurde wieder sobald als möglich nach dem Aussetzen an die Sonne gemacht.

| Zeit der Beobachtung. | Quadrate der Intensitäten. |
|---|---|
| 2h 38' | 2,70 |
| 2 43 | 2,67 |
| 2 48 | 2,72 |
| 2 53 | 2,75 |
| 3 3 | 2,76 |
| 3 13 | 2,78 |
| 3 23 | 2,78 |
| 3 33 | 2,78 |
| 3 38 | 2,81 |

Im Verlauf einer Stunde stieg das Quadrat der elektrischen Spannung an den Polen also nur von 2,70 bis 2,81. Bei einer Säule, welche längere Zeit seit ihrer Füllung gestanden hat, werden ohne Zweifel diese Aenderungen ein wenig grösser ausfallen, wie aus den von mir über die Aenderung der elektrischen Spannung an den Polen einer geöffneten Volta'schen Säule angestellten Versuchen hervorgeht. Um einen Anhalt für die Beurtheilung dieser Verhältnisse zu gewinnen, will ich hier einige Resultate aus den eben angedeuteten Versuchsreihen anführen, indem ich eine ausgedehntere Untersuchung über den Einfluss der Erwärmung auf die elektrische Spannung der Säule einer spätern Zeit vorbehalte.

In einem Kasten aus Eisenblech, der in einen zweiten Kasten aus Eisenblech (von diesem durch eine ½ Zoll dicke Luftschicht getrennt) eingesetzt war, befanden sich 12 Elemente aus Kupfer, Zink und Wasser. Das Zink des ersten und das Kupfer des letzten Elementes und zwei der mittleren Gläser waren durch Metallstäbe gestützt, welche ausserhalb des Kastens von fusshohen Schellackstangen getragen wurden und durch entsprechende Oeffnungen in beiden Kästen, ohne die Wände derselben zu berühren, hindurchgingen. Auf diese Weise war jede Veränderung in der Isolirung der Pole vermieden. Die starken runden Kupfer- und Zinkdrähte, aus welchen die Elemente bestanden, waren durch fest in den obern Theil der Gläser eingepasste Korke geschoben, und durch ihre Verbindung mittelst Schrauben wurden die nicht gestützten Elemente so gehalten, dass nirgends eine Berührung mit den Wänden des Kastens stattfand, sondern sämmtliche Gläser, mit Ausschluss zweier, in der Luft schwebten. In den Deckeln beider Kasten waren zwei einander entsprechende Oeffnungen angebracht, durch welche zwei Thermometer in den innern Raum geführt werden konnten. Die Kugeln beider Thermometer waren in eben solchen Gläsern befestigt, wie zu den Elementen verwandt waren; auch waren diese Gläser genau so weit mit Wasser gefüllt als diejenigen, in welche die Kupfer- und Zinkstücke eintauchten. Ich durfte also wohl annehmen, dass die Temperatur des Wassers in den Gläsern der einzelnen Elemente in genäherter Weise durch die beiden Thermometer angezeigt würde: wenn z. B. bei der Abkühlung nach stärkerem Erhitzen die Temperatur bis 50° gesunken war, so betrug der Unterschied in dem Stande beider Thermometer keinen halben Grad mehr. Die folgenden Temperaturen sind das Mittel aus den Angaben der beiden Thermometer.

Die erste verticale Spalte der folgenden Tabelle enthält die Zeit der Beobachtung; die zweite die Temperaturen und die dritte die Ausschläge am Elektrometer *A*, die den elektrischen Spannungen an den Polen der Säule proportional sind, weil die Scheiben des Elektrometers ihre Elektricität aus einer zweiten unverändert bleibenden Säule erhielten.

Bei dem folgenden Versuche waren die blanken Zink- und Kupferdrähte erst wenige Stunden zuvor in das Wasser eingesetzt worden.

| | Zeit der Beobachtung. | Temperatur. | Intensität. |
|---|---|---|---|
| Lampe angezündet um $5^h\ 2'$. | $5^h\ 0'$ | 15° | 3,82 |
| Nach dem Auslöschen während | 5 10 | 29 | 3,68 |
| die Temperatur noch steigt. | 5 15 | 38 | 3,65 |
| Beim Sinken der Temperatur. | 5 32 | 44 | 3,78 |
| | 5 45 | 42 | 3,77 |
| | 6 30 | 29 | 3,71 |

Die drei letzten während der Abkühlung angestellten Versuche vorstehender Tabelle weisen auf eine nur sehr geringe Steigerung der Spannung mit Zunahme der Temperatur hin. Die geringern Werthe 3,68 und 3,65 haben wahrscheinlich darin ihren Grund, dass der an den Seiten des eisernen Kastens aufsteigende Dampfstrom der unter ihm brennenden Lampe eine Art unvollkommene Schliessung der Kette bewirkt hat, wodurch die elektrische Spannung auch noch einige Zeit nach dem Auslöschen der Lampe geringer erscheint; hierauf weist wenigstens der Vergleich mit dem ersten Werthe 3,82 hin. Auch in später wiederholten Versuchen trat gleich nach dem Anzünden der Lampe diese Schwächung ein; es bedarf daher der Apparat, um zu genauen Messungen tauglich zu sein, noch der Umgestaltung, dass die Flamme unterhalb des eisernen Kastens ganz eingeschlossen und der Dampfstrom durch eiserne Zugröhren aufwärts geleitet wird.

Am darauf folgenden Morgen wurde die Erhitzung wiederholt und bis 73° getrieben. Ich theile nicht alle Beobachtungen mit, sondern hebe der Kürze wegen nur einige heraus.

| | Zeit der Beobachtung. | Temperatur. | Intensität. |
|---|---|---|---|
| Lampe angezündet $9^h$ 54'. | $9^h$ 50' Morgens. | 15,°1 | 3,83 |
| Lampe ausgelöscht. | 10 23 » | 66 | 5,93 |
| | 10 34 » | 73 | 6,23 |
| | 10 48 » | 67 | 5,77 |
| | 10 56 » | 63 | 5,40 |
| | 11 5 » | 57 | 5,12 |
| | 11 20 » | 48,4 | 4,85 |
| | 11 35 » | 41,2 | 4,62 |
| | 11 55 » | 33,8 | 4,42 |
| | 12 10 » | 30,2 | 4,32 |
| | 12 40 » | 24,9 | 4,11 |
| | 7 0 Abends. | 15,7 | 3,45 |

Diese Versuchsreihe, ebenso wie viele andere in den nachfolgenden Tagen angestellte, zeigt, dass eine Säule aus Kupfer und Zink, deren Metalle schon einige Zeit mit dem Wasser in Berührung gewesen sind und ihre blanke Oberfläche eingebüsst haben, mit der Erhöhung der Temperatur einen Zuwachs in der Elektricität ihrer Pole erleidet. Es kann dadurch sogar die Intensität an den Polen grösser werden als in der neu zubereiteten Kette.

Ich will noch einige Messungen aus einer Versuchsreihe hier anführen, die 4 Tage später gemacht wurde. Die Säule war in dieser Zeit an zweien Tagen wieder erhitzt, ohne sonst angerührt worden zu sein.

| | Zeit der Beobachtung. | Temperatur. | Intensität. |
|---|---|---|---|
| | $9^h$ 22' | 14,3 | 3,07 |
| Längere Zeit nach dem Auslöschen der Lampe. | 10 10 | 62 | 4,22 |
| | 10 17 | 59 | 3,97 |
| | 10 35 | 49 | 3,70 |
| | 11 32 | 28,3 | 3,62 |
| | 12 20 | 20,5 | 3,60 |
| | 3 45 | 15,0 | 3,47 |

Mit dem Elektrometer *B* selbst, so wie es in der Fig. 1 abgebildet ist, habe ich längere Zeit nach der Zusammenstellung der Säule im Sonnenschein keine speciellen Versuche über die Zu- und Abnahme der

elektrischen Spannung an den Polen ihrer Säule mit der gleichnamigen Aenderung der Temperatur angestellt. Wie aus den vorhergehenden Versuchen sich ergibt, sind diese Zu- und Abnahmen für die nicht grossen Aenderungen der Temperatur während des Beobachtens im Freien gewiss nur unbeträchtlich. Auch habe ich bei den zahlreichen Messungen, die zu verschiedenen andern Zwecken dienten, niemals eine beträchtliche Abweichung wahrgenommen. Zum Belege dafür mögen z. B. die folgenden Zahlen dienen.

Die Säule des Elektrometers *B* war am 5. August gereinigt und zusammengesetzt. Es wurden dann die Quadrate der Intensitäten der Pole gefunden

| | | | |
|---|---|---|---|
| in meiner Stube bei Temperaturen zwischen 19,1 bis 19,8°. | am 9. August | 8¼ Uhr Morgens | 4,00 |
| | | 2 „ Nachmittags | 4,20 |
| | | 3¼ „ . . . . . . . . | 4,15 |
| | am 10. August | 8 Uhr Morgens | 4,30 |
| | | 1½ „ Nachmittags | 4,20 |
| | | 5¼ „ Abends | 4,25 |
| | am 11. August | 8½ Uhr Morgens | 4,40 |
| | | 2½ „ Mittags | 4,45 |

Am 14. August wurde das Instrument um 9¼ Uhr Morgens bei heiterm Himmel auf dem Eisenbahndamme der Verbindungsbahn zwischen dem Bahnhofe der Magdeburg-Leipziger und der Sächsisch-Bayerischen Eisenbahn aufgestellt, und mehrere Reihen Messungen ausgeführt, die 1½ Stunden Zeit erforderten. Zu wiederholten Malen wurde, um die nöthigen Correctionen machen zu können, das Quadrat der elektrischen Spannungen an den Polen der Säule gemessen und ich erhielt:

| | |
|---|---|
| Bald nach dem Aufstellen des Instruments . . . . . . . . | 4,22 |
| Nach Vollendung einer längern Reihe von Messungen . . . . | 4,40 |
| Nach einer zweiten Reihe . . . . . . . . . . . . . . . | 4,40 |
| Nach Beendigung einer sehr langen Reihe von Messungen (1½ Stunden nach dem Aufstellen) . . . . . . . . . . | 4,50 |

Die Temperatur der Luft ist in meinem Tagebuche nicht angeführt, jedenfalls war sie aber in der Sonne beträchtlich höher als in der Stube, wie aus dem Tage der Beobachtung und dem Zustande des Himmels sich mit Sicherheit vermuthen lässt. Die Quadrate der elektrischen Spannung haben sich nur von 4,2 bis auf 4,5 erhöht, also um sehr vieles weniger als bei der trockenen Säule, wo sie in 1½ Stunden (je-

doch bei wahrscheinlich etwas stärkerer Erwärmung) von 10,7 bis 13,8, also in Verhältniss von 4,2 : 5,4 stiegen.

### V. Einheit für Elektricitätsmenge und die Dicke der elektrischen Schicht.

Das im Vorhergehenden angegebene Verfahren genügt vollständig, um die Veränderung in den elektrischen Spannungen der Pole einer Säule, welche mit den Scheiben eines Elektrometers in Verbindung stehen, auszuscheiden, so lange die Einrichtung des Instrumentes sonst nicht weiter abgeändert wird; es würde auch hinreichen, um Messungen mit verschiedenen Instrumenten, deren Ausschläge man zuvor mit einander verglichen hat, zu reduciren und mit einander vergleichbar zu machen; dagegen verliert es im letztern Falle seine Anwendbarkeit, wenn man nicht im Stande ist, eine unmittelbare Vergleichung der Instrumente vorzunehmen, und selbst in dem ersten Falle, bei einem und demselben Elektrometer, wenn das Goldblättchen durch ein neues schwereres oder leichteres, oder die Scheiben durch grössere oder kleinere ersetzt worden sind. Soll daher die Beobachtung der atmosphärischen Elektricität zu einer Kenntniss derselben hinsichtlich ihrer Verbreitung über die Oberfläche der Erde und ihrer constanten oder veränderlichen Wirkung im Laufe der Zeit führen, so ist es durchaus nothwendig, die elektrischen Messungen auf ein absolutes Maass zurückzuführen, d. h. auf ein Maass, das nur von den bisher in der Mechanik schon gebräuchlichen Maasseinheiten des Raumes, der Zeit und der Masse abhängt, das also überall, wo diese letztern Maasse in genügender Schärfe vorhanden sind, aufgefunden werden kann, und die Vergleichung elektrischer Messungen mit einander gestattet, ohne dass die elektrischen Messwerkzeuge, mittelst deren jene Werthe gefunden wurden, jemals unmittelbar mit einander verglichen worden sind.

Eine Zurückführung der elektrischen Messungen auf ein sogenanntes absolutes Maass ist aber durch das bisher beschriebene und angewandte Elektrometer nicht möglich; man bedarf dazu einer Drehwage, d. h. eines an seinen Enden mit Kugeln versehenen und an einem Drahte aufgehangenen Wagebalkens, der elektrisch gemacht ist und durch in seiner Nähe befindliche elektrische Kugeln aus seiner Ruhelage abgelenkt wird. Aus dieser Ablenkung lässt sich eine absolute Messung der

dem Balken mitgetheilten Elektricität erhalten, wenn die Torsion des Drahtes zuvor durch Schwingungsversuche ausgemittelt worden ist.

Die Einwirkung, welche zwei elektrische Kugeln auf einander ausüben, kann betrachtet werden als eine bewegende Kraft, also als das Product aus einer beschleunigenden Kraft in eine gegebene Masse. Daher bedarf es zuerst der Festsetzung einer Einheit der beschleunigenden Kraft und der Masse.

Die Einheiten der Länge, Masse und Zeit seien der Reihe nach das Millimeter, das Milligramm und die Sekunde.

Die Einheit der beschleunigenden Kraft sei diejenige, welche in der Zeiteinheit in der Geschwindigkeit des in der Richtung der Kraft sich bewegenden Körpers eine Aenderung um die Längeneinheit erzeugt.

Die Einheit einer positiven oder negativen Elektricitätsmenge sei diejenige, welche in einem Punkte concentrirt gedacht in ihrer Abstossung (oder respective Anziehung) auf eine gleiche positive oder negative Masse, (diese ebenfalls in einem Puncte, der von dem ersten um die Einheit der Entfernung absteht, concentrirt gedacht,) gleichkommt der Wirkung der Einheit der beschleunigenden Kraft auf die Einheit der Masse.

Eine Aenderung in der Einheit des Längenmaasses von $\alpha$ auf $\alpha'$ ändert die Einheit der beschleunigenden Kraft ebenfalls im Verhältnisse von $\alpha : \alpha'$; eine Verdoppelung der Einheit des Längenmaasses verdoppelt also auch die Einheit der beschleunigenden Kraft.

Eine Aenderung der Einheit des Längenmaasses wirkt auf eine doppelte Weise auf die Einheit der Elektricitätsmenge, nämlich 1) durch eine Aenderung der Entfernung der beiden Puncte, in welchen die elektrischen Massen concentrirt gedacht werden, und 2) durch eine Aenderung der Einheit der beschleunigenden Kraft. Eine Aenderung der Einheit des Längenmaasses von $\alpha$ auf $\alpha'$ ändert die Entfernung beider Puncte gleichfalls von $\alpha$ auf $\alpha'$. Um nun in der Entfernung $\alpha'$ dieselbe Abstossung oder Anziehung zu erhalten, wie in der Entfernung $\alpha$, bedarf es einer Aenderung der elektrischen Menge in jedem der beiden Puncte im Verhältniss von $\alpha : \alpha'$, indem die dadurch im Verhältnisse von $\alpha^2 : \alpha'^2$ steigende Abstossung der Anziehung durch die vergrösserte Entfernung wieder im Verhältnisse von $\alpha'^2 : \alpha^2$ verringert wird, also dieselbe bleibt als zuvor. Da aber auch die Einheit der beschleunigenden Kraft im Verhältniss von $\alpha : \alpha'$ sich geändert hat, so wird die Abstossung,

welche die in jedem Punkte im Verhältnisse von $\alpha:\alpha'$ vermehrte Elektricitätsmenge bei ihrer Wirkung auf die Masse 1 erzeugt, nicht genügen, um derselben in der Zeiteinheit eine Geschwindigkeit gleich der neuen Längeneinheit zu ertheilen; es muss diese Abstossung, da eben die Längeneinheit im Verhältnisse von $\alpha:\alpha'$ vermehrt ist, ebenfalls in diesem Verhältnisse vermehrt werden. Diess geschieht aber dadurch, dass die anfangs in jeder Kugel vorhandene Elektricität noch im Verhältnisse von $\sqrt{\alpha}:\sqrt{\alpha'}$ in jeder der beiden Kugeln vermehrt wird. Die Menge der Elektricität in jeder Kugel, welche jetzt unsere Einheit darstellt, hat sich daher gegen die Menge, welche früher als ihre Einheit galt, vermehrt im Verhältnisse von $\alpha^{\frac{3}{2}}:\alpha'^{\frac{3}{2}}$. Wird also z. B. die Längeneinheit verdoppelt, so steigt die Einheit der Elektricitätsmenge im Verhältniss von $1:2\sqrt{2}$.

Zuletzt bedarf es behufs der Angabe der Vertheilung einer gegebenen Menge Elektricität noch einer Einheit für die Dicke der elektrischen Schicht auf der Oberfläche der Körper. Es sei nun die Einheit der Dicke der elektrischen Schicht diejenige Dicke, welche entsteht, wenn die Einheit der Elektricitätsmenge über die Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser gleich der Längeneinheit ist, gleichmässig, d. h. überall in gleicher Dicke ausgebreitet wird. Eine Kugel vom Halbmesser 1, auf welcher die Elektricität in der Dicke 1 gleichförmig verbreitet ist, enthält also die Elektricitätsmenge 1; eine Kugel vom Halbmesser $r$, auf welcher eine elektrische Schicht von der überall gleichen Dicke $y$ ausgebreitet ist, enthält dann die Elektricitätsmenge $yr^2$.

Wenn die Längeneinheit im Verhältnisse von $\alpha:\alpha'$ geändert wird, so hat diess eine Aenderung der Einheit der Dicke der elektrischen Schicht im Verhältnisse von $\sqrt{\alpha'}:\sqrt{\alpha}$ zur Folge. Denn mit der Aenderung der Längeneinheit von $\alpha$ auf $\alpha'$ ändert sich die Oberfläche der Kugel, deren Halbmesser gleich der Längeneinheit sein soll, im Verhältnisse von $\alpha^2:\alpha'^2$. Soll diese neue Kugel nur ebensoviel Elektricität enthalten als die erste, so wird die Dicke der elektrischen Schicht im Verhältnisse von $\alpha'^2:\alpha^2$ verringert werden müssen. Da aber die angegebene Veränderung der Längeneinheit, wie vorhin gezeigt, eine Aenderung der Einheit der Elektricitätsmenge im Verhältnisse von $\alpha^{\frac{3}{2}}:\alpha'^{\frac{3}{2}}$ zur Folge hat, so muss jetzt über die Oberfläche der Kugel von dem der neuern Längeneinheit gleichen Halbmesser eine im Verhältnisse von $\alpha^{\frac{3}{2}}:\alpha'^{\frac{3}{2}}$ vermehrte Elektricitätsmenge ausgebreitet werden, die nun auf der im Verhältnisse von $\alpha^2:\alpha'^2$ vergrösserten Oberfläche der neuen Kugel eine Dicke erhält,

welche sich zu der frühern verhält wie $\frac{\alpha^{\frac{5}{2}}}{\alpha^3} : \frac{\alpha'^{\frac{5}{2}}}{\alpha'^3} = \sqrt{\alpha'} : \sqrt{\alpha}$. Eine Verdoppelung der Längeneinheit z. B. ändert hiernach die Einheit für die Dicke der elektrischen Schicht im Verhältniss von $\sqrt{2} : 1$ oder $1 : \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Es versteht sich wohl von selbst, dass bei dieser Bestimmung der Dicke der Schichten das elektrische Fluidum als unzusammendrückbar und überall von gleicher Dichtigkeit angenommen worden ist. Wollte man die elektrische Flüssigkeit als zusammendrückbar ansehen, und ihr auf allen Körpern dieselbe Dicke, aber verschiedene Dichtigkeiten zuschreiben, so würden diese Dichtigkeiten grade im umgekehrten Verhältnisse der frühern Dicken stehen.

Die Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser $1^{mm}$ beträgt, ist $= 4\pi^{\square mm}$. Ist die Dicke der auf ihr gleichmässig verbreiteten Elektricität $= 1$, so ist auch die Menge derselben $= 1$, und jede Flächeneinheit, jedes Quadratmillimeter, enthält dann die Elektricitätsmenge $\frac{1}{4\pi}$. Eine Kugel vom Halbmesser $r$ und der constanten Dicke der elektrischen Schicht $y$ trägt die Elektricitätsmenge $E = yr^2$; da die Oberfläche dieser Kugel $= 4r^2\pi$ ist, so enthält jede Flächeneinheit die Elektricitätsmenge $\frac{E}{4r^2\pi} = \frac{y}{4\pi}$. Auf einem Elemente der Oberfläche $d\omega$ findet sich also, wenn die Dicke der auf ihm vorhandenen Schicht $y$ beträgt, die Elektricitätsmenge $\frac{y}{4\pi}d\omega$ ausgebreitet.

Poisson setzt in seinen beiden bekannten Abhandlungen über die Verbreitung der Elektricität auf der Oberfläche von Leitern (*Mémoires de la classe des sciences math. et phys. de l'Institut de France, Année* 1811 S. 1 bis 92 des ersten und S. 163 bis 274 des zweiten Theiles) die Menge der auf einem Elemente $d\omega$ der Oberfläche bei der Dicke $y$ befindlichen Elektricität $= yd\omega$ und entsprechend die Menge der auf einer Kugel bei der constanten Dicke $y$ vorhandenen $= 4\pi yr^2$, woraus sich ergibt, dass nach dieser Annahme die Menge der auf der Flächeneinheit bei einer Dicke $y$ vorhandenen Elektricität ebenfalls gleich $y$ ist. Hiernach ist also die Menge der auf einer Kugel vom Halbmesser $= 1$ in der constanten Dicke $= 1$ verbreiteten Elektricität gleich $4\pi$ der von Poisson angenommenen Einheiten.

Poisson lässt übrigens die Einheit für die Elektricitätsmenge ganz unbestimmt, da er nur relative und nicht absolute Werthe für die Dicke der elektrischen Schicht bestimmen wollte.

## VI. Vertheilung der Elektricität auf Kugeln und unendlichen Ebenen.

Die Berechnungen der Elektricitätsmengen aus den beobachteten Anziehungen und Abstossungen der Theile in der S. 440 angedeuteten Drehwage erfordern aber die Kenntniss der Vertheilung der Elektricität auf Kugeln, welche von einem Stabe getragen werden, und denen andere Kugeln und Stäbe gegenüber stehen. Ich werde diese Kenntniss theils durch Rechnung, theils durch Beobachtung zu gewinnen suchen.

Für den Fall, dass zwei leitende Kugeln sich in gegenseitiger Nähe befinden, hat Poisson in seinen schon oben erwähnten Abhandlungen die Vertheilung berechnet. Dieselben Fälle hat dann Plana in seiner sehr weitläufigen Abhandlung in den *Memorie della academia di Torino* Ser. II. 7. S. 71—401 sich an die Untersuchungen Poisson's anschliessend, wieder bearbeitet. So vollkommen auch in mathematischer Beziehung die Abhandlung Poisson's dasteht, so sehr man auch seinen Scharfsinn bewundern muss, so wird doch die folgende Mittheilung, obwohl ein Theil derselben sich nur auf den schon von Poisson behandelten Gegenstand bezieht, nicht ohne Interesse sein; die Eigenthümlichkeit des eingeschlagenen Weges, die Leichtigkeit, mit welcher er zum Ziele führt, und die Berechnung numerischer Resultate gestattet, sowie die vielleicht mögliche Anwendbarkeit desselben auf anders gestaltete Körper werden seine Mittheilung rechtfertigen.

Nehmen wir der Einfachheit wegen zuerst an, dass von den beiden in Betracht gezogenen Kugeln nur die eine Kugel elektrisch und aus einer nicht leitenden Substanz gebildet, die andre isolirt aufgestellte Kugel dagegen unelektrisch und aus einer leitenden Substanz gebildet sei: so wird, wenn die zweite Kugel sich der erstern nähert, in der zweiten Kugel durch die directe Einwirkung der ersten Kugel eine elektrische Vertheilung erregt werden. Aber jeder Punkt dieser elektrischen Schicht auf der Oberfläche der zweiten Kugel wirkt sogleich wieder auf alle übrigen Punkte der Oberfläche derselben Kugel, und erregt daher auf ihr eine neue Vertheilung, die sich zu der ersten hinzufügt. Diese zweite Vertheilung erregt abermals auf derselben Oberfläche eine dritte Vertheilung, die sich ebenfalls zu den beiden ersten hinzufügt, u. s. w. So geht es fort, bis zuletzt die Vertheilungen unmerklich werden. Man erhält also die Vertheilung, welche infolge der Einwirkung der ersten

Kugel auf der Oberfläche der zweiten entsteht, wenn man die Summe aller der zuvor bezeichneten Vertheilungen bildet.

Bei dieser Art der Betrachtung haben wir den Vortheil, dass wir nur die Vertheilung der Elektricität auf der zweiten Kugel zu beachten brauchen, indem die Elektricität der ersten Kugel wegen der nicht leitenden Eigenschaft ihrer Substanz unter allen Umständen constant bleibt. Etwas anders gestalten sich dann aber die Vorgänge, wenn die erste Kugel gleichfalls aus einer leitenden Substanz gebildet wird. Dann wirkt nämlich die erste Vertheilung auf der zweiten Kugel, welche eine Folge der directen Einwirkung von Seiten der ersten elektrischen Kugel ist, nicht blos auf alle Punkte der Oberfläche dieser zweiten Kugel, sondern eben so auch auf alle Punkte der Oberfläche der ersten Kugel ein. Die auf der ersten Kugel hierdurch erregte Vertheilung wirkt wieder auf die Oberfläche der ersten und zweiten Kugel, erregt hier wieder eine neue Vertheilung, die wieder auf beiden Oberflächen eine weitere Vertheilung hervorruft u. s. f. Man wird bei genauer Erwägung dieser einzelnen Vorgänge bald die Ueberzeugung gewinnen, dass man in Bezug auf das Endresultat genau dasselbe erhalten muss, wenn man zuerst die in dem vorhergehenden Falle unter der Voraussetzung der ersten Kugel als eines Nichtleiters betrachtete erste Vertheilung auf der Oberfläche der zweiten Kugel nur in ihrer Wirkung auf die Oberfläche dieser zweiten Kugel (wenn ich so sagen darf) zu Ende oder zum Abschlusse gelangen lässt, dann die Rückeinwirkung dieser für die zweite Kugel abgeschlossenen Vertheilung, die man jetzt für einen Augenblick als constant betrachtet, auf die erste Kugel sucht, die Vertheilung für diese Kugel in der Einwirkung auf ihre Oberfläche allein zum Abschlusse kommen lässt, dann die weitere Einwirkung dieser Vertheilung auf die zweite Kugel berechnet u. s. w. Die endliche Vertheilung der Elektricität auf beiden Kugeln wird dann durch die Summe der auf jeder nach einander erzeugten Vertheilungen gefunden.

Im Fall, dass beide Kugeln leitend und ursprünglich elektrisch sind, hat man das bezeichnete Verfahren auf beide Kugeln anzuwenden, also jede einmal als die erste zu betrachten, und zuletzt für jeden Punkt ihrer Oberflächen aus allen daselbst vorhanden gewesenen und erregten Elektricitäten die Summe zu bilden.

### 1. *Vertheilung der Elektricität auf einer Kugel mit leitender Oberfläche, welche durch die auf einer nicht leitenden Kugel gleichförmig ausgebreitete Elektricität erregt wird.*

#### a. Erstes Verfahren zur Berechnung dieser Vertheilung.

Es wird am besten sein, zuerst mit der Behandlung des vorhin schon aufgestellten einfacheren Falles zu beginnen und an ihm die Brauchbarkeit und Richtigkeit des Verfahrens der, wenn ich es so nennen darf, successiven Elektrisirung nachzuweisen. Wir wollen also zunächst, um die Frage vollkommen scharf zu bezeichnen, folgende Aufgabe zu lösen suchen:

Eine Schellackkugel sei auf ihrer Oberfläche gerieben und dadurch auf derselben mit einer überall gleich dicken Schicht Elektricität bedeckt: welche elektrische Vertheilung wird auf einer genäherten zuvor unelektrischen, isolirt aufgestellten metallischen Kugel durch jene Schellackkugel erzeugt?

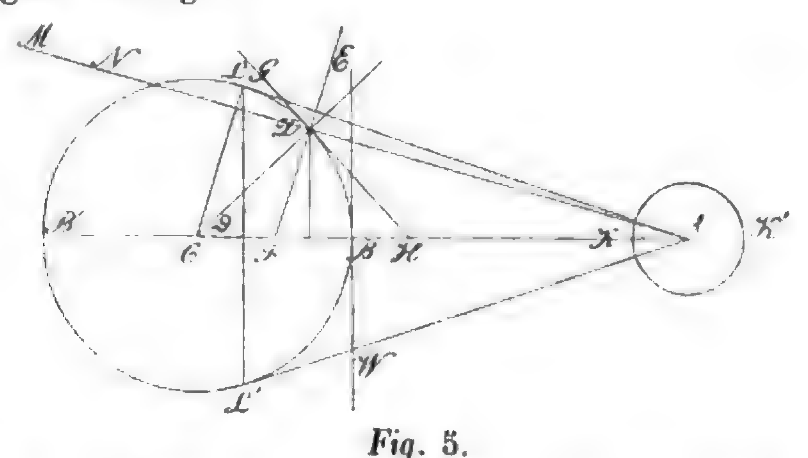


*Fig.* 5.

Es sei die Kugel um $A$ die geriebene Schellackkugel, die Kugel um $C$ dagegen die anfänglich unelektrische, aber isolirt aufgestellte metallische Kugel. Der Radius der ersten Kugel sei $\rho$, der Radius der zweiten $r$, die Entfernung der Mittelpunkte beider Kugeln $c$. Die Dicke der elektrischen Schicht auf der Kugel um $A$ sei $\eta$; so ist, wenn $E$ die Menge der auf ihrer ganzen Oberfläche angehäuften Elektricität bedeutet, $E = \eta\rho^2$. Da nun die elektrische Schicht überall gleiche Dicke besitzt, so kann, weil die Elektricität auch in Beziehung auf ihre Wirkung in die Ferne dem Gesetze des umgekehrten Verhältnisses der Quadrate der Entfernungen folgt, anstatt der auf der Oberfläche verbreiteten Elektricitätsmenge $E$, dieselbe Menge $E$ in dem Mittelpunkte der Kugel $A$

concentrirt gedacht werden, ebenso wie die Masse einer überall gleich dicken Kugelschaale bei der Berechnung der anziehenden Wirkung der Schwerkraft in ihren Mittelpunkt versetzt werden kann. Im vorliegenden Falle erleidet auch später, weil die Kugel aus einer isolirenden Substanz bestehen soll, die Gleichförmigkeit der Dicke der Schicht keine Veränderung, und es ist daher die obige Annahme bei dieser Kugel unter den mannigfachsten Einwirkungen von aussen statthaft.

Anstatt der auf der Oberfläche der Schellackkugel verbreiteten Elektricität setzen wir also jetzt dieselbe Menge $E = \eta\varrho^2$ in dem Mittelpunkte der Kugel $A$ angehäuft. Von diesem Punkte $A$ geht dann die Wirkung nach allen Seiten hin, und nimmt an Stärke ebenso, wie die Intensität des Lichtes, im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen ab. Die unmittelbare Einwirkung der in $A$ angehäuften Elektricität auf die Oberfläche der Kugel um $C$ wird daher dieselbe sein, wie die Erleuchtung dieser Oberfläche durch einen in $A$ angebrachten leuchtenden Punkt, dessen Intensität $= \eta\varrho^2$ ist; nur muss bei der Elektricität noch ihre polare Natur in Betracht gezogen werden. Wenn die in $A$ angehäufte Elektricität positiv ist, so wird die genanntem Punkte zugewandte Seite der Kugel um $C$ negativ, die abgewandte dagegen positiv. Wenn wir uns die Kugel um $C$ für die vom Punkte $A$ ausgehenden elektrischen Strahlen durchsichtig denken, so tritt z. B. ein solcher Strahl $CBB'$ bei $B$ in die Oberfläche ein, und bei $B'$ wieder aus derselben heraus. Nehmen wir stets die Richtung der elektrischen Strahlung positiv von dem positiv elektrischen Punkte ausgehend, so wird der Eintritt derselben in eine Oberfläche negative, der Austritt dagegen positive Elektricität anzeigen. Wäre in $A$, anstatt wie bisher positive, negative Elektricität angehäuft, so müsste die Richtung des Strahls in der Richtung nach dem Punkte $A$ hin genommen werden.

Es sei $AD$ ein unendlich dünner elektrischer Strahlenkegel, der von $A$ ausgehend die Kugeloberfläche um $C$ im Punkte $D$ trifft. In $D$ werde ihm zunächst eine auf seine Richtung senkrechte Ebene $ED$ entgegengestellt, so wird, wenn $d\omega$ das Element dieser Ebene innerhalb des Strahlenkegels bezeichnet, die Menge der auf dieses Element fallenden Strahlen

$$\frac{E}{AD^2}\,d\omega = \frac{\eta\varrho^2}{AD^2}\,d\omega.$$

Dieselbe Strahlenmenge trifft aber auch nur das Element der Kugel-

oberfläche innerhalb des Strahlenkegels, $d\varepsilon$. Wenn wir dasselbe als eben betrachten, so ist

$$d\varepsilon = \frac{d\omega}{\cos GDE}$$

oder

$$d\omega = d\varepsilon \,.\, \cos GDE,$$

und die Menge der auf diess Element der Kugeloberfläche fallenden Strahlen ist also, wenn man für $d\omega$ seinen Werth setzt,

$$\frac{\eta\varrho^2}{AD^2} \,.\, d\varepsilon \,.\, \cos GDE.$$

Wenn wir nun innerhalb dieses Elementes die Intensität der Bestrahlung überall gleich gross annehmen, so erhalten wir diese Intensität, wenn wir den vorstehenden Ausdruck durch die Grösse der Fläche des Elementes, also durch $d\varepsilon$ dividiren. Die Intensität der elektrischen Bestrahlung in jedem Punkte der Kugeloberfläche, oder was dasselbe, die Dicke $y$ der elektrischen Schicht, welche durch Vertheilung von Seiten der in $A$ vorhandenen Elektricität auf jedem Punkte der Kugeloberfläche hervorgerufen ist, wird daher, weil diese Vertheilung nur die unmittelbare Folge jener Einwirkung ist,

$$y = \frac{\eta\varrho^2}{AD^2} \,.\, \cos GDE.$$

Setzt man nun den Winkel $DCA = \vartheta$ und $\cos\vartheta = \mu$, so erhält man

$$\cos GDE = \frac{c\mu - r}{\sqrt{r^2 - 2rc\mu + c^2}}.$$

Mittelst dieses Werthes wird die Dicke $y$ der elektrischen Schicht auf jedem Punkte der Kugeloberfläche

$$y = \pm\, \eta\varrho^2 \frac{c\mu - r}{(r^2 - 2rc\mu + c^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Um die Zweideutigkeit im Zeichen zu beseitigen, soll die Wurzel stets mit dem positiven Zeichen genommen werden. Dann muss aber der ganze Ausdruck das — Zeichen erhalten. Es wird also

$$y = -\,\eta\varrho^2 \frac{c\mu - r}{(r^2 - 2rc\mu + c^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wo $\mu$ sich ändern kann von $\mu = +1$ für den Punkt $B$ bis $\mu = -1$ für den Punkt $B'$. Unter dieser Annahme drückt der vorstehende Ausdruck dann nicht blos die Dicke der elektrischen Schicht, sondern auch die Art derselben, ob sie positiv oder negativ ist, aus, wie sich sehr leicht nachweisen lässt. Denn wenn man von dem Punkte $A$ aus die Kegel-

fläche $ALL'$ berührend an die Kugel legt, so ist der Cosinus des Winkels, welchen der Radius $CL$ mit $CB$ macht,

$$\cos LCB = \frac{r}{c}.$$

In dem Raume $LBL'$ muss die Elektricität negativ, in dem Raume $LB'L'$ dagegen positiv sein. Soll der obige Ausdruck für $y$ diess anzeigen, so muss er negativ bleiben von $\mu = +1$ bis zu dem Werthe $\mu = \frac{r}{c}$, dagegen für Werthe von $\mu$, welche kleiner sind als $\frac{r}{c}$ und für alle Werthe von $\mu = 0$ bis $\mu = -1$ positiv werden. Diess geschieht nun in der That; denn der Nenner ändert sein Zeichen nicht, sondern bleibt stets positiv, der Zähler $c\mu$ wird aber 0 für $\mu = \frac{r}{c}$ und ist positiv, so lange $\mu$ positiv und $> \frac{r}{c}$, dagegen negativ für Werthe von $\mu < \frac{r}{c}$ bis zu $\mu = -1$.

Der Werth von $y$ für den Punkt $B$, für welchen $\mu = +1$, ist

$$y_{+1} = -\frac{\eta\varrho^2}{(c-r)^2}$$

für den Punkt $B'$, für welchen $\mu = -1$,

$$y_{-1} = +\frac{\eta\varrho^2}{(c+r)^2}.$$

Die absolute Dicke der elektrischen Schicht in $B$ übertrifft also die in $B'$ um

$$\eta\varrho^2 \frac{4rc}{(r^2-c^2)^2}.$$

Der Kürze wegen soll in dem Folgenden das Verhältniss zwischen dem Radius der Kugel um $C$ und der Entfernung der Mittelpunkte beider Kugeln gleich $z$ gesetzt werden,

$$z = \frac{r}{c}.$$

Dann wird

$$y = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2} \frac{\mu - z}{(1-2\mu z+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für weitere Untersuchungen ist es zweckmässig, diesen Ausdruck in eine nach Potenzen von $z$ fortschreitende Reihe zu entwickeln. Man sieht leicht, dass

$$\frac{\mu - z}{(1-2\mu z+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d.(1-2\mu z+z^2)^{-\frac{1}{2}}}{dz}.$$

Es ist aber

$$(1-2\mu z+z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\mu z+z^2\left(\frac{3\mu^2-1}{2}\right)+z^3\left(\frac{5\mu^3-3\mu}{2}\right)+z^4\left(\frac{35\mu^4-30\mu^2-3}{8}\right)+\ldots$$

Wird diese Reihe nach $z$ differentirt und der erhaltene Ausdruck eingesetzt, so ist

$$y = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\Bigg[\mu + 2z.\left(\frac{3\mu^2-1}{2}\right) + 3z^2\left(\frac{5\mu^3-3\mu}{2}\right) + 4z^3\left(\frac{35\mu^4-30\mu+3}{8}\right) + 5z^4\left(\frac{63\mu^5-70\mu^3+15\mu}{8}\right)$$

$$+ 6z^5\left(\frac{231\mu^6-315\mu^4+105\mu^2-5}{16}\right) + 7z^6\left(\frac{429\mu^7-693\mu^5+315\mu^3-35\mu}{16}\right)$$

$$+ 8z^7\left(\frac{6435\mu^8-12012\mu^6+6930\mu^4-1260\mu^2+35}{128}\right)$$

$$+ 9z^8\left(\frac{12155\mu^9-25740\mu^7+18018\mu^5-4620\mu^3+315\mu}{128}\right)$$

$$+ 10z^9\left(\frac{46189\mu^{10}-109395\mu^8+90090\mu^6-30030\mu^4+3465\mu^2-63}{256}\right)$$

$$+ \text{etc.}\Bigg]$$

oder wenn man die bekannten aus Functionen von $\mu$ gebildeten Coefficienten

$$\mu = T_1,\ \frac{3\mu^2-1}{2} = T_2,\ \frac{5\mu^3-3\mu}{2} = T_3 \text{ etc.}$$

setzt

$$y = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{T_1 + 2z\,T_2 + 3z^2\,T_3 + 4z^3\,T_4 + \text{etc.}\right\}$$

Dieser Ausdruck gibt also die Dicke der elektrischen Schicht, welche auf der Kugeloberfläche durch die unmittelbare Einwirkung der in $A$ angehäuften Elektricität hervorgerufen wird.

Wir sahen nun aber schon oben, dass von jedem Punkte der Oberfläche der Kugel um $C$ jetzt gewissermassen als Mittelpunkte der Strahlung eine neue Einwirkung auf alle Punkte derselben Kugel ausgeht. Wir müssen also jetzt die Dicke der elektrischen Schicht bestimmen, welche durch die auf der Oberfläche der Kugel nach dem Gesetz

$$y = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left(T_1 + 2z\,T_2 + \text{etc.}\right)$$

verbreitete Elektricität in allen Punkten derselben Oberfläche erzeugt wird.

Um diese Bestimmung zu erleichtern, wird es zweckmässig sein, die anzustellenden Rechnungen durch folgende Betrachtung auf bekannte Formen zurückzuführen.

Da bei dem von mir eingeschlagenen Wege die Elektricität jedes Mal nur gleich der Schwerkraft in ihrer Wirkung nach dem umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen in Betracht kommt, so liegt es nahe, die genauere Berechnung ihrer Wirkungen auf dieselbe Weise wie bei der Schwerkraft, natürlich mit den nöthigen Modificationen, zu unternehmen. Es war

$$y = -\eta\varrho^2 \frac{c\mu - r}{(r^2 - 2rc\mu + c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

oder da

$$\frac{c\mu - r}{(r^2 - 2rc\mu + c^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d\,(r^2 - 2rc\mu + c^2)^{-\frac{1}{2}}}{dr}$$

$$y = d\,.\frac{\dfrac{-\eta\varrho^2}{\sqrt{r^2 - 2rc\mu + c^2}}}{dr}$$

Der Ausdruck $-\frac{\eta\varrho^2}{\sqrt{r^2 - 2rc\mu + c^2}}$ ist aber nichts Anderes, als das Potential der in $A$ angehäuften Elektricität $\eta\varrho^2$ in Bezug auf einen Punkt der Oberfläche der Kugel.

Es werde

$$-\frac{\eta\varrho^2}{\sqrt{r^2 - 2rc\mu + c^2}} = V$$

gesetzt, so ist

$$y = \frac{dV}{dr}.$$

Man erhält also die Dicke der elektrischen Schicht für jeden Punkt der Kugeloberfläche, wenn man das Potential der in $A$ angehäuften Elektricität in Bezug auf diesen Punkt nimmt, und nach dem Halbmesser der Kugel differenzirt.

Mittelst des Potentials wird sich nun die vorhin gestellte Aufgabe, die Vertheilung auf der Kugeloberfläche zu bestimmen, welche die auf ihr schon angehäufte elektrische Schicht von der Dicke $y$ hervorbringt, leicht ausführen lassen, da wir hierbei auf ganz bekannte Formen stossen.

Es bedarf zur Lösung dieser Aufgabe zunächst der Kenntniss des Potentials der auf der Kugelfläche in der Dicke $y$ angehäuften elektrischen Schicht in Bezug auf einen beliebigen ausserhalb der Kugel gelegenen Punkt. Die Lagen der einzelnen Punkte gegen einander sollen in Polarcoordinaten ausgedrückt werden, deren Anfangspunkt der Mittelpunkt der Kugel $C$ ist. $r$ bedeutet den Halbmesser der Kugel, $\vartheta$ den Winkel, welchen der nach einem Punkte der Kugeloberfläche gezogene Halbmesser mit der Linie $CA$ bildet, und $\psi$ den Winkel, welchen eine durch diesen Halbmesser und $CA$ gelegte Ebene mit einer andern festen, ebenfalls durch $CA$ gelegten Ebene macht. Die Coordinaten des Punktes, in Bezug auf welchen das Potential gesucht wird, seien entsprechend $r'$, $\vartheta'$, $\psi'$, wo also für den ausserhalb der Kugel gelegenen Punkt, da $r'$ die Entfernung desselben von $C$ bedeutet, $r' > r$ ist.

Wenn $R$ die Entfernung der beiden Punkte, deren Coordinaten $r$, $\vartheta$, $\psi$ und $r'$, $\vartheta'$, $\psi'$ sind, und $dm$ die auf dem Oberflächenelement im

ersten angehäufte Elektricitätsmenge bezeichnet, so ist das Potential dieser letztern in Bezug auf den äussern Punkt

$$-\frac{dm}{R}$$

und wenn man die Summe der Potentiale aller Punkte der Oberfläche auf den äussern Punkt sucht, und mit $V$ bezeichnet,

$$V = -\int \frac{dm}{R}$$

das Integral über die ganze Oberfläche der Kugel ausgedehnt.

Bekanntlich ist

$$R = \sqrt{r^2 - 2rr' \left(\cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\psi - \psi')\right) + r'^2}.$$

Ferner ist nach dem Früheren

$$dm = \frac{y}{4\pi} r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi$$

oder wenn man $\cos\vartheta = \mu$, und $\sin\vartheta \, d\vartheta = -d\mu$ setzt,

$$dm = -\frac{y}{4\pi} r^2 \, d\mu \, d\psi.$$

Man erhält daher

$$V = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{yr^2 \, d\mu \, d\psi}{\sqrt{r^2 - 2rr' \left(\cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\psi - \psi')\right) + r'^2}},$$

wo das Integral in Bezug auf $\psi$ zu nehmen ist von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$, und in Bezug auf $\mu$ von $\mu = +1$ bis $\mu = -1$ (oder in Bezug auf $\vartheta$ von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$).

Da die Function $V$ in Bezug auf die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Kugeln symmetrisch sein muss, so lässt sie sich bekanntermassen auf folgendem Wege sehr leicht bestimmen. Man lege den Punkt, in Bezug auf welchen man das Potential sucht, auf die Linie $AC$; dadurch wird $\vartheta' = 0$, und $\cos\vartheta' = 1$, $\sin\vartheta' = 0$.

Der Werth von $V$ für einen um $r'$ auf der Linie $CA$ von $C$ abstehenden Punkt wird also

$$V = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{yr^2 \, d\mu \, d\psi}{\sqrt{r^2 - 2rr'\mu + r'^2}}.$$

Wird die Integration nach $\psi$ zwischen den vorher angegebenen Gränzen ausgeführt, so findet sich

$$V = \tfrac{1}{2} \int \frac{yr^2 \, d\mu}{\sqrt{r^2 - 2rr'\mu + r'^2}}.$$

Wird $\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\mu + r'^2}}$ in eine Reihe nach steigenden Potenzen von $\frac{r}{r'}$ entwickelt, so erhält man, wenn $T_0$, $T_1$, $T_2$ ... die frühern Coefficienten

bedeuten,

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\mu + r'^2}} = \frac{1}{r'} \left\{ T_0 + T_1 \frac{r}{r'} + T_2 \left(\frac{r}{r'}\right)^2 + \ldots \right\},$$

wo $T_0 = 1$, und

$$V = \frac{r^2}{2r'} \int y \left\{ T_0' + T_1 \frac{r}{r'} + T_2 \left(\frac{r}{r'}\right)^2 + \ldots \right\} d\mu$$

oder wenn für $y$ sein Werth gesetzt wird,

$$V = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2} \frac{r^2}{2r'} \int \left\{ T_1 + 2z\ T_2 + 3z^2\ T_3 \ldots \right\} \left\{ T_0 + T_1 \frac{r}{r'} + T_2 \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \ldots \right\} d\mu$$

Bekanntlich ist nun aber der Werth von $\int_{\mu=+1}^{\mu=-1} T_n T_m \, d\mu = 0$, sobald $n$ und $m$ verschieden sind; es bleiben folglich nur diejenigen Glieder übrig, in welchen bei der Ausführung der Multiplication der beiden Reihen gleiche Stellenzeiger auftreten, so dass sich $V$ reducirt auf

$$V = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2} \frac{r^2}{2r'} \int \left\{ \frac{r}{r'} T_1^2 + 2z \left(\frac{r}{r'}\right)^2 T_2^2 + 3z^2 \left(\frac{r}{r'}\right)^3 T_3^2 + \ldots \right\} d\mu.$$

Es ist aber allgemein zwischen den Gränzen $\mu = +1$ und $\mu = -1$

$$\int T_n^2 \, d\mu = -\frac{2}{2n+1}.$$

Daher wird

$$V = \frac{\eta\varrho^2}{c^2} \left\{ \tfrac{1}{3} \frac{r^3}{r'^2} + \tfrac{1}{5}\, 2z \frac{r^4}{r'^3} + \tfrac{1}{7}\, 3z^2 \frac{r^5}{r'^4} + \ldots \right\}.$$

Um hieraus nun den allgemeinen Werth von $V$ für jeden beliebigen Punkt ausserhalb der Kugel um $C$, dessen Coordinaten durch $r'$, $\vartheta'$ und $\psi'$ ausgedrückt sind, zu erhalten, hat man bekanntlich die einzelnen Glieder in der Klammer der Reihe nach nur mit den Coefficienten der Potenzen von $\frac{r}{r'}$ in der Entwickelung des Ausdrucks $\frac{1}{\sqrt{1 - 2\mu' \frac{r}{r'} + \frac{r^2}{r'^2}}}$ zu multipliciren. Werden dieselben mit $T_0'$, $T_1'$, $T_2'$, $T_3'$ … bezeichnet, so erhält man den allgemeinen Werth von $V$

$$V = \frac{\eta\varrho^2}{c^2} \left\{ \tfrac{1}{3} T_1' \frac{r^3}{r'^2} + \tfrac{1}{5}\, 2T_2' z \frac{r^4}{r'^3} + \tfrac{1}{7}\, 3T_3' z^2 \frac{r^5}{r'^4} + \ldots \right\}.$$

Daraus folgt der Werth von $\frac{dV}{dr'}$

$$\frac{dV}{dr'} = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2} \left\{ \tfrac{2}{3} T_1' \frac{r^3}{r'^3} + \tfrac{6}{5} T_2' z \frac{r^4}{r'^4} + \tfrac{12}{7} T_3' z^2 \frac{r^5}{r'^5} + \text{etc.} \right\}.$$

Nach dem Obigen (S. 451) wird nun aber die Dicke der elektrischen Schicht für einen Punkt der Oberfläche der Kugel gefunden, wenn man das Potential der elektrischen Massen in Bezug auf diesen Punkt nach dem Halbmesser differentirt. Soll der vorstehende Ausdruck, der diess Diffe-

rential für den Punkt $r'$, $\vartheta'$, $\psi'$ ausserhalb der Kugelfläche darstellt, für die Oberfläche der Kugel selbst gelten, so hat man nur $r$, $\vartheta$, $\psi$ anstatt $r'$, $\vartheta'$, $\psi'$ zu schreiben, oder $r'$ mit $r$ und $T'_n$ mit $T_n$ zu vertauschen. Bezeichnet man die Dicke der durch diese Einwirkung erregten elektrischen Schicht mit $y'$, so ist

$$y' = \frac{dV}{dr} = -\frac{\eta\varrho^3}{c^2}\left\{1 \, . \, \tfrac{2}{3} \, T_1 + 2 \, . \, \tfrac{3}{5} \, T_2 z + 3 \, . \, \tfrac{4}{7} \, T_3 z^2 + \text{etc.}\right\}.$$

Vergleicht man diesen Werth von $y'$ mit dem Werthe von $y$,

$$y = -\frac{\eta\varrho^3}{c^2}\left\{1 \, . \, T_1 + 2 \, . \, T_2 z + 3 \, . \, T_3 z^2 + \text{etc.}\right\},$$

so übersicht man sogleich, dass wenn man jetzt wieder die neue Vertheilung der Elektricität auf der Kugeloberfläche sucht, welche infolge der eben berechneten Verbreitung der Elektricität von der Dicke $y'$ hervorgerufen wird, die Dicke dieser neuen Schicht $y''$ ausgedrückt werden muss durch

$$y'' = -\frac{\eta\varrho^3}{c^2}\left\{1 \, . \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 T_1 + 2 \, . \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 T_2 z + 3 \, . \left(\tfrac{4}{7}\right)^2 T_3 z^2 + \text{etc.}\right\}.$$

Die Richtigkeit dieses Verfahrens zur Bestimmung von $y''$ und ebenso der folgenden $y^{(n)}$ hätte sich übrigens oben auch allgemein nachweisen lassen, wenn in dem frühern Ausdrucke die Zahlencoefficienten der einzelnen Glieder 1, 2, 3 ... durch allgemeine Zeichen $a$, $b$, $c$ ... ersetzt worden wären.

Bezeichnet man die Dicke der durch die Vertheilung $y''$ wieder erregten Elektricität mit $y'''$, und die der folgenden mit $y^{iv}$ u. s. f., so hat man also

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{\eta\varrho^3}{c^2}\left\{1 \, . \, T_1 + 2 \, . \, z \, T_2 + 3 \, z^2 \, T_3 + \ldots\right\} \\
y' &= -\frac{\eta\varrho^3}{c^2}\left\{1 \, . \, \tfrac{2}{3} \, T_1 + 2 \, . \, \tfrac{3}{5} \, z \, T_2 + 3 \, . \, \tfrac{4}{7} \, z^2 \, T_3 + \ldots\right\} \\
y'' &= -\frac{\eta\varrho^3}{c^2}\left\{1 \, . \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 T_1 + 2 \, . \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 z \, T_2 + 3 \, . \left(\tfrac{4}{7}\right)^2 z^2 \, T_3 + \ldots\right\} \\
y''' &= -\frac{\eta\varrho^3}{c^2}\left\{1 \, . \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 T_1 + 2 \, . \left(\tfrac{3}{5}\right)^3 z \, T_2 + 3 \, . \left(\tfrac{4}{7}\right)^3 z^2 \, T_3 + \ldots\right\} \\
y^{iv} &= \text{etc.}
\end{aligned}$$

Die Dicke der infolge aller dieser bis ins Unendliche fortgesetzten Vertheilungswirkungen hervorgerufenen elektrischen Schicht ist gleich der Summe aller vorstehend angegebenen einzelnen Schichten. Wird sie mit $Y$ bezeichnet, so ist

$$Y = y + y' + y'' + y''' + y^{iv} + \ldots$$

Die Coefficienten jedes der $T_n$ bilden aber eine geometrische Reihe und

lassen sich daher leicht summiren; es ist

$$1 + \tfrac{2}{3} + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + \text{etc.} = 3$$
$$1 + \tfrac{3}{5} + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{5}\right)^3 + \text{etc.} = \tfrac{5}{2}$$
$$1 + \tfrac{4}{7} + \left(\tfrac{4}{7}\right)^2 + \left(\tfrac{4}{7}\right)^3 + \text{etc.} = \tfrac{7}{3}$$

etc.

Dadurch ergibt sich

$$Y = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{3\,T_1 + 5\,T_2\,z + 7\,T_3\,z^2 + 9\,T_4\,z^4 + 11\,T_5\,z^5 + \text{etc.}\right\}$$
$$= -\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{\frac{2(\mu - z)}{(1 - 2\mu z + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{z\sqrt{1 - 2\mu z + z^2}} - \frac{1}{z}\right\}$$
$$= -\frac{\eta\varrho^2}{c^2 z}\left\{\frac{1 - z^2}{(1 - 2\mu z + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 1\right\}.$$

$Y$ ist also die Dicke der elektrischen Schicht in jedem Punkte der Oberfläche der Kugel um $C$, wenn die von $A$ aus angeregten Vertheilungen zu Ende gekommen sind, und also die Elektricität auf der Oberfläche sich im Zustande des Gleichgewichtes befindet.

**b. Prüfung der Richtigkeit des gewonnenen Resultats.**

Mit Hülfe eines allgemeinen Princips lässt sich nun leicht nachweisen, dass der im Vorstehenden eingeschlagene Weg zu einem richtigen Resultate geführt hat. Diess Princip ist das bekannte, welches auch Poisson seinen Berechnungen zu Grunde gelegt hat, dass bei Anwesenheit mehrerer elektrischer Körper sich die Elektricität auf allen denjenigen unter ihnen, welche Leiter sind, so vertheilen muss, dass die Gesammtwirkung aller auf jeden Punkt im Innern eines der Leiter gleich Null ist. In jedem Falle erhält man durch dieses Princip so viele Bedingungsgleichungen, als Leiter vorhanden sind. Die unter den elektrischen Körpern befindlichen Isolatoren lassen keine Aenderung ihres Zustandes zu, und kommen also nur durch ihre Einwirkung auf die Leiter in Betracht, indem die Gesammtresultirende auf jeden Punkt in ihrem Innern jede beliebige Grösse haben kann, da wegen der nicht leitenden Eigenschaft durch diese Resultirende doch keine neue Vertheilung in ihrem Innern erregt werden kann. Im vorliegenden Falle ist ausser der leitenden Kugel um $C$ noch die im Punkte $A$ angehäufte Elektricität vorhanden; man erhält also jetzt für das Gleichgewicht der Elektricität auf der Oberfläche dieser Kugel die Bedingungsgleichung, dass die Wirkung der auf dieser Oberfläche verbreiteten und der im Punkte $A$ angehäuften Elektricität auf

jeden Punkt im Innern der Kugel um $C$ gleich Null ist, oder was bekanntlich dasselbe sagt, dass die Summe der Potentiale der auf der Kugeloberfläche verbreiteten und der im Punkte $A$ angehäuften Elektricität in Bezug auf jeden Punkt im Innern der Kugel um $C$ eine constante Grösse ist.

Es seien $r'$, $\vartheta'$, $\psi'$ die Coordinaten eines Punktes im Innern der Kugel um $C$, und $R$ seine Entfernung von dem Punkte $A$, so ist das Potential der in $A$ angehäuften Elektricität $\eta\varrho^2$ auf diesen Punkt

$$-\frac{\eta\varrho^2}{R}$$

oder wenn man für $R$ seinen Werth

$$R=\sqrt{r'^2-2r'c\,\mu'+c^2}=c\sqrt{1-2\frac{r'}{c}\,\mu'+\frac{r'^2}{c^2}}$$

setzt

$$=-\frac{\eta\varrho^2}{c\sqrt{1-2\mu'\frac{r'}{c}+\frac{r'^2}{c^2}}}.$$

Als oben das Potential der durch $y$ ausgedrückten Vertheilung, wo

$$y=-\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{T_1+2z\,T_2+3z^2\,T_3+4z^3\,T_4+\text{etc.}\right\}$$

war, auf einen äussern Punkt $r'$, $\vartheta'$, $\psi'$ gesucht wurde, ergab sich der Werth desselben

$$\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{\tfrac{1}{3}T_1'\frac{r^3}{r'^2}+\tfrac{2}{5}T_2'\,z\frac{r^4}{r'^3}+\tfrac{3}{7}T_3'\,z^2\frac{r^5}{r'^4}+\text{etc.}\right\}.$$

Sucht man das Potential der durch $Y$ ausgedrückten Vertheilung, wo

$$Y=-\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{3T_1+5T_2\,z+7T_3\,z^2+9T_4\,z^3+\text{etc.}\right\}$$

ist, auf denselben äussern Punkt, so erkennt man bald, dass man in diesem Falle durch Anwendung desselben Verfahrens wie oben den Werth des Potentials $V$ erhält,

$$V=\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{T_1'\frac{r^3}{r'^2}+T_2'\,z\frac{r^4}{r'^3}+T_3'\,z^2\frac{r^5}{r'^4}+\text{etc.}\right\}.$$

Sucht man das Potential für diese Vertheilung nun in Bezug auf einen innern Punkt $r'$, $\vartheta'$, $\psi'$, so muss die Entwickelung des Werthes von $\frac{1}{R}$ nicht nach Potenzen von $\frac{r}{r'}$, sondern vielmehr nach Potenzen von $\frac{r'}{r}$ geschehen. Diess ändert aber die Coefficienten $T_n$ nicht, und man erhält, wenn man die durch diese Aenderung hervorgebrachten Unterschiede in Betracht zieht, das Potential der in der Dicke $Y$ über die Kugeloberfläche ausgebreiteten Elektricität in Bezug auf jeden Punkt im Innern derselben

$$\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{T_1' r' + T_2' z \frac{r'^2}{r} + T_3' z^2 \frac{r'^3}{r^2} + \text{etc.}\right\}$$

oder für $z$ seinen Werth $\frac{r}{c}$ gesetzt

$$\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{T_1' r' + T_2' \frac{r'^2}{c} + T_3' \frac{r'^3}{c^2} + \text{etc.}\right\}$$

$$= \frac{\eta\varrho^2}{c}\left\{T_1' \frac{r'}{c} + T_2' \left(\frac{r'}{c}\right)^2 + T_3' \left(\frac{r'}{c}\right)^3 + \text{etc.}\right\}$$

Dieser Ausdruck lässt sich summiren; seine Summe ist:

$$= \frac{\eta\varrho^2}{c}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r'}{c}\mu' + \frac{r'^2}{c^2}}} - 1\right\}$$

oder da $\sqrt{1-2\frac{r'}{c}\mu' + \frac{r'^2}{c^2}} = \frac{R}{c}$,

wird derselbe $\frac{\eta\varrho^2}{c}\left\{\frac{c}{R} - 1\right\} = \left(\frac{\eta\varrho^2}{R} - \frac{\eta\varrho^2}{c}\right)$.

Die Summe beider Potentiale, nämlich der auf der Kugeloberfläche und der in $A$ befindlichen Elektricität ist daher

$$-\frac{\eta\varrho^2}{R} + \left(\frac{\eta\varrho^2}{R} - \frac{\eta\varrho^2}{c}\right) = -\frac{\eta\varrho^2}{c}$$

also constant. Die partiellen Differentialquotienten des vorstehenden Ausdrucks, welche die Anziehungen auf die im Innern liegenden Punkte angeben, werden Null; es findet also keine Wirkung auf diese Punkte statt; und $Y$ drückt in dem vorliegenden Falle in der That die Vertheilung der Elektricität über die Oberfläche der Kugel aus.

Ein Theil der vorstehenden Rechnungen lässt sich auch noch auf andere Weise prüfen. Durch die unmittelbare Bestrahlung von Seiten der in $A$ angehäuften Elektricitätsmenge $\eta\varrho^2$ wurde auf der Oberfläche der Kugel eine elektrische Schicht von der Dicke $y$

$$y = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{T_1 + 2z\, T_2 + 3z^2\, T_3 + 4z^3\, T_4 + \text{etc.}\right\}$$

erregt. Als Summe dieser Elektricität und der infolge der von ihr weiter erregten fand sich zuletzt die Dicke der elektrischen Schicht $Y$

$$Y = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{3T_1 + 5z\, T_2 + 7z^2\, T_3 + 9z^3\, T_4 + \text{etc.}\right\}.$$

Es ist daher die Dicke der durch die blosse Wirkung der elektrischen Schicht von der Dicke $y$ erregten Elektricität

$$Y - y = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{2T_1 + 3z\, T_2 + 4z^2\, T_3 + 5z^3\, T_4 + \text{etc.}\right\}$$

Diese Schicht ist also erregt durch die nach und nach bis zur Dicke $Y$

anwachsende elektrische Schicht; sie muss also auch erhalten werden, wenn man die elektrische Bestrahlung sucht, welche von einer Kugel, auf deren Oberfläche eine elektrische Schicht von der Dicke $Y$ ausgebreitet ist, auf die Punkte ihrer Oberfläche ausgeübt wird. Schon oben wurde der Werth von $V$ für einen äussern Punkt $r', \vartheta', \psi'$ bestimmt, wenn die Dicke der elektrischen Schicht $Y$ ist; er war

$$V = \frac{\eta\varrho^2}{c^2} \left\{ T_1' \frac{r^3}{r'^3} + T_2' z \frac{r^4}{r'^3} + T_3' z^2 \frac{r^5}{r'^4} + \text{etc.} \right\}$$

Hieraus folgt

$$\frac{dV}{dr'} = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2} \left\{ 2\, T_1' \frac{r^3}{r'^3} + 3\, T_2' z \frac{r^4}{r'^4} + 4\, T_3' z^2 \frac{r^5}{r'^5} + \text{etc.} \right\}$$

Man erhält nun die Dicke der elektrischen Schicht (Grösse der Bestrahlung) für einen Punkt der Kugeloberfläche, wenn man den Punkt $r', \vartheta', \psi'$ auf die Kugeloberfläche setzt, also $r' = r$ und $\mu' = \mu$ macht, wodurch $T'_n$ in $T_n$ übergeht; es wird diese Dicke

$$= -\frac{\eta\varrho^2}{c^2} \left( 2\, T_1 + 3z\, T_2 + 4z^2\, T_3 + 5z^3\, T_4 + \text{etc.} \right\}$$

also derselbe Werth wie zuvor für $Y - y$.

#### c. Zweites Verfahren zur Berechnung der Vertheilung.

Die Dicke der elektrischen Schicht auf der Kugel um $C$ lässt sich ohne Schwierigkeit auch herleiten aus dem vorher angeführten Principe, dass die Wirkung der in $A$ und auf ihrer Oberfläche angehäuften Elektricität auf jeden Punkt im Innern dieser Kugel $= 0$, oder dass das Potential dieser beiden Elektricitätsmengen in Bezug auf jeden Punkt im Innern der Kugel eine constante Grösse sein muss. Es bedeute $V$ das Potential der auf der Oberfläche der Kugel angehäuften Elektricität auf einen äussern und $V'$ dasselbe auf einen innern Punkt, und $v$ das Potential der in $A$ befindlichen Elektricität auf denselben Punkt: so liefert das eben ausgesprochene Princip die Bedingungsgleichung, aus welcher sich die Dicke der elektrischen Schicht auf der Kugeloberfläche muss entwickeln lassen, nämlich

$$V' + v = h$$

wo $h$ eine constante Grösse ist.

Man kann $V$ sowohl als auch $V'$ in eine Reihe entwickeln, ersteres nach Potenzen von $\frac{r}{r'}$, und letzteres nach Potenzen von $\frac{r'}{r}$, wo $r$ wie zuvor den Radius der Kugel um $C$, dagegen $r', \vartheta', \psi'$, die Coordi-

naten des Punktes, auf welchen sich das Potential bezieht, bedeuten. Es wird dann

$$V = \frac{r^2}{r'} P_0 + \frac{r^3}{r'^2} P_{,} + \frac{r^4}{r'^3} P_{,,} + \frac{r^5}{r'^4} P_{,,,} + \text{etc.}$$

$$V' = r P_0 + r' P_{,} + \frac{r'^2}{r} P_{,,} + \frac{r'^3}{r^2} P_{,,,} + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten $P_n$ im Allgemeinen ganze und rationale Functionen von $\vartheta$ und $\psi$ sind, welche der bekannten Gleichung in partiellen Differentialen

$$\frac{d.\left\{(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu}\right\}}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2 P_n}{d\psi^2} + n(n+1)P_n = 0$$

genügen.

In dem vorliegenden Falle, wo Alles um $AC$ symmetrisch ist, bleiben diese Coefficienten nur noch Funktionen von $\vartheta$.

Es war

$$V = -\int \frac{dm}{R}$$

wo $dm$ die in einem Elemente der Oberfläche befindliche elektrische Masse, und $R$ die Entfernung dieses Elements von dem Punkte, in Bezug auf welchen das Potential gesucht wird, bedeutet. Entwickelt man

$$\frac{1}{R} = \left\{r^2 - 2rr'\left(\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\psi-\psi')\right) + r'^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

in eine Reihe nach Potenzen von $\frac{r}{r'}$, so erhält dieselbe die Form

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r'}\left\{Q_0 + Q_{,}\frac{r}{r'} + Q_{,,}\frac{r^2}{r'^2} + \text{etc.}\right\}$$

Hiernach wird

$$r^2 P_0 = -\int Q_0\, dm = -\int dm$$

weil $Q_0 = 1$ ist. Da nun aber auf der Kugel gleich viel positive und negative Elektricität vorhanden ist, so wird $\int dm$ ausgedehnt über die ganze Kugelfläche $= 0$; folglich ist auch

$$P_0 = 0.$$

Es ist also

$$V = \frac{r^3}{r'^2} P_{,} + \frac{r^4}{r'^3} P_{,,} + \frac{r^5}{r'^4} P_{,,,} + \text{etc.}$$

$$V' = r' P_{,} + \frac{r'^2}{r} P_{,,} + \frac{r'^3}{r^2} P_{,,,} + \text{etc.}$$

Wenn man den Punkt $r', \vartheta' \psi'$, auf welchen das Potential sich bezieht, auf die Oberfläche der Kugel selbst legt, wodurch $r' = r$ wird, so werden, wie man sieht, die beiden Werthe einander gleich. Eine solche

Gleichheit tritt aber in unserm Falle, wo wir die Elektricität auf der Oberfläche ausgebreitet angenommen haben, nicht mehr ein zwischen den Werthen $\frac{dV}{dr}$ und $\frac{dV'}{dr'}$, wenn $r'=r$ gesetzt wird, sondern beide Werthe sind nach einem bekannten Satze für einen Punkt der Oberfläche verschieden um die Dicke $Y$ der in diesem Punkte angehäuften elektrischen Schicht. Dadurch wird die allgemeine Form eines Ausdrucks für $Y$ gewonnen, indem

$$Y = \frac{dV}{dr} - \frac{dV'}{dr'}.$$

Nun ist für $r'=r$

$$\frac{dV}{dr} = -(2P_{\prime} + 3P_{\prime\prime} + 4P_{\prime\prime\prime} + \text{etc.})$$

$$\frac{dV'}{dr'} = \quad P_{\prime} + 2P_{\prime\prime} + 3P_{\prime\prime\prime} + \text{etc.}$$

woraus sich ergibt

$$Y = -\{3P_{\prime} + 5P_{\prime\prime} + 7P_{\prime\prime\prime} + \text{etc.}\}$$

Man sieht also, dass $Y$ bekannt ist, wenn die Werthe der in den Potentialen $V$ und $V'$ vorkommenden Coefficienten $P_n$ bekannt sind. Die Bestimmung dieser Coefficienten lässt sich aber aus der oben angegebenen Bedingungsgleichung

$$V' + v = h$$

und aus der ebenfalls bekannten allgemeinen Form von $V'$

$$V' = r'P_{\prime} + \frac{r'^2}{r}P_{\prime\prime} + \frac{r'^3}{r^2}P_{\prime\prime\prime} + \frac{r'^4}{r^3}P_{\prime v} + \text{etc.}$$

ohne Schwierigkeit erhalten, da $v$ bekannt und $h$ constant ist.

Mit Benutzung eines früher schon angezogenen Satzes kann man die Bestimmung dieser Coefficienten leicht ausführen, wenn man den Punkt, auf welchen sich das Potential bezieht, zunächst auf die Linie $AC$, für welche $\mu'=1$ ist, also innerhalb des Stückes $CB$ legt. Es mögen die Werthe $P_n$, die für diesen speciellen Fall aufhören Functionen von $\mu'$ zu sein, mit $p_n$ bezeichnet werden. Man erhält dann aus diesen speciellen Werthen die allgemeinen $P_n$ durch Multiplication mit dem Coefficienten des entsprechenden Gliedes $T_n'$ aus der Entwickelung von $\left(1-2\mu'z+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. Gibt man dem in Rede stehenden Punkte die genannte Lage, so wird

$$V' = r'p_{\prime} + \frac{r'^2}{r}p_{\prime\prime} + \frac{r'^3}{r^2}p_{\prime\prime\prime} + \frac{r'^4}{r^3}p_{\prime v} + \text{etc.}$$

und, da sein Abstand vom Punkte $A$, wo die Elektricitätsmenge $\eta\varrho^2$ angehäuft ist, $c - r'$ beträgt, erhält man

$$v = -\frac{\eta\varrho^2}{c-r'}.$$

Die obige Bedingungsgleichung wird für diesen Fall

$$r' p_{,} + \frac{r'^2}{r} p_{,,} + \frac{r'^3}{r^2} p_{,,,} + \frac{r'^4}{r^3} p_{,v} + \text{etc.} - \frac{\eta\varrho^2}{c-r'} = h$$

Durch diese Gleichung lassen sich nun die einzelnen Coefficienten $p_n$ bestimmen.

Man setze zunächst $r'=0$ (d. h. verlege den angenommenen Punkt nach $C$ selbst), so wird

$$\frac{-\eta\varrho^2}{c} = h$$

wodurch die Constante $h$ aus vorstehender Gleichung entfernt werden kann. Geschieht diess durch Einsetzen obigen Werthes, so erhält man

$$r' p_{,} + \frac{r'^2}{r} p_{,,} + \frac{r'^3}{r^2} p_{,,,} + \frac{r'^4}{r^3} p_{,v} + \text{etc.} - \frac{\eta\varrho^2 r'}{c(c-r')} = 0$$

Diese Gleichung ist jetzt theilbar durch $r'$, und gibt:

$$p_{,} + \frac{r'}{r} p_{,,} + \frac{r'^2}{r^2} p_{,,,} + \frac{r'^3}{r^3} p_{,v} + \text{etc.} - \frac{\eta\varrho^2}{c(c-r')} = 0$$

Setzt man jetzt wieder $r'=0$, so kommt

$$p_{,} = \frac{\eta\varrho^2}{c^2}$$

Wird dieser Werth in die vorstehende Gleichung eingesetzt, und mit ihrem letzten Gliede vereinigt, so folgt

$$\frac{r'}{r} p_{,,} + \frac{r'^2}{r^2} p_{,,,} + \frac{r'^3}{r^3} p_{,v} + \text{etc.} - \frac{\eta\varrho^2 r'}{c^2(c-r')} = 0$$

Diese Gleichung ist jetzt wieder theilbar durch $r'$, und gibt, wenn sie noch mit $r$ multiplicirt wird

$$p_{,,} + \frac{r'}{r} p_{,,,} + \frac{r'^2}{r^2} p_{,v} + \text{etc.} - \frac{\eta\varrho^2 r}{c^2(c-r')} = 0.$$

Setzt man $r'=0$, so wird

$$p_{,,} = \frac{\eta\varrho^2}{c^2} \cdot \frac{r}{c}$$

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man

$$p_{,,,} = \frac{\eta\varrho^2}{c^2} \cdot \frac{r^2}{c^2}$$

$$p_{,v} = \frac{\eta\varrho^2}{c^2} \cdot \frac{r^3}{c^3}$$

$$p_{v} = \text{etc.}$$

Der Werth des Potentials $V'$ für die obige Annahme ist also

$$V' = \frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{r' + \frac{r'^2}{r}\,\frac{r}{c} + \frac{r'^3}{r^2}\,\frac{r^2}{c^2} + \frac{r'^4}{r^3}\,\frac{r^3}{c^3} + \text{etc.}\right\}$$

Folglich wird der allgemeine Werth von

$$V' = \frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{r'\,T'_1 + \frac{r'^2}{r}\,\frac{r}{c}\,T'_2 + \frac{r'^3}{r^2}\,\frac{r^2}{c^2}\,T'_3 + \frac{r'^4}{r^3}\,\frac{r^3}{c^3}\,T'_4 + \text{etc.}\right\}$$

Hieraus ergeben sich die Werthe

$$P_{,} = \frac{\eta\varrho^2}{c^2}\,T'_1$$

$$P_{,,} = \frac{\eta\varrho^2}{c^2}\,T'_2\,\frac{r}{c} = \frac{\eta\varrho^2}{c^2}\,T'_2 z$$

$$P_{,,,} = \frac{\eta\varrho^2}{c^2}\,T'_3\,\frac{r^2}{c^2} = \frac{\eta\varrho^2}{c^2}\,T'_3 z^2$$

$$P_{,v} = \frac{\eta\varrho^2}{c^2}\,T'_4\,\frac{r^3}{c^3} = \frac{\eta\varrho^2}{c^2}\,T'_4 z^3$$

$$P_{v} = \text{etc.}$$

wenn $\frac{r}{c} = z$ gesetzt wird. Man erhält also

$$Y = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{3T'_1 + 5T'_2 z + 7T'_3 z^2 + 9T'_4 z^3 + \text{etc.}\right\}$$

also genau denselben Werth wie früher; denn anstatt $T'_n$ kann man $T_n$ schreiben, da $T'_n$ sich jetzt auf die Kugeloberfläche bezieht.

### d. Bestimmung der Dicke der elektrischen Schicht an bestimmten Stellen der Kugel.

Aus dem allgemeinen Werthe von $Y$ erhält man die Dicke der elektrischen Schicht in den beiden Punkten $B$ und $B'$, in welchen die Linie $AC$ die Kugeloberfläche schneidet, indem man $\mu = +1$ und $\mu = -1$ setzt. Der Werth von $Y$ im Punkte $B$, wo $\mu = +1$, soll mit $Y_{+1}$, und im Punkte $B'$, wo $\mu = -1$, mit $Y_{-1}$ bezeichnet werden. Es ist dann

$$Y = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{3T_1 + 5T_2 z + 7T_3 z^2 + 9T_4 z^3 + \text{etc.}\right\}$$

$$= -\frac{\eta\varrho^2}{c^2 z}\left\{\frac{1 - z^2}{(1 - 2\mu z + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 1\right\}$$

$$Y_{+1} = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{3 + 5z + 7z^2 + 9z^3 + \text{etc.}\right\}$$

$$= -\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{\frac{2}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z}\right\} = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\,\frac{3-z}{(1-z)^2}.$$

$$Y_{-1} = +\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{3 - 5z + 7z^2 - 9z^3 + \text{etc.}\right\}$$

$$= +\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{\frac{2}{(1+z)^2} + \frac{1}{1+z}\right\} = +\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\,\frac{3+z}{(1+z)^2}.$$

Der Unterschied in den Dicken der elektrischen Schicht, dieselben absolut ohne Rücksicht auf ihr Zeichen genommen, ist

$$\frac{\eta\varrho^2}{c^2} \frac{2z(5-z^2)}{(1-z^2)^2};$$

um so viel ist die Dicke im Punkte $B$ grösser als im Punkte $B'$. Der elektrische Unterschied an beiden Punkten mit Rücksicht auf das Zeichen ist

$$Y_{+1} - Y_{-1} = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2} \frac{2(3+z^2)}{(1-z^2)^2}.$$

Die unmittelbare Einwirkung der in $A$ angehäuften Elektricität hatte auf der Kugel um $C$ die positive und negative Elektricität auf der Oberfläche so vertheilt, dass ihre Grenze mit dem Kreise, in welchem ein von $A$ als Spitze ausgehender Kegel die Kugel berührt, zusammenfiel. Durch die weitere Vertheilung infolge der auf der Kugel erregten Elektricität wird diese Grenze etwas verschoben, und zwar entfernt sie sich von $A$, nähert sich also dem Aequator der Kugel, wenn $B$ und $B'$ als ihre Pole betrachtet werden.

Um die Lage dieser Grenze zu finden, hat man in dem Ausdrucke

$$Y = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2 z}\left(\frac{1-z^2}{(1-2\mu z+z^2)^{\frac{3}{2}}} - 1\right),$$

$Y=0$ zu setzen, und aus der erhaltenen Gleichung dann den Werth von $\mu$ zu entnehmen. Man erhält

$$\mu = \frac{1+z^2-(1-z^2)^{\frac{2}{3}}}{2z}.$$

Es sei z. B. $\frac{r}{c} = z = 0{,}11478$, so wird für die Grenze

$$\cos\vartheta = \mu = 0{,}09573 = \cos 84^0\, 30',$$

während der Kreis, in welchem die Kugel von dem oben erwähnten Kegel berührt wird, liegt auf

$$\cos\vartheta = \mu = \frac{r}{c} = 0{,}11478 = \cos 83^0\, 25'.$$

Wenn $z$ ein kleiner Bruch ist, so lässt sich $\mu$ auch leicht dadurch mit hinreichender Genauigkeit berechnen, dass man die rechte Seite der vorstehenden Gleichung für $\mu$ in eine Reihe entwickelt; man erhält dann

$$\mu = \tfrac{5}{6} z + \tfrac{1}{18} z^3 + \tfrac{2}{81} z^5 + \tfrac{7}{486} z^7 + \text{etc.}$$

Ist z. B. $z=0{,}11478$, so wird das erste Glied $\frac{5}{6}z = 0{,}09565$; das zweite Glied $\frac{1}{18}z^3$ wird $=0{,}00008$. Die Reihe convergirt also sehr schnell, so dass selbst für $z=0{,}2$, d. h. wenn die Entfernung $c$ den Radius der

Kugel $r$ nur 5 Mal übertrifft, das dritte Glied noch keine Einheit der fünften Decimale beträgt.

Mit einer Aenderung in der Entfernung des Punktes $A$ von dem Mittelpunkte der Kugel ändert sich die Lage dieser Gränze. Man erhält die Aenderung derselben, wenn man den Ausdruck

$$\mu = \tfrac{3}{8}\,\frac{r}{c} + \tfrac{1}{18}\,\frac{r^3}{c^3} + \tfrac{2}{81}\,\frac{r^5}{c^5} + \tfrac{7}{486}\,\frac{r^7}{c^7} + \text{etc.}$$

in Bezug auf $c$ differentirt,

$$\frac{d\mu}{dc} = -\frac{1}{c}\left\{\tfrac{3}{8}z + \tfrac{1}{6}z^3 + \tfrac{10}{81}z^5 + \tfrac{49}{486}z^7 + \text{etc.}\right\},$$

die Gränze rückt also mit wachsender Entfernung $c$ nach dem Aequator der Kugel hin.

Bleibt $c$ ungeändert, und wächst der Radius $r$, so ist die Aenderung in der Lage der Gränze

$$\frac{d\mu}{dr} = \frac{1}{c}\left\{\tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{6}z^2 + \tfrac{10}{81}z^4 + \tfrac{49}{486}z^6 + \text{etc.}\right\},$$

sie entfernt sich also mit wachsendem Radius vom Aequator.

### e. Berechnung der auf der Kugel erregten Elektricitätsmengen.

Wenn die Dicke der elektrischen Schicht in jedem Punkte der Kugel und die Lage der Gränze beider Elektricitäten gegeben sind, so lässt sich die Menge der auf derselben vorhandenen Elektricitätsmenge berechnen. Auf einem Elemente $d\omega = -r^2\,d\mu\,d\psi$ der Oberfläche findet sich bei der Dicke $y$ die Elektricitätsmenge $-\frac{yr^2\,d\mu\,d\psi}{4\pi}$. Um im vorliegenden Falle die Menge der negativen Elektricität zu berechnen, muss dieser Ausdruck integrirt werden über den Theil der Kugel, welcher mit negativer Elektricität bedeckt ist; Aehnliches gilt für die Berechnung der positiven.

Die Integration des Ausdrucks

$$-\frac{r^2}{4\pi}\iint y\,d\mu\,d\psi$$

nach $\psi$ lässt sich, da $y$ nicht von $\psi$ abhängt, sogleich ausführen, und die Gränzen sind $\psi = 0$ und $\psi = 2\pi$; man erhält dann

$$-\frac{r^2}{2}\int y\,d\mu.$$

Setzt man für $y$ seinen Werth als geschlossenen Ausdruck, so ist

$$-\int y\,dm = \frac{\eta e^2}{c^2 z_i}\int\left\{\frac{1-z^2}{(1-2\mu\,z+z^2)^{\frac{3}{2}}} - 1\right\}d\mu,$$

$$= \frac{\eta \varrho^2}{c^2 z} \left\{ \frac{1 - z^2}{z \sqrt{1 - 2\mu z + z^2}} - \mu \right\} + \text{Const.}$$

Folglich

$$-\frac{r^2}{2} \int y d\mu = \frac{\eta \varrho^2 r^2}{2 c^2 z} \left\{ \frac{1 - z^2}{z \sqrt{1 - 2\mu z + z^2}} - \mu \right\} + \text{Const.}$$

wo die rechte Seite zwischen den gehörigen Gränzen zu nehmen ist. Die untere Gränze für die negative Elektricität ist $\mu = +1$, die obere Gränze für die positive Elektricität ist $\mu = -1$, die Gränze, an welcher beide zusammenstossen, ist $\mu = \frac{1 + z^2 - (1 - z^2)^{\frac{2}{3}}}{2z}$.

Der Werth des obigen unbestimmten Integrals für $\mu = +1$ wird

$$\frac{\eta \varrho^2 r^2}{2 c^2 z^2} = \frac{\eta \varrho^2}{2},$$

weil

$$\frac{r^2}{c^2} = z^2$$

ist.

Genau denselben Werth erhält das Integral an der Gränze $\mu = -1$. Diese beiden Werthe sind also unabhängig von $c$ und $r$.

Um den Werth des Integrals auf der Gränze beider Elektricitäten zu erhalten, hat man zu setzen

$$\mu = \frac{1 + z^2 - (1 - z^2)^{\frac{2}{3}}}{2z}$$

oder

$$\sqrt{1 - 2\mu z + z^2} = (1 - z^2)^{\frac{1}{3}}$$

so dass man den Werth des Integrals an dieser Gränze erhält,

$$\frac{\eta \varrho^2}{4} \left\{ 3 (1 - z^2)^{\frac{2}{3}} - (1 + z^2) \right\}$$

oder

$$\frac{\eta \varrho^2}{2} \left\{ 1 - 3\nu z + z^2 \right\},$$

wenn $\nu$ den Cosinus des Winkels für die Gränze beider elektrischen Zonen bedeutet, indem für denselben die Gleichung gilt

$$(1 - z^2)^{\frac{2}{3}} = 1 - 2\nu z + z^2.$$

Entwickelt man $(1 - z^2)^{\frac{2}{3}}$ in eine Reihe nach $z$, so wird der in Rede stehende Werth des Integrals

$$\frac{\eta \varrho^2}{4} \left\{ 2 - 3z^2 - \tfrac{1}{3} z^4 - \tfrac{4}{27} z^6 - \tfrac{7}{81} z^8 - \text{etc.} \right\}$$

$$= \frac{\eta \varrho^2}{2} \left\{ 1 - \tfrac{3}{2} z^2 - \tfrac{1}{6} z^4 - \tfrac{2}{27} z^6 - \tfrac{7}{162} z^8 - \text{etc.} \right\}.$$

Die Menge der negativen Elektricität ist also

$$\frac{\eta\varrho^2}{4}\left\{3(1-z^2)^{\frac{1}{2}}-(1+z^2)\right\}-\frac{\eta\varrho^2}{2}$$
$$=\frac{3\eta\varrho^2}{4}\left\{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}-\left(1+\frac{z^2}{3}\right)\right\}$$
$$=-\frac{3\eta\varrho^2z^2}{4}\left\{1+\frac{1}{9}z^2+\frac{4}{81}z^4+\frac{7}{243}z^6+\text{etc.}\right\}$$

oder durch $\nu$ ausgedrückt,

$$=-\frac{\eta\varrho^2z}{2}(3\nu-z).$$

Dieselben Werthe nur mit entgegengesetztem Vorzeichen ergeben sich für die Menge der positiven Elektricität.

Wollte man wissen, welche Menge positiver Elektricität auf der hintern Halbkugel von $\mu=0$ bis $\mu=-1$ enthalten, so hätte man das Integral zwischen diesen Gränzen zu nehmen, und fände

$$\frac{\eta\varrho^2}{2}\left(1-\frac{1-z^2}{\sqrt{1+z^2}}\right)=\frac{3}{4}\eta\varrho^2z^2\left\{1-\frac{7}{12}z^2+\frac{11}{24}z^4-\frac{33}{88}z^6+\text{etc.}\right\},$$

so dass die Menge der noch auf der vordern Kugelhälfte befindlichen positiven Elektricität beträgt

$$\frac{7}{32}\eta\varrho^2z^4\left\{1-\frac{33}{88}z^2+\text{etc.}\right\}.$$

also nahe $\frac{1}{4}\eta\varrho^2z^4$.

**f. Vertheilung der Elektricität auf einer Kugel, wenn sie schon vor ihrer Annäherung an die elektrische Kugel mit Elektricität geladen war.**

Bisher war die Kugel um $C$ vor ihrer Annäherung an die elektrische Kugel um $A$ als gänzlich unelektrisch angenommen worden. Wenn dieselbe aber vor dieser Annäherung schon mit einer bestimmten Menge positiver oder negativer Elektricität geladen ist, so lassen sich die Bestimmungen über die Dicke der elektrischen Schicht auf den verschiedenen Punkten der Kugel doch in ganz ähnlicher Weise wie vorhin ausführen, nur muss jedes Mal die Menge der anfänglich schon vorhanden gewesenen Elektricität in Betracht gezogen werden. Gesetzt es sei der Kugel um $C$ zuvor die Elektricitätsmenge $y_0r^2$ mitgetheilt worden, so hat dieselbe auf der isolirten für sich allein gedachten Kugel überall die Dicke $y_0$. Wenn nun diese Kugel der in $A$ befindlichen Elektricität genähert wird, so wirkt die in $A$ befindliche Elektricität grade in derselben Weise auf die Kugel um $C$ vertheilend, als wenn die letztere zuvor unelektrisch gewesen wäre. Man erhält daher die Dicke der elektrischen Schicht auf der Kugel um $C$ durch Addition der ursprünglichen Elektricität zu der durch Vertheilung neu hinzugekommenen.

Bezeichnet $y$ diese Dicke, so ist

$$y = y_0 - \frac{\eta\varrho^2}{c^2 z}\left\{\frac{1 - z^2}{(1 - 2\mu z + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 1\right\}$$

oder

$$y = y_0 - \frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{3T_1 + 5zT_2 + 7z^2T_3 + \text{etc.}\right\}.$$

Diess beachtend lassen sich alle auf eine anfängliche Elektricität der Kugel um $C$ Bezug habende Aufgaben ohne Schwierigkeit lösen; so die Aufgabe: Die Elektricitätsmenge zu bestimmen, welche einer Kugel zuvor mitgetheilt werden muss, damit bei einer gegebenen Annäherung an eine im Punkte $A$ angehäufte Elektricitätsmenge der am nächsten oder am entferntesten liegende Punkt der Kugel oder ein mit ihrem Aequator paralleler Kreis nicht elektrisch werde, oder auch eine elektrische Schicht von gegebener Dicke besitze. Man könnte z. B. verlangen, dass unter gegebenen Umständen der Punkt $B'$, welcher am weitesten vom Punkte $A$ absteht, nach der Annäherung an die Kugel $A$ bis auf $c$, keine Elektricität zeige. Wenn die Kugel zuvor nicht elektrisch ist, so wurde oben die Dicke der elektrischen Schicht im Punkte $B'$ gefunden

$$Y_{-1} = + \frac{\eta\varrho^2}{c^2}\,\frac{3 + z}{(1 + z)^2}.$$

Theilt man nun der Kugel zuvor die Elektricitätsmenge

$$-\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\,\frac{3 + z}{(1 + z)^2}\,r^2$$

mit, so erhält hierdurch jeder Punkt ihrer Oberfläche eine Schicht von der Dicke

$$-\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\,\frac{3 + z}{(1 + z)^2},$$

welche dann bei der Annäherung an die in $A$ befindliche Elektricität $\eta\varrho^2$ durch die oben mit $Y_{-1}$ bezeichnete positive Schicht von gleicher Dicke im Punkte $B'$ völlig neutralisirt wird, so dass dieser Punkt gänzlich unelektrisch ist.

### 2. *Dicke der elektrischen Schicht auf zwei einander genäherten Kugeln, die aus einer leitenden Masse bestehen.*

Bisher war die Kugel um $A$, auf welcher von Anfang an die Elektricitätsmenge $\eta\varrho^2$ in überall gleichförmiger Dicke $\eta$ angehäuft war, als ein Nichtleiter betrachtet worden. Infolge ihrer Elektricität übte sie einen vertheilenden Einfluss auf die Kugel um $C$ aus, (den wir im Vorhergehenden näher betrachtet haben,) ohne jedoch selbst wegen ihrer nicht leitenden Substanz in irgend einer Weise eine Aenderung in der

Anordnung der Elektricität auf ihrer Oberfläche zu erleiden. Wenn nun aber die Kugel um $A$, nachdem sie die besprochene Vertheilung auf der Kugel um $C$ erregt hat, plötzlich leitend würde, so müsste die auf der Kugel um $C$ erregte Elektricität augenblicklich ihre Rückwirkung auf die Kugel um $A$ äussern, und auf derselben eine neue Vertheilung hervorrufen.

**a. Rückwirkung der ursprünglich nicht elektrischen, nur durch Vertheilung erregten Kugel auf die anfänglich elektrische.**

Um die Berechnung der von der Kugel um $C$ auf die Kugel um $A$ erzeugten Rückwirkung auf die einfachste Weise durchzuführen, wollen wir uns die Kugel um $C$, nachdem auf ihr durch Vertheilung von Seiten der in $A$ befindlichen Elektricität eine elektrische Schicht von der Dicke

$$y = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2 z}\left\{\frac{1-z^2}{(1-2\mu z+z^2)^{\frac{3}{2}}}-1\right\}$$

hervorgerufen ist, plötzlich in einen Nichtleiter verwandelt denken, so dass keine äussere Einwirkung die Anordnung der Elektricität auf ihrer Oberfläche abzuändern vermag. Die Kugel um $A$ war von Anfang an mit einer elektrischen Schicht von der überall gleichen Dicke $\eta$ bedeckt. Vorhin sahen wir, dass man die Dicke der elektrischen Schicht durch Vertheilung auf einer zuvor schon elektrischen Kugel erhält durch Addition der Dicke der ursprünglich vorhandenen und der erst durch die Vertheilung erregten. Um die Ausdrücke zu vereinfachen, wollen wir daher die Kugel um $A$ uns jetzt völlig unelektrisch vorstellen, und dann der Kugel um $C$, welche die Elektricität auf die angegebene Weise angeordnet enthält, bis auf die Entfernung $c$ genähert denken.

Am kürzesten wird das schon oben (S. 458 ff.) angewandte Verfahren uns jetzt zum Ziele führen, da dasselbe gleich die ganze auf der Kugel um $A$ entstehende Vertheilung liefert. Wir müssen also ausgehen von der Bedingungsgleichung, dass die Wirkung der auf der Kugel um $C$ vorhandenen und der auf der Kugel um $A$ durch dieselbe hervorgerufenen Elektricität auf jeden Punkt im Innern der Kugel um $A$ gleich Null ist, oder was dasselbe sagt, dass die Summe der Potentiale der beiden genannten Elektricitätsmengen auf jeden Punkt im Innern der Kugel um $A$ eine constante Grösse ist. Das Potential der auf der Kugel um $C$ angehäuften Elektricität in Bezug auf einen äussern Punkt sei $V$, das Potential der auf der Kugel um $A$ erregten in Bezug auf einen innern Punkt sei $v'$, so ist die Bedingungsgleichung zur Bestimmung der letztern Elek-

tricität

$$V + v' = g,$$

wenn beide Potentiale sich auf einen Punkt im Innern der Kugel um $A$, der um $r'$ von $C$, und um $\varrho'$ von $A$ absteht, beziehen, und $g$ eine constante Grösse darstellt. Der Werth von $V$ ist aus dem Vorhergehenden vollständig bekannt; es ist für $C$ als Anfangspunkt der Coordinaten

$$V = \frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{T_1'\frac{r^3}{r'^2} + T_2' z\frac{r^4}{r'^3} + T_3' z^2\frac{r^5}{r'^4} + \text{etc.}\right\},$$

wo $T_n'$ die bekannten Functionen bezeichnet. Für das Potential $v'$ ist aber nur die allgemeine Form bekannt; da die Kugel um $A$ keine anfängliche Elektricität enthalten soll, so ist für $A$ als Anfangspunkt der Coordinaten

$$v' = P_, \varrho' + P_{,,}\frac{\varrho'^2}{\varrho} + P_{,,,}\frac{\varrho'^3}{\varrho^2} + \text{etc.}$$

Gerade wie früher kann man aber zunächst den Punkt $r'$, $\vartheta'$, $\psi'$ auf die Verbindungslinie beider Mittelpunkte zwischen $K$ und $A$ legen, und die beiden Potentiale werden dann, da alle $T_n = 1$, und die $P_n$ in $p_n$ übergehen,

$$V = \frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{\frac{r^3}{r'^2} + z\frac{r^4}{r'^3} + z^2\frac{r^5}{r'^4} + \text{etc.}\right\}$$

$$v' = p_, \varrho' + p_{,,}\frac{\varrho'^2}{\varrho} + p_{,,,}\frac{\varrho'^3}{\varrho^2} + \text{etc.}$$

Um den Ausdruck für $V$, für welchen noch $C$ der Anfangspunkt der Coordinaten ist, auf $A$ als Anfangspunkt zu beziehen, hat man, da

$$r' + \varrho' = c$$

nur anstatt $r'$ seinen Werth $c - \varrho'$ zu setzen. Die obige Bedingungsgleichung wird dann

$$p_, \varrho' + p_{,,}\frac{\varrho'^2}{\varrho} + p_{,,,}\frac{\varrho'^3}{\varrho^2} + \text{etc.} + \frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{\frac{r^3}{(c-\varrho')^2} + z\frac{r^4}{(c-\varrho')^3} + z^2\frac{r^5}{(c-\varrho')^4} + \text{etc.}\right\} = g.$$

Bezeichnet man $\frac{\varrho}{c}$ mit $\zeta$, wo $\varrho$ der Radius der Kugel um $A$, und setzt im vorstehenden Ausdrucke $\varrho' = 0$, so ist

$$+ \eta\zeta^2\left\{\frac{r^3}{c^2} + z\frac{r^4}{c^3} + z^2\frac{r^5}{c^4} + \text{etc.}\right\} = g.$$

Dieser Werth von $g$ in die vorstehende Gleichung eingesetzt und mit dem zweiten Theile der linken Seite vereinigt, gibt

$$p_, \varrho' + p_{,,}\frac{\varrho'^2}{\varrho} + p_{,,,}\frac{\varrho'^3}{\varrho^2} + \text{etc.} + \eta\zeta^2\left\{\frac{r^3(2c\varrho' - \varrho'^2)}{c^2(c-\varrho')^2} + \frac{zr^4(3c^2\varrho' - 3c\varrho'^2 + \varrho'^3)}{c^3(c-\varrho')^3} + \text{etc.}\right\} = 0,$$

eine durch $\varrho'$ theilbare Gleichung; so dass

$$p_{\prime} + p_{\prime\prime}\frac{\varrho'}{\varrho} + p_{\prime\prime\prime}\frac{\varrho'^2}{\varrho^2} + \text{etc.} + \eta\zeta^3\left\{\frac{r^3(2c-\varrho')}{c^3(c-\varrho')^2} + \frac{zr^4(3c^2-3c\varrho'+\varrho'^2)}{c^3(c-\varrho')^3} + \text{etc.}\right\} = 0.$$

Setzt man jetzt $\varrho' = 0$, so wird, wenn man überall $z$ statt $\frac{r}{c}$ schreibt,

$$p_{\prime} = -\eta\zeta^2 z^3\{2 + 3z^2 + 4z^4 + \text{etc.}\}.$$

Wird dieser Werth eingesetzt und mit dem Gliede in der Klammer verbunden, so kommt

$$p_{\prime\prime}\frac{\varrho'}{\varrho} + p_{\prime\prime\prime}\frac{\varrho'^2}{\varrho^2} + \text{etc.} + \eta\zeta^2 z^3\left\{\frac{3c\varrho'-2\varrho'^2}{(c-\varrho')^2} + z^2\frac{(6c^2\varrho'-8c\varrho'^2+3\varrho'^3)}{(c-\varrho')^3} + \text{etc.}\right\} = 0.$$

Nach Division durch $\frac{\varrho'}{\varrho}$ erhält man

$$p_{\prime\prime} + p_{\prime\prime\prime}\frac{\varrho'}{\varrho} + \text{etc.} + \eta\zeta^2 z^3\varrho\left\{\frac{3c-2\varrho'}{(c-\varrho')^2} + z^2\frac{(6c^2-8c\varrho'+3\varrho'^2)}{(c-\varrho')^3} + \text{etc.}\right\} = 0.$$

Indem man $\varrho' = 0$ setzt, findet sich

$$p_{\prime\prime} = -\eta\zeta^2 z^3\zeta\{3 + 6z^2 + \text{etc.}\}.$$

Fährt man so fort, so wird

$$p_{\prime\prime\prime} = -\eta\zeta^2 z^3\zeta^2\{4 + 10z^2 + \text{etc.}\}.$$

$$p_{IV} = \text{etc.}$$

In jedem folgenden Coefficienten steigt der Exponent von $\zeta$ um 1, und die Reihen innerhalb der Klammern sind die figurirten Zahlen, multiplicirt mit den Potenzen von $z$. Diese Reihen lassen sich daher leicht summiren, und man erhält

$$p_{\prime} = -\eta\zeta^2 z\left[\frac{1}{(1-z^2)^2} - 1\right]$$

$$p_{\prime\prime} = -\eta\zeta^2 z\zeta\left[\frac{1}{(1-z^2)^3} - 1\right]$$

$$p_{\prime\prime\prime} = -\eta\zeta^2 z\zeta^2\left[\frac{1}{(1-z^2)^4} - 1\right]$$

$$p_{IV} = \text{etc.}$$

Bezeichnet $\varrho'$, $\vartheta'$, $\psi'$ einen Punkt, der jetzt nicht mehr auf der Linie $AK$ liegt, so erhält man die Coefficienten des Potentials in Bezug auf diesen, ähnlich wie früher

$$P_{\prime} = -\eta\zeta^2 z\, T_1'\left[\frac{1}{(1-z^2)^2} - 1\right]$$

$$P_{\prime\prime} = -\eta\zeta^2 z\zeta\, T_2'\left[\frac{1}{(1-z^2)^3} - 1\right]$$

$$P_{\prime\prime\prime} = -\eta\zeta^2 z\zeta^2 T_3'\left[\frac{1}{(1-z^2)^4} - 1\right]$$

$$P_{IV} = \text{etc.}$$

Wird mit $\eta'$ die Dicke der durch die in Rede stehende Vertheilung auf der Kugel um $A$ erregten elektrischen Schicht bezeichnet, so ist nach dem Frühern (S. 460)

$$\eta' = -\{3P_{\prime} + 5P_{\prime\prime} + 7P_{\prime\prime\prime} + \text{etc.}\}.$$

Es wird also, wenn man $T_n$ statt $T_n'$ schreibt, weil auch $T_n'$ sich jetzt auf die Kugeloberfläche bezieht:

$$\eta' = \eta\zeta^2 z\left\{3T_1\left(\frac{1}{(1-z^2)^3}-1\right)+5T_2\zeta\left(\frac{1}{(1-z^2)^4}-1\right)+7T_3\zeta^2\left(\frac{1}{(1-z^2)^5}-1\right)+\text{etc.}\right\}$$

$$= \frac{\eta\zeta^2 z}{(1-z^2)^3}\left[3T_1+5T_2\frac{\zeta}{(1-z^2)}+7T_3\frac{\zeta^2}{(1-z^2)^2}+\text{etc.}\right]-\eta\zeta^2 z\left[3T_1+5\zeta T_2+7\zeta^2 T_3+\text{etc.}\right]$$

oder wenn man $\frac{\zeta}{1-z^2} = x$ setzt,

$$\eta' = \frac{\eta\zeta^2 z}{(1-z^2)^3}\left[3T_1+5T_2 x+7T_3 x^2+\text{etc.}\right]-\eta\zeta^2 z\left[3T_1+5\zeta T_2+7\zeta T_3+\text{etc.}\right]$$

Die Summen beider Reihen erhält man augenblicklich durch Vergleichung mit der frühern Reihe, denen sie in der Form ganz gleich sind. Es wird

$$\eta' = \frac{\eta\zeta^2 z}{(1-z^2)^3}\,\frac{1}{\frac{\zeta}{(1-z^2)}}\left[\frac{1-\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^2}{\left\{1-2\mu\frac{\zeta}{1-z^2}+\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}-1\right]-\eta\zeta^2 z\frac{1}{\zeta}\left[\frac{1-\zeta^2}{(1-2\mu\zeta+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}-1\right]$$

Um die Dicke der elektrischen Schicht zu finden, wie sie mit Hinzufügung der ursprünglich auf der Kugel um $A$ vorhandenen Elektricitätsmenge sich darstellt, hat man nur zu dem vorstehenden Ausdrucke für $\eta'$ noch $\eta$ zu addiren; sie ist also

$$\eta + \eta'.$$

**b. Weitere Rückwirkungen der elektrischen Vertheilungen der Kugeln auf einander.**

Nehmen wir jetzt an, dass die soeben mit $\eta'$ bezeichnete Vertheilung der Elektricität auf der Kugel um $A$ befestigt sei, dass diese Oberfläche keine weitere Elektricität enthalte und dass auch die andere Kugel um $C$ davon befreit sei, so können wir ganz auf dieselbe Weise wie zuvor die durch diese Elektricität von der Dicke $\eta'$ auf der Kugel um $C$ erregte Vertheilung bestimmen. Das Potential der auf der Kugel um $A$ befindlichen Elektricität auf einen äussern Punkt sei $v$, das Potential der auf der Kugel um $C$ erregten auf einen innern Punkt sei $V'$. Es werde der Punkt, in Bezug auf welchen das Potential genommen werden soll, zunächst auf die Linie $CB$ gelegt, und er stehe von $C$ um $r'$, von $A$ um $\varrho'$ ab, so ist, wenn $A$ als Anfangspunkt genommen wird, nach dem Vorhergehenden $v$ bekannt,

$$v = -\eta\zeta^2 z\left[\left(\frac{1}{(1-z^2)^3}-1\right)\frac{\varrho^3}{\varrho'^2}+\left(\frac{1}{(1-z^2)^4}-1\right)\frac{\varrho^4}{\varrho'^3}\zeta+\left(\frac{1}{(1-z^2)^5}-1\right)\frac{\varrho^5}{\varrho'^4}\zeta^2+\text{etc.}\right].$$

Für $V'$ erhält man die Form, wenn $C$ als Anfangspunkt der Coordinaten genommen wird

$$V' = p_{,}r'+p_{,,}\frac{r'^2}{r}+p_{,,,}\frac{r'^3}{r^2}+\text{etc.}$$

Wird $v$ auf $C$ als Anfangspunkt bezogen, so ist $\varrho' = c - r'$ zu setzen, und wenn $h'$ eine constante Grösse bezeichnet, lautet die Bedingungsgleichung

$$p_{,}r' + p_{,,}\frac{r'^2}{r} + p_{,,,}\frac{r'^3}{r^2} + \text{etc.} - \eta_{,}\zeta^2 z\left[\left(\frac{1}{(1-z^2)^2} - 1\right)\frac{\varrho^2}{\varrho'^2} + \left(\frac{1}{(1-z^2)^3} - 1\right)\frac{\varrho^3}{\varrho'^3}\zeta \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{(1-z^2)^4} - 1\right)\frac{\varrho^4}{\varrho'^4}\zeta^2 + \text{etc.}\right] = h'.$$

Man verfährt nun ganz so wie früher, bestimmt $h'$, indem man $r' = 0$ setzt, führt den Werth von $h'$ ein, wodurch die Gleichung durch $r'$ theilbar wird, bestimmt $p_{,}$, u. s. w. Man erhält dann

$$p_{,} = \eta_{,}\zeta^2 z\, \zeta\left[\frac{1}{1-z^2}\left\{\frac{1}{\left(1 - \frac{\zeta^2}{1-z^2}\right)^2} - 1\right\} - \left\{\frac{1}{(1-\zeta^2)^2} - 1\right\}\right]$$

$$p_{,,} = \eta_{,}\zeta^2 z\, \zeta^2\left[\frac{1}{1-z^2}\left\{\frac{1}{\left(1 - \frac{\zeta^2}{1-z^2}\right)^3} - 1\right\} - \left\{\frac{1}{(1-\zeta^2)^3} - 1\right\}\right]$$

$$p_{,,,} = \quad \text{etc.}$$

Um die allgemeinen Werthe $P_n$ zu erhalten, wenn der Punkt, auf welchen sich das Potential $V'$ bezieht, nicht auf der Linie $CB$ liegt, hat man nur die vorstehenden Ausdrücke mit den entsprechenden Werthen von $T_n$ zu multipliciren. Da nun, wenn $y'$ die Dicke der elektrischen Schicht, welche durch diese letzte Vertheilung auf der Kugel um $C$ erzeugt ist, bedeutet

$$y' = -(3P_{,} + 5P_{,,} + 7P_{,,,} + \text{etc.}),$$

so erhält man

$$y' = -\eta_{,}\zeta^2 z\zeta\left[\begin{array}{l} \frac{1}{1-z^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}\right)^2}\left\{3T_1 + 5T_2\frac{z}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}} + 7T_3\left(\frac{z}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}}\right)^2 + \text{etc.}\right\}\right. \\ \hfill \left. - \left\{3T_1 + 5T_2 z + 7T_3 z^2 + \text{etc.}\right\}\right] \\ - \left[\frac{1}{(1-\zeta^2)^2}\left\{3T_1 + 5T_2\frac{z}{1-\zeta^2} + 7T_3\left(\frac{z}{1-\zeta^2}\right)^2 + \text{etc.}\right\}\right. \\ \hfill \left. - \left\{3T_1 + 5T_2 z + 7T_3 z^2 + \text{etc.}\right\}\right] \end{array}\right]$$

Diese Reihen lassen sich grade wie die frühern summiren.

Bezeichnet man

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1-x^2}{(1-2\mu x + x^2)^{\frac{3}{2}}} - 1\right)$$

mit $\psi x$, so lassen sich die bisher für die Dicke der verschiedenen elektrischen Schichten erhaltenen Ausdrücke kurz so schreiben:

$$\eta = +\eta_{,}$$
$$y = -\eta_{,}\zeta^2\,\psi z$$
$$\eta' = +\eta_{,}\zeta^2 z\left[\frac{1}{(1-z^2)^2}\,\psi\,\frac{\zeta}{1-z^2} - \psi\zeta\right]$$

$$y' = -\eta\zeta^2 z\zeta\left[\frac{1}{1-z^2}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}\right)^2}\psi\,\frac{z}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}} - \psi z\right\} - \left\{\frac{1}{(1-\zeta^2)^2}\psi\,\frac{z}{1-\zeta^2} - \psi z\right\}\right]$$

$$\eta'' = +\eta\zeta^2 z\zeta z\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1-z^2}\left\{\frac{1}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{z^2}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}}\right)^2}\psi\,\frac{\zeta}{1-\frac{z^2}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}}} - \psi\zeta\right]\right.\\ \qquad\qquad\left. - \left[\frac{1}{(1-z^2)^2}\psi\,\frac{\zeta}{1-z^2} - \psi\zeta\right]\right\}\\ - \left\{\frac{1}{1-\zeta^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}\right)^2}\psi\,\frac{\zeta}{1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}} - \psi\zeta\right] - \left[\frac{1}{(1-z^2)^2}\psi\,\frac{\zeta}{1-z^2} - \psi\zeta\right]\right\}\end{array}\right.$$

$y'' =$ etc.

Man sieht, dass wenn man mit $\eta''$, $\eta'''$ u. s. f. die fernern Vertheilungen auf der Kugel um $A$, mit $y''$, $y'''$ u. s. f. dieselben auf der Kugel um $C$ bezeichnet, die Werthe derselben sich durch Fortsetzung dieser Reihe, deren Gesetz offen vorliegt, erhalten lassen.

**c. Dicke der elektrischen Schicht, wenn zwei elektrische Kugeln aus einer leitenden Masse einander genähert werden.**

Die vorstehenden Entwickelungen können auch dienen, um die Vertheilung der Elektricität auf zwei einander genäherten leitenden Kugeln, welche beide schon vor ihrer Annäherung elektrisch waren, zu bestimmen. Die Elektricität der ersten Kugel wirkt zunächst auf die zweite, die zweite infolge davon rückwärts auf die erste, die erste infolge davon wieder rückwärts auf die zweite u. s. f.; ebenso wirkt die schon zu Anfang vorhanden gewesene Elektricität der zweiten Kugel auf die erste, die erste infolge davon rückwärts auf die zweite, die zweite infolge davon wieder rückwärts auf die erste u. s. f., bis zuletzt ein solcher Zustand in der Vertheilung der Elektricität auf beiden Kugeln eingetreten ist, dass die Wirkung derselben auf alle Punkte im Innern jeder der beiden Kugeln $= 0$ ist. Man erhält dann die Dicke der elektrischen Schicht, welche sich im Zustande des Gleichgewichts auf jeder der beiden Kugeloberflächen befindet, wenn man für jeden Punkt derselben zu der anfänglich vorhandenen die gesammte später durch Vertheilung auf derselben Oberfläche erregte addirt. Es seien die beiden Kugeln wieder die Kugeln um $A$ und $C$, erstere vom Halbmesser $\varrho$, letztere vom Halbmesser $r$. Die Entfernung ihrer Mittelpunkte sei $c$; die überall gleiche Dicke der ursprünglich vorhandenen Schicht auf der Kugel um $A$ sei $\eta$, die ebenfalls überall gleiche Dicke der ursprünglich vorhandenen Schicht auf der Kugel um $C$ sei $y$, so dass erstere die Elektricitätsmenge $\eta\varrho^2$, letztere $yr^2$ besitzt.

Die Dicke der elektrischen Schicht auf der Kugel um $A$, während sie sich in der Nähe der Kugel um $C$ befindet, wird dann

$$\begin{aligned}
&+\eta \\
&-yz^2\psi\zeta \\
&+\eta\zeta^2 z\left[\frac{1}{(1-z^2)^2}\,\psi\,\frac{\zeta}{1-z^2}-\psi\zeta\right] \\
&-yz^2\zeta z\left[\frac{1}{1-\zeta^2}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}\right)^2}\,\psi\,\frac{\zeta}{1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}}-\psi\zeta\right\}-\left\{\frac{1}{(1-z^2)^2}\,\psi\,\frac{\zeta}{1-z^2}-\psi\zeta\right\}\right] \\
&+\eta\zeta^2 z\zeta z\left[\begin{array}{l}\frac{1}{1-z^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}\right)}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{z^2}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}}\right)^2}\,\psi\,\frac{\zeta}{1-\frac{z^2}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}}}-\psi\zeta\right\}\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left.-\left\{\frac{1}{(1-z^2)^2}\,\psi\,\frac{\zeta}{1-z^2}-\psi\zeta\right\}\right] \\ -\left[\frac{1}{1-\zeta^2}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}\right)^2}\,\psi\,\frac{\zeta}{1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}}-\psi\zeta\right\}-\left\{\frac{1}{(1-z^2)^2}\,\psi\,\frac{\zeta}{1-z^2}-\psi\zeta\right\}\right]\end{array}\right] \\
&-\text{ etc. etc.}
\end{aligned}$$

Die Dicke der elektrischen Schicht auf der Kugel um $C$ erhält man analog

$$\begin{aligned}
&+y \\
&-\eta\zeta^2\psi z \\
&+yz^2\zeta\left[\frac{1}{(1-\zeta^2)^2}\,\psi\,\frac{z}{1-\zeta^2}-\psi z\right] \\
&-\eta\zeta^2 z\zeta\left[\frac{1}{1-z^2}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}\right)^2}\,\psi\,\frac{z}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}}-\psi z\right\}-\left\{\frac{1}{(1-\zeta^2)^2}\,\psi\,\frac{z}{1-\zeta^2}-\psi z\right\}\right] \\
&+\eta z^2\zeta z\zeta\left[\begin{array}{l}\frac{1}{1-\zeta^2}\left[\frac{1}{1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{\zeta^2}{1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}}\right)^2}\,\psi\,\frac{z}{1-\frac{\zeta^2}{1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}}}-\psi z\right\}\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left.-\left\{\frac{1}{(1-\zeta^2)^2}\,\psi\,\frac{z}{1-\zeta^2}-\psi z\right\}\right] \\ -\left[\frac{1}{1-z^2}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}\right)^2}\,\psi\,\frac{z}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}}-\psi z\right\}-\left\{\frac{1}{(1-\zeta^2)^2}\,\psi\,\frac{z}{1-\zeta^2}-\psi z\right\}\right]\end{array}\right] \\
&-\text{ etc. etc.}
\end{aligned}$$

Da in den obigen Ausdrücken für die Dicke der elektrischen Schicht jede vorhergehende Reihe in jeder nachfolgenden wiederkehrt, so lassen sich dieselben kürzer und für die Berechnung übersichtlicher auf folgende Weise schreiben.

Kugel um $A$. — $\psi\zeta$ werde gesetzt $=\alpha$, der Ausdruck innerhalb der Klammern in der nachstehenden dritten Reihe $=\beta$, innerhalb der Klammern in der vierten $=\gamma$ u. s. f. Dann ist die Dicke der elektrischen Schicht

$$\begin{aligned}
&+\eta \\
&-yz^2\psi\zeta \\
&+\eta\zeta^2 z\left\{\frac{1}{(1-z^2)^2}\,\psi\,\frac{\zeta}{1-z^2}-\alpha\right\}
\end{aligned}$$

$$-yz^2\zeta z\left[\frac{1}{1-\zeta^2}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}\right)^2}\psi\frac{\zeta}{1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}}-\alpha\right\}-\beta\right]$$

$$+\eta\zeta^2 z\zeta z\left[\left[\frac{1}{1-z^2}\left[\frac{1}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{z^2}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}}\right)^2}\psi\frac{\zeta}{1-\frac{z^2}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}}}-\alpha\right\}-\beta\right]-\gamma\right]\right]$$

— etc. etc.

Kugel um $C$. Bezeichnen $a$, $b$, $c$ u. s. f. Analoges für diese Kugel so ist die Dicke der elektrischen Schicht

$$+y$$

$$-\eta\zeta^2\psi z$$

$$+yz^2\zeta\left\{\frac{1}{(1-\zeta^2)^2}\psi\frac{z}{1-\zeta^2}-a\right\}$$

$$-\eta\zeta^2 z\zeta\left[\frac{1}{1-z^2}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}\right)^2}\psi\frac{z}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}}-a\right\}-b\right]$$

$$+yz^2\zeta z\zeta\left[\left[\frac{1}{1-\zeta^2}\left[\frac{1}{1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{\zeta^2}{1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}}\right)^2}\psi\frac{z}{1-\frac{\zeta^2}{1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}}}-a\right\}-b\right]-c\right]\right]$$

— etc. etc.

### d. Beweis der Richtigkeit des eingeschlagenen Verfahrens.

Die Richtigkeit der gewonnenen Resultate lässt sich ohne weitläufige Entwickelungen nachweisen, indem man unmittelbar zeigen kann, dass die vorstehenden Dicken der elektrischen Schichten dem als richtig anerkannten Princip, dass die Wirkung auf alle Punkte im Innern jeder der beiden Kugeln gleich Null sein muss, Genüge leisten. Bezeichnen wir die unter einander stehenden Dicken der elektrischen Schichten auf der Kugel um $A$ mit 1, 2, 3, 4, 5 etc., und auf der Kugel um $C$ mit I, II, III, IV, V etc., so ist II so aus 1 bestimmt, dass ihre Wirkungen auf jeden Punkt der Kugel um $C$ sich aufheben, dasselbe gilt für I und 2 in Bezug auf die Kugel $A$; Aehnliches gilt für II und 3, 2 und III, 3 und IV, III und 4 u. s. f.

In Bezug auf jeden Punkt im Innern der Kugel um $C$ hebt sich also auf

1 mit II,
2 mit III,
3 mit IV
etc.

In Bezug auf jeden Punkt im Innern der Kugel um $A$ hebt sich auf

I mit 2,
II mit 3,
III mit 4
etc.

Für $A$ bleibt nur die Schicht $\eta$, und für $C$ die Schicht $y$ übrig; aber die Schicht von gleichförmiger Dicke $\eta$ auf der Kugel $A$ hebt sich in ihrer Wirkung auf jeden Punkt in ihrem Innern von selbst auf; dasselbe gilt auch von der überall gleich dicken Schicht $y$ auf der Kugel um $C$. Folglich genügen die aufgestellten Ausdrücke für die Dicken der elektrischen Schicht dem angeführten Princip.

Um wenigstens ein Beispiel der Rechnung zu geben, will ich das von Poisson in seiner zweiten Abhandlung S. 196 gewählte Beispiel nehmen. Es sei $\rho = 1$, $r = 3$, $c = 5$; die Kugel um $A$ sei anfänglich mit der Elektricitätsmenge $\eta\rho^2$ und die Kugel um $C$ mit der Elektricitätsmenge $yr^2$ geladen. Dann ist

$$\zeta = \tfrac{3}{5} \qquad\qquad z = \tfrac{1}{5}$$

$$\frac{1}{1-\zeta^2} = \tfrac{25}{16} \qquad\qquad \frac{1}{1-z^2} = \tfrac{25}{24}$$

$$\frac{z}{1-\zeta^2} = \tfrac{5}{16} \qquad\qquad \frac{\zeta}{1-z^2} = \tfrac{5}{8}$$

$$\frac{1}{1-\cfrac{z^2}{1-\zeta^2}} = \tfrac{16}{15} \qquad\qquad \frac{1}{1-\cfrac{\zeta^2}{1-z^2}} = \tfrac{8}{5}$$

$$\frac{\zeta}{1-\cfrac{z^2}{1-\zeta^2}} = \tfrac{16}{25} \qquad\qquad \frac{z}{1-\cfrac{\zeta^2}{1-z^2}} = \tfrac{8}{25}$$

$$\frac{1}{1-\cfrac{\zeta^2}{1-\cfrac{z^2}{1-\zeta^2}}} = \tfrac{375}{231} \qquad\qquad \frac{1}{1-\cfrac{z^2}{1-\cfrac{\zeta^2}{1-z^2}}} = \tfrac{125}{117}$$

$$\frac{z}{1-\cfrac{\zeta^2}{1-\cfrac{z^2}{1-\zeta^2}}} = \tfrac{25}{77} \qquad\qquad \frac{\zeta}{1-\cfrac{z^2}{1-\cfrac{\zeta^2}{1-z^2}}} = \tfrac{25}{39}$$

etc. etc.

Wenn die Dicke der Schicht für die beiden einander nächsten Punkte $B$ und $K$, für welche $\mu = 1$ ist, berechnet werden soll, so ist, weil in diesem Falle

$$\psi x = \frac{3-x}{(1-x)^2}$$

$$\psi\,\tfrac{3}{5} = 15 \qquad\qquad \psi\,\tfrac{1}{5} = 4{,}375$$

$$\psi\,\tfrac{5}{8} = 16{,}888 \qquad\qquad \psi\,\tfrac{5}{16} = 5{,}687$$

$$\psi\,\tfrac{16}{25} = 18{,}201 \qquad\qquad \psi\,\tfrac{8}{25} = 5{,}796$$

$$\psi\,\tfrac{25}{39} = 18{,}306 \qquad\qquad \psi\,\tfrac{25}{77} = 5{,}866$$

etc. etc.

Mit Benutzung der vorstehenden Werthe erhält man die Dicke der elektrischen Schicht an dem Punkte $K$

$= + \eta - 0,6\,y + 0,239\,\eta - 0,027\,y + 0,007\,\eta$ — etc.
$= 1,246\,\eta\ - 0,627\,y.$

Die von Poisson bis zur vierten Decimalstelle berechneten Werthe sind 1,2461 und 0,6277.

Die Berechnung der Dicke der elektrischen Schicht wird sehr erleichtert, wenn die Entfernung $c$ im Verhältniss zu den beiden Radien nicht zu klein ist, indem dann schon wenige Glieder genügen. Aber auch selbst in den Fällen, wo $c$ klein ist, lässt sich diese Berechnung durch Hülfe einer Tafel für die Werthe der Function

$$\psi z = \frac{1}{z}\left(\frac{1 - z^2}{(1 - 2\mu z + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 1\right)$$

für das doppelte Argument $z$ und $\mu$ schnell ausführen, da in allen Ausdrücken diese Form vorkommt. Zur Uebersicht der Vertheilung der Elektricität für die Punkte, wo $\mu = +1$, $\mu = 0$ und $\mu = -1$ ist, möge die folgende kleine Tafel dienen, welche die Werthe der $\psi z$ für diese Punkte bei verschiedenen Werthen von $z$ enthält.

| $z$ | $\mu = +1$ | $\mu = 0$ | $\mu = -1$ |
|---|---|---|---|
| | — | + | + |
| $\frac{2}{3}$ | 21,000 | 1,020 | 1,320 |
| $\frac{1}{2}$ | 10,000 | 0,926 | 1,555 |
| $\frac{1}{3}$ | 6,000 | 0.723 | 1,875 |
| $\frac{1}{4}$ | 4,888 | 0,576 | 2,080 |
| $\frac{1}{5}$ | 4,375 | 0,475 | 2,222 |
| $\frac{1}{6}$ | 4,080 | 0,396 | 2,326 |
| $\frac{1}{7}$ | 3,888 | 0,350 | 2,406 |
| $\frac{1}{8}$ | 3,755 | 0,296 | 2,469 |
| $\frac{1}{9}$ | 3,656 | 0,270 | 2,520 |
| $\frac{1}{10}$ | 3,581 | 0,250 | 2,562 |
| $\frac{1}{12}$ | 3,471 | 0,204 | 2,628 |
| $\frac{1}{15}$ | 3,368 | 0,165 | 2,637 |
| $\frac{1}{20}$ | 3,269 | 0,120 | 2,766 |
| $\frac{1}{50}$ | 3,103 | 0,050 | 2,903 |
| $\frac{1}{100}$ | 3,052 | 0,010 | 2,949 |

### 3. *Vertheilung der Elektricität auf einer unbegrenzten Ebene aus einer leitenden Substanz bei Annäherung an eine elektrische nicht leitende Kugel.*

#### a. **Bestimmung der Vertheilung.**

Die im Vorstehenden gefundenen Ausdrücke gestatten bei geeigneter Umgestaltung auch eine Anwendung zur Berechnung der Dicke

der elektrischen Schicht auf einer unbegrenzten Ebene, welche an die Stelle einer der beiden Kugeln, z. B. der Kugel um $C$, gesetzt wird.

In $A$ befinde sich zunächst eine Kugel aus einer nicht leitenden Substanz, auf deren Oberfläche die Elektricitätsmenge $\eta\varrho^2$ in gleichförmiger Dicke verbreitet sei. In der Entfernung $AB = R$ stehe ihr senkrecht auf die Linie $AB$ die unbegrenzte Ebene $BW$ gegenüber. Es soll die Dicke der durch Vertheilung auf der Ebene erregten elektrischen Schicht bestimmt werden.

Man denke sich zunächst wie in Fig. 5 auf S. 446 die Kugel $C$ wieder hingestellt, so dass sie von der auf $AB$ senkrechten Ebene im Punkte $B$ berührt wird. Der Ausdruck für die Dicke der elektrischen Schicht auf dieser Kugel war

$$y = -\frac{\eta\varrho^2}{c^2 z}\left\{\frac{1-z^2}{(1-2\mu z+z^2)^{\frac{3}{2}}} - 1\right\},$$

oder wenn man für $z$ seinen Werth $\frac{r}{c}$ einsetzt,

$$y = -\eta\varrho^2\left\{\frac{1-\frac{r^2}{c^2}}{rc\left(1-2\mu\frac{r}{c}+\frac{r^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{rc}\right\}.$$

Es bedeute $\lambda$ die absolute Länge des Bogens $\vartheta$, dessen Cosinus $\mu$ ist, und zwar von $B$ aus gerechnet, so ist

$$\mu = \cos\vartheta = 1 - 2\sin^2\frac{\lambda}{2r},$$

folglich
$$y = -\eta\varrho^2\left\{\frac{c^2-r^2}{r\left\{c^2-2rc+4rc\sin^2\frac{\lambda}{2r}+r^2\right\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{rc}\right\}.$$

Um nun diesen Ausdruck auf die Ebene anzuwenden, hat man anstatt $c$ seinen Werth $AB+BC=R+r$, und darauf $r=\infty$ zu setzen. Man übersieht sogleich, dass unter diesen Umständen das zweite Glied fortfällt, dass $\frac{c^2-r^2}{r} = \frac{R^2+r^2+2rR-r^2}{r}$ sich auf $2R$, und $\left\{c^2-2rc+4rc\sin^2\frac{\lambda}{2r}+r^2\right\}$ $= R^2+\left(\frac{R+r}{r}\right)\lambda^2$ (wenn anstatt des Sinus der Bogen selbst gesetzt wird) auf $R^2+\lambda^2$ reducirt. Man erhält dann

$$y = -\eta\varrho^2\frac{2R}{(R^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Diess ist also die Dicke der elektrischen Schicht in einem Punkte der Ebene, der um $\lambda$ von $B$ absteht. Dieser Werth von $y$ lässt sich aber auch noch anders ausdrücken. Wenn der Punkt der Ebene, für welchen die Dicke der elektrischen Schicht gesucht wird, um $\lambda$ von dem Punkte $B$ absteht, so ist $\sqrt{R^2+\lambda^2}$ der Abstand dieses Punktes vom Punkte $A$; er

heisse $e$; $\frac{R}{\sqrt{R^2+\lambda^2}} = \frac{R}{e}$ ist dann der Cosinus des Winkels, welchen die Linie $e$ mit der auf der Ebene errichteten Senkrechten macht; heisst dieser Winkel $\varphi$, so ist

$$y = -\frac{2\eta\varrho^2 \cos\varphi}{e^2}.$$

Wenn wir uns die Elektricitätsmenge $\eta\varrho^2$ im Punkte $A$ concentrirt denken, was, wie wir wissen, ohne Aenderung ihrer Einwirkung auf die Ebene geschehen kann, so wird die elektrische Bestrahlung eines in der Entfernung $e$ senkrecht gestellten Flächenelements

$$-\frac{\eta\varrho^2}{e^2}.$$

Um die Intensität der Bestrahlung auf dem entsprechenden Elemente der auf $B$ senkrechten Ebene zu erhalten, muss der vorstehende Ausdruck noch mit $\cos\varphi$ multiplicirt werden; man erhält dafür

$$-\frac{\eta\varrho^2}{e^2}\cos\varphi = -\frac{\eta\varrho^2 R}{(R^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}},$$

also genau die Hälfte des oben für die Dicke der elektrischen Schicht im Zustande des Gleichgewichts gefundenen Werthes; die andere Hälfte desselben muss folglich durch die Rückwirkung der in jedem Punkte der Ebene erregten Elektricität auf jeden andern ihrer Punkte erzeugt worden sein.

**b. Vergleichung der Berechnung mit einer Messung von Coulomb.**

Der vorstehende Ausdruck gestattet eine ungefähre Vergleichung mit einem von Coulomb angestellten Versuche. Coulomb stellte nämlich eine ebene Metallscheibe von 16 Zoll im Durchmesser vor einer 8 Zoll im Durchmesser haltenden Kugel so auf, dass ihre Ebene auf der Verbindungslinie des Mittelpunkts der Scheibe und der Kugel senkrecht stand und von dem nächsten Punkte der Kugeloberfläche 4 Zoll entfernt war. Coulomb fand, dass die Dicke der elektrischen Schicht in dem Mittelpunkte der Scheibe halb so gross war als die Dicke derselben auf der Kugeloberfläche. Wenn wir in diesem Versuche den Einfluss der Rückwirkung der Scheibe auf die Kugeloberfläche vernachlässigen, und die Ausdehnung der Scheibe als unendlich annehmen, so würde nach der obigen Formel

$$-\frac{2\eta\varrho^2 R}{(R^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}$$

die Dicke der elektrischen Schicht in der Mitte der Scheibe, wo $\lambda=0$ ist,

$$= -\frac{2\eta\varrho^2}{R^2}.$$

In dem Coulomb'schen Versuche ist nun $\varrho = 4$ Zoll, $R = 8$ Zoll, also die Dicke der elektrischen Schicht in der Mitte der Scheibe

$$-\tfrac{1}{2}\eta$$

d. h., wie der Versuch ergeben, halb so gross als auf der Kugel, wo sie in gleichförmiger Dicke $\eta$ sich findet. Das Zeichen — deutet auf die entgegengesetzte Elektricität.

Für den Mittelpunkt der Scheibe war die Dicke der Schicht

$$-\frac{2\eta\varrho^2}{R^2},$$

also ändert sich, wenn die Scheibe aus der Entfernung $R$ in eine andere gebracht wird, die Dicke der elektrischen Schicht im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate ihres Abstandes von dem Mittelpunkte der Kugel. Auch diess stimmt mit den von Coulomb durch Messung gefundenen Resultaten überein.

## 4. *Rückwirkung einer Ebene auf eine elektrische Kugel.*

Wenn die in $B$ auf $AB$ senkrecht stehende Ebene durch die auf der Kugel $A$ befindliche Elektricität elektrisch geworden ist, so wirkt sie wieder auf die Kugel $A$ zurück, und ändert, wenn wir uns die Kugel $A$ aus einer leitenden Substanz gebildet denken, die gleichförmige Verbreitung der Elektricität auf der Oberfläche derselben ab. Wir werden, gerade wie früher, diese Abänderung am einfachsten ermitteln, wenn wir uns die auf der Ebene nach dem Gesetz

$$y = -\frac{2\eta\varrho^2 R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

verbreitete Elektricität auf derselben befestigt denken, und die Kugel um $A$, nachdem wir sie ihrer Elektricität beraubt haben, der Einwirkung dieser auf der Scheibe verbreiteten Elektricität aussetzen. Um die Dicke $\eta'$ der hierdurch auf der Kugel um $A$ erregten Elektricität zu berechnen, ist es am bequemsten, von den oben für Kugeln gefundenen Ausdrücken auszugehen.

Setzt man an die Stelle der Ebene in $B$ die Kugel um $C$ (vergl. Fig. 5 S. 446), so dass die Ebene die Kugel im Punkte $B$ berührt, so ist, wenn auf dieser Kugel eine Vertheilung

$$-\frac{\eta\varrho^2}{c^2 z}\left(\frac{1 - z^2}{(1 - 2\mu z + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 1\right)$$

oder
$$-\frac{\eta\varrho^2}{c^2}\left\{3T_1+5z\,T_2+7z^2\,T_3+\text{etc.}\right\}$$
vorhanden ist, die dadurch auf der nicht elektrischen Kugel um $A$ hervorgerufene Dicke der elektrischen Schicht
$$\eta'=\eta\zeta^2 z\left[3T_1\left\{\frac{1}{(1-z^2)^2}-1\right\}+5T_2\zeta\left\{\frac{1}{(1-z^2)^3}-1\right\}+7T_3\zeta^2\left\{\frac{1}{(1-z^2)^4}-1\right\}+\text{etc.}\right]$$
Um diesen letzten Ausdruck so umzuformen, dass er den Werth von $\eta'$ gibt, wenn die Kugel um $C$ sich in die unbegrenzte Ebene verwandelt, schreibe man statt $z$ seinen Werth $\frac{r}{c}$, statt $\zeta$ seinen Werth $\frac{\varrho}{c}$, und ersetze die Entfernung $AC$ durch die Summe $AB+BC$, oder, wenn $AB=R$, durch $R+r$. Setzt man dann $r=\infty$, so erhält man zuletzt
$$\eta'=\frac{\eta\varrho^2}{(2R)^2}\left\{3T_1+5\frac{\varrho}{2R}T_2+7\left(\frac{\varrho}{2R}\right)^2T_3+\text{etc.}\right\}=\frac{\eta\varrho^2}{(2R)^2Z}\left\{\frac{1-Z^2}{(1-2\mu Z+Z^2)^{\frac{3}{2}}}-1\right\}$$
wenn man $\frac{\varrho}{2R}=Z$ setzt.

Zu demselben Resultate gelangt man natürlich auch, wenn man von dem geschlossenen Ausdrucke für $\eta'$ ausgeht und die angeführten Substitutionen macht.

Der Werth
$$\eta'=\frac{\eta\varrho^2}{(2R)^2}\,\frac{1}{Z}\left\{\frac{1-Z^2}{(1-2\mu Z+Z^2)^{\frac{3}{2}}}-1\right\}$$
zeigt an, dass die Rückwirkung, welche eine um $R$ vom Mittelpunkte der Kugel entfernte Ebene auf die Kugel ausübt, gleich ist der Einwirkung, welche eine in der Entfernung $2R$ befindliche und in gleichförmiger Dicke $-\eta$ mit der Elektricitätsmenge $-\eta\varrho^2$ bedeckte Kugel auf dieselbe ausüben würde, also gleich ist der Einwirkung der Kugel um $A$, selbst wenn sie mit entgegengesetzter gleichstarker Elektricität geladen in der Entfernung $2R$ sich von $A$ entfernt fände. Es spiegelt sich also die elektrische Kugel um $A$ in der in $B$ aufgestellten Ebene gleichsam ab.

Weitere Entwickelungen der Einwirkungen von parallelen Ebenen auf einander würden mich hier zu weit führen; ich verspare sie bis auf eine andere Gelegenheit.

5. *Vertheilung der Elektricität auf einer Kugel, wenn ihr ein unendlich dünner, auf seiner Oberfläche mit einer überall gleich dicken elektrischen Schicht bedeckter, geradliniger Nichtleiter genähert wird.*

Wenn anstatt der Kugel um $A$ ein dünner Schellackcylinder, dessen Axe mit der Linie $BA$ zusammenfällt, und dessen Oberfläche mit

einer überall gleich dicken elektrischen Schicht bedeckt ist, gegeben wäre, so lässt sich die Vertheilung, welche derselbe auf die Kugel um $C$ ausübt, mit Hülfe des Früheren bestimmen. Wenn der Cylinder sehr dünn ist, z. B. ein dünner Draht, so kann man ohne merklichen Fehler die auf seiner Oberfläche vorhandene Elektricität in seiner Axe vereinigt setzen. Die Längeneinheit der Oberfläche des Cylinders enthalte die Elektricitätsmenge $e$, also jedes Element der Cylinderfläche von der Länge $dc$ die Menge $edc$, und ebensoviel auch jeder Punkt der Axe. Ein Punkt derselben, welcher um $c$ von der Kugel $C$, deren Radius $r$ ist, absteht, erzeugt auf dieser eine Vertheilung, bei welcher die Dicke der elektrischen Schicht, wenn $z=\frac{r}{c}$, ausgedrückt wird durch

$$-\frac{edc}{c^2 z}\left\{\frac{1-z^2}{(1-2\mu z+z^2)^{\frac{3}{2}}}-1\right\}$$

oder

$$-\frac{edc}{c^2}\left\{3T_1+5\frac{r}{c}T_2+7\frac{r^2}{c^2}T_3+9\frac{r^3}{c^3}T_4+\text{etc.}\right\}.$$

Wenn nun das nächste Ende des Cylinders um $\gamma$ von dem Mittelpunkte $C$ absteht, während das andere Ende sich ins Unendliche erstreckt, so erhält man die Dicke der elektrischen Schicht, welche auf der Kugeloberfläche durch die Einwirkung des ganzen Cylinders erzeugt wird, wenn man die Dicke aller der einzelnen Schichten, welche jeder elektrische Punkt der Axe des Cylinders hervorruft, addirt, oder wenn man den vorstehenden Ausdruck zwischen den Gränzen von $c=\gamma$ bis $c=\infty$ integrirt. Das allgemeine Integral ist

$$\frac{e}{c}\left\{3T_1+\frac{5}{2}\frac{r}{c}T_2+\frac{7}{3}\frac{r^2}{c^2}T_3+\frac{9}{4}\frac{r^3}{c^3}T_4+\text{etc.}\right\}+\text{Const.}$$

Für $c=\infty$ ist das Integral $=0$, daher erhält man den Werth desselben zwischen den angegebenen Gränzen

$$-\frac{e}{\gamma}\left\{3T_1+\frac{5}{2}\frac{r}{\gamma}T_2+\frac{7}{3}\frac{r^2}{\gamma^2}T_3+\text{etc.}\right\}$$

$$=-\frac{e}{\gamma}\left[2\left\{T_1+\frac{r}{\gamma}T_2+\frac{r^2}{\gamma^2}T_3+\text{etc.}\right\}+T_1+\frac{1}{2}\frac{r}{\gamma}T_2+\frac{1}{3}\frac{r^2}{\gamma^2}T_3+\text{etc.}\right].$$

Die Summe der ersten Reihe des letzten Ausdrucks ist

$$\frac{\gamma}{r}\left\{\frac{\gamma}{\sqrt{r^2-2\mu r\gamma+\gamma^2}}-1\right\}=\frac{1}{\zeta}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-2\mu\zeta+\zeta^2}}-1\right\},$$

wenn $\frac{r}{\gamma}=\zeta$ gesetzt wird; die Summe der zweiten Reihe

$$T_1+\frac{1}{2}\zeta T_2+\frac{1}{3}\zeta^2 T_3+\text{ ist }=\frac{1}{\zeta}\int_0^{\zeta}\frac{1}{\zeta}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2\mu\zeta+\zeta^2}}-1\right)d\zeta.$$

Die gesammte Dicke der elektrischen Schicht auf der Kugeloberfläche ist also

$$= -\frac{e}{r}\left[2\left\{\frac{1}{\sqrt{1-2\mu\zeta+\zeta^2}}-1\right\}+\log\text{nat.}\,\frac{2}{1-\mu\zeta+\sqrt{1-2\mu\zeta+\zeta^2}}\right].$$

Die Reihe

$$-\frac{e}{\gamma}\left\{3T_1+\frac{5}{2}\frac{r}{\gamma}T_2+\frac{7}{3}\frac{r^2}{\gamma^2}T_3+\text{etc.}\right\}$$

convergirt selbst noch für Werthe von $\gamma = r$, oder $\zeta = 1$, d. h. wenn der Cylinder mit seinem Ende die Oberfläche der Kugel berührt, jedoch mit Ausschluss von $\mu = +1$, wo sie keine Summe mehr besitzt.

## VII. Experimentelle Bestimmung der elektrischen Vertheilung auf der Oberfläche metallischer Kugeln und der sie tragenden metallischen Stäbe.

### 1. *Aeussere störende Einflüsse.*

Viele der bisherigen Messungen über die Vertheilung der Elektricität auf Körpern sind möglicherweise mit Fehlern behaftet, deren Vorhandensein sehr leicht zu erkennen ist. Wenn nämlich eine Kugel durch ein Schellackstäbchen isolirt auf einem Tische steht, so kann die Elektricität, selbst wenn der Schellack ein vollkommener Nichtleiter wäre, nicht in gleichförmiger Dicke sich über die Kugel verbreiten, weil die Ebene des Tisches eine Rückwirkung auf die Vertheilung der Elektricität über die Oberfläche der Kugel ausübt, deren Betrag sich durch die mathematische Analyse berechnen lässt. Denselben Einfluss erleiden natürlich auch zwei elektrische Kugeln, welche in einerlei Höhe über dem Tische einander genähert werden. Es ist dieser Einfluss so wenig beachtet worden, dass sehr gewöhnlich die Länge der isolirenden Stützen oder überhaupt die Höhe der Kugel über der Ebene des Tisches gar nicht erwähnt wird. Und doch ist nach S. 481 dieser Einfluss des Tisches gleich der Wirkung einer zweiten isolirt aufgestellten ebenso grossen und mit derselben Menge Elektricität von entgegengesetzter Art geladenen Kugel, wenn dieselbe in der doppelten Entfernung der Tischebene sich der ersten isolirten Kugel gegenüber befindet.

Nehmen wir z. B. an, eine Kugel habe einen Halbmesser von 4 Zoll und stehe mit ihrem Mittelpunkte 12 Zoll hoch über der Ebene eines Tisches; die Dicke der elektrischen Schicht auf dieser Kugel, wenn sie

ganz frei im Raume entfernt von allen Leitern ist, sei $= + 1$: so wird die Dicke der durch Rückwirkung des Tisches erzeugten elektrischen Schicht an einem Punkte, dessen Winkelabstand vor dem untern Endpunkte des verticalen Durchmessers $\vartheta$ beträgt, angenähert gegeben durch die Formel

$$\frac{1}{6}\left\{\frac{210}{(37-12\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}-1\right\}.$$

Uebrigens gibt diese Formel die Dicke noch zu gering; sie ist nur das erste Glied einer Reihe. Daraus folgt die Dicke dieser Schicht für den untersten, dem Tische nächsten Punkt, für welchen $\vartheta = 0$

$$+ 0,11$$

und für den obersten Punkt, für welchen $\vartheta = 180^\circ$

$$- 0,07.$$

Diese Werthe sind zu der ursprünglichen $+ 1$ hinzuzufügen. Anstatt einer gleichförmigen Vertheilung hat man also eine solche, wobei die Dicke der Schicht an dem untersten Punkte 1,11 und an dem obersten 0,93 beträgt. Auf dem horizontal liegenden grössten Kreise der Kugel würde die Dicke

$$0,99$$

sein, also nur wenig verändert, so dass auf diesem Kreise gemachte Messungen einen Werth geben, der wenig von der Dicke der gleichförmigen Schicht abweicht. Ueberhaupt sind, wenn die Ebene des Tisches horizontal liegt, alle auf demselben horizontalen Kugelkreise ausgeführten Messungen unter einander vergleichbar, weil alle in gleichem Verhältnisse abgeändert sind. Ist der Halbmesser und die Entfernung des Mittelpunktes der Kugel von der Ebene des Tisches gegeben, so lässt sich übrigens auch leicht derjenige horizontale kleine Kugelkreis finden, auf welchem die Rückwirkung des Tisches $= 0$ ist, der also genau dieselbe Dicke der elektrischen Schicht zeigt, als wenn die Kugel frei im Raume stände. Man hat, wenn $r$ den Halbmesser der Kugel und $R$ die Entfernung des Mittelpunktes über der Ebene des Tisches, die im Verhältniss zum Halbmesser der Kugel nicht zu gering angenommen werden möge, bedeutet und $\frac{r}{2R} = Z$ gesetzt wird, nach S. 463 den Werth von $\cos\vartheta$, welcher die Lage dieses Kreises angibt,

$$\cos\vartheta = \frac{1+Z^2-(1-Z^2)^{\frac{3}{2}}}{2Z}$$

oder

$$\cos\vartheta = \frac{5}{4}Z + \frac{1}{16}Z^3 + \frac{2}{81}Z^5 + \text{etc.},$$

wo in den meisten Fällen schon das erste Glied $\mu = \frac{5}{6}Z$ hinlängliche Genauigkeit geben wird. In dem obigen Falle, wo $Z = \frac{1}{6}$ ist, wird das zweite Glied $\frac{1}{18}Z^3$ nur 0,0003, so dass

$$\cos\vartheta = \frac{5}{36}$$

oder

$$\vartheta \text{ nahe } 82^0.$$

Eine weitere Aenderung, deren Betrag sich aber weder durch Rechnung, noch ein für alle Mal durch das Experiment ausmitteln lässt, wird in der gleichförmigen Verbreitung der Elektricität auf der Kugeloberfläche dadurch erzeugt, dass die Schellackstützen an dem obern Ende, wo sie mit der elektrischen Schicht in Berührung sind, mit der Zeit ebenfalls elektrisch werden. Diese Fehlerquelle ist nur dadurch gänzlich zu entfernen, dass man in der Nähe der Punkte, auf welchen die Vertheilung der Elektricität gemessen werden soll, alle Isolatoren als Stützen vermeidet und die Kugeln an Leitern befestigt.

Eine dritte Fehlerquelle, die eine bei weitem grössere Bedeutung hat, als ihr aus dem gänzlichen Stillschweigen darüber zuzukommen scheint, ist die Einwirkung, welche der Körper des Beobachters, und namentlich die der Kugel öfter sehr genäherten Hand auf die Vertheilung der Elektricität ausübt; dieselbe wird später (§ 4) noch genauer erörtert werden.

### 2. *Verfahren zur Messung der relativen Dicken der elektrischen Schicht.*

Bei der unmittelbaren Bestimmung der Vertheilung der Elektricität durch Messungen habe ich ebenfalls das von mir construirte Elektrometer, gewöhnlich das Elektrometer *A*, angewandt. Die Kugel, auf welcher die Dicke der elektrischen Schicht gemessen werden sollte, wurde durch Verbindung mit dem Innern einer aus vier bis zehn ziemlich grossen Verstärkungsflaschen bestehenden, sehr schwach geladenen Batterie, deren äusseres Beleg zu dem Erdboden abgeleitet war, elektrisch erhalten. Wenn der Rand der Flaschen gut gefirnisst ist, wenn alle nöthigen Unterstützungen aus gutem Schellack gefertigt und alle Ecken und Spitzen vermieden sind, so hält sich in einer geheizten Stube die Elektricität sehr nahe constant; bei feuchtem Wetter und wenn viel Gelegenheit zur Ausstrahlung geboten, findet diess natürlich weniger statt. In jedem Falle ist es zweckmässig, das Verhältniss der elektrischen

Dicken an zwei verschiedenen Stellen durch abwechselnde Messungen an denselben zu bestimmen.

Zu beachten ist bei diesem Verfahren noch, dass man nicht gleich nach der Ladung der Batterie die Messungen beginnt, sondern die Batterie erst einige Zeit geladen stehen lässt; denn im Anfange ist wegen des Eindringens der Elektricität in das Glas der Flaschen und der Verbreitung derselben nach dem Rande hin, die Abnahme der Spannung stärker als später. Man kann sogar, wenn es darauf ankommt, die Messungen unter einem allmähligen Wachsen, und für kurze Zeit selbst bei vollständiger Gleichheit der elektrischen Spannung ausführen, wenn man die Batterie viel stärker ladet, als man sie später für die Messungen gebraucht, eine Zeitlang stehen lässt, und ihr darauf durch eine genäherte Spitze oder Flamme soviel Elektricität entzieht, dass der Rückstand gerade die gewünschte Stärke besitzt. Dann kehrt von der in und über die Glasmasse gedrungenen Elektricität nach und nach ein Theil zu den Belegen zurück. Die elektrische Spannung der Batterie steigt allmählig und erreicht ein Maximum, wenn der Verlust nach aussen gerade soviel beträgt, als der Zufluss der zurückkehrenden; auf diesem Maximum bleibt sie einige Zeit stehen, und beginnt dann allmählig abzunehmen.

Wollte man die Bestimmungen nicht durch die Methode der abwechselnden Messungen an zwei Punkten erhalten, so könnte man sie auch durch eine einzelne Messung gewinnen, wenn man unmittelbar mit der Batterie eine Vorrichtung zur Beobachtung der elektrischen Spannung verbände, und aus einer gleichzeitigen Messung dieser Spannung ein Mittel zur Reduction der einzelnen Messungen auf einen bestimmten Spannungszustand der Batterie ableitete. Eine solche Vorrichtung zur Bestimmung der Spannung der Batterie würde gebildet werden können durch eine kleine leichte, an einem Drahte oder einer metallischen Feder beweglich aufgehangene Kugel, welcher in der Ebene der Bewegung eine zweite Kugel in nicht zu geringer Entfernung gegenüber stünde. Würde ähnlich wie S. 406 oder S. 412 die eine der Kugeln oder auch beide mit dem innern Belege der Batterie verbunden, so könnten die mit einem Mikroskope beobachteten Abstossungen der ersten Kugel durch die zweite ein einfaches Mittel gewähren, um die Aenderungen der Spannung in der Batterie zu erfahren und dadurch eine Correction für die in verschiedenen Zeiten ausgeführten Messungen der elektrischen Vertheilung auf den mit ihr verbundenen Kugeln zu er-

halten. Bleibt diese Vorrichtung ungeändert, so kann sie selbst dienen, um Beobachtungen, welche durch längere Zeiträume getrennt sind, auf einander zu reduciren und unter einander vergleichbar zu machen.

Bei den nachstehenden Versuchen habe ich mich aber stets der Methode der abwechselnden Messungen bedient, weil durch sie auch zugleich alle etwa im Laufe der Zeit eintretenden Veränderungen in der Empfindlichkeit des Elektrometers ausgeschieden werden. Eine sehr kleine, 3,47 Millimeter im Durchmesser haltende Messingkugel (Probekügelchen) wurde an einem dünngezogenen Schellackfaden von ungefähr 1½ Zoll Länge angeschmolzen; dieser dünne Schellackfaden sass an einem etwas mehr als federkieldicken Schellackstabe von fast 1 Fuss Länge, der dann an eine 1 Fuss lange Glasröhre befestigt war, die zuletzt ein metallischer Griff trug. Die Hand, welche letzteren gefasst hielt, befand sich bei der Berührung des elektrischen Körpers mit diesem Probekügelchen also möglichst entfernt, so dass ihr Einfluss nicht beträchtliche Aenderungen, deren Grösse ich jedoch später anführen werde, in dem elektrischen Zustande der Kugel veranlassen konnte. Die auf diese Weise durch Berührung des elektrischen Körpers dem Probekügelchen mitgetheilte Elektricität wurde dann sogleich einer auf dem das Goldblättchen tragenden Stäbchen des Elektrometers *A* sitzenden kleinen Kugel mitgetheilt.

Das Elektrometer *A* befand sich in einem andern Zimmer als die Batterie mit ihrem Anhange, und die Thür zwischen beiden Stuben wurde während der Messungen geschlossen gehalten, so dass keine elektrische Strahlung das Elektrometer erreichen, oder die Luft in dem andern Zimmer stark laden konnte. Die Ladung der Batterie und die Empfindlichkeit des Elektrometers wurden so gegen einander abgeglichen, dass die Ausschläge des Goldblättchens seiner elektrischen Spannung proportional gesetzt oder leicht reducirt werden konnten.

Da, wie oben S. 406 schon angeführt, das Goldblättchen anfangs schon eine bestimmte Elektricität besitzt, und aller Sorgfalt ungeachtet stets ein wenn auch nur äusserst geringer Rückstand von den vorhergehenden Ladungen in dem Elektrometer bleibt, der sich nach der Entladung von dem isolirenden Schellack auf das Goldblättchen verbreitet, so muss diese Elektricitätsmenge berücksichtigt und der Ausschlag je nach der Natur der angewandten Elektricität um den Betrag derselben vermehrt oder vermindert werden. Wenn zufällig die Luft in dem Zimmer, wo das Elek-

trometer stand, durch die Zuströmung der Elektricität aus der Batterie etwas geladen war, so wurde der eben erwähnte Ausschlag dadurch vermehrt, oder vermindert, oder selbst in den entgegengesetzten verwandelt. Ein Fehler entsteht zwar durch diese Ladung der Luft mit Elektricität nicht, wenn nur diese Ladung sich während der Zeit von der Bestimmung des ursprünglich vorhandenen Ausschlags bis zur unmittelbar darauf folgenden Messung der Elektricität des Probekügelchens nicht ändert; indess habe ich bei Versuchen, wo es auf Genauigkeit ankam, eine solche Ladung der Luft in dem Zimmer, wo das Elektrometer stand, durch Geschlossenhalten der zuvor erwähnten Thür durchaus vermieden. Um eine Einsicht in den Gang der Versuche zu gewähren, will ich nachher eine Reihe von Messungen, die an einem Nachmittage hintereinander angestellt wurden, mittheilen.

### 3. *Untersuchung der Form einer Kugel und eines Cylinders.*

Da, wie sich später zeigen wird, die genaue Kenntniss der Vertheilung der Elektricität auf einer von einer cylindrischen Röhre von bestimmter Dicke getragenen metallischen Kugel erforderlich wurde, so liess ich eine möglichst vollkommene Kugel von nahe 117,91$^{mm}$ im Durchmesser und eine cylindrische Röhre von 38,1$^{mm}$ im Durchmesser anfertigen. Die Kugel bestand aus Messing; die Röhre aus Schmiedeeisen war auf der Drehbank sorgfältig abgedreht und polirt worden. Um bequem verschiedene Punkte der Kugel auffinden zu können, sollte der Mechaniker 19 sehr feine, kaum sichtbare, parallele Kreise auf ihrer Oberfläche mittelst des Drehstahles ziehen, so dass durch die Ebenen derselben der auf ihnen senkrechte Durchmesser in 20 gleiche Theile getheilt würde. Es war diess aber nur angenähert gelungen, so dass ich die Punkte, in welchen die Ebenen dieser Kreise den Durchmesser schnitten, durch die Messung der Sehnen der Bogen auf der Kugel bestimmen musste. Die Kugel liess sich so an die Röhre anschrauben, dass der von aussen nach innen zu geschärfte Rand der Röhre ringsum vollkommen dicht an die Kugel anschloss.

Den Durchmesser der Kugel, welcher in der Verlängerung der Axe der Röhre lag, will ich die Axe (Polaxe) der Kugel nennen; auf ihm standen die Ebenen der zuvor erwähnten parallelen Kreise senkrecht. Die Abschnitte, welche letztere auf dieser Axe bilden, vom Mittelpunkte der Kugel aus gerechnet, sind nichts Anderes als die Cosinus derjenigen

Winkel, welche die vom Mittelpunkte der Kugel nach der Peripherie der entsprechenden Kreise gezogenen Radien mit der Axe der Kugel bilden. Die Lage dieser Kreise ist also völlig bestimmt, sobald jene Winkel oder ihre Cosinus gegeben sind. Im Nachstehenden werde ich die Kreise stets durch die Cosinus ihrer Winkel, die ich $\mu$ nenne, bezeichnen und dabei die vom Mittelpunkte der Kugel nach der Röhre hin gelegene halbe Axe als positiv betrachten.

Ausser den genannten Parallelkreisen waren durch die Axe der Kugel noch zwei grösste Kreise (Meridiane) gezogen, deren Ebenen auf einander senkrecht standen. Ich will diese Meridiane der Reihenfolge nach mit 1, 2, 3, 4 bezeichnen.

Mittelst eines mit verschiebbaren Spitzen versehenen Maassstabes wurde die Entfernung bestimmter Punkte auf der Kugel genommen, dann die Spitzen auf einen durchgehends in 0,05692 pariser Linie getheilten Maassstab gelegt, und der Abstand beider Spitzen mittelst einer stark vergrössernden Loupe abgelesen. Die folgenden Messungen werden nachweisen, in wieweit die Kugel regelmässig war.

Der Abstand des von der Röhre abgewandten Endpunktes der Axe, für welchen also $\mu = -1$, von dem fünften Kreise (gerechnet von diesem Ende), also die Länge der zwischen den beiden bezeichneten Punkten gelegenen Sehne, betrug

auf den Meridianen 1. u. 4. in jenem Maasse 472.5 Theilstriche $= 60,67^{mm}$
,, ,, ,, 2. u. 3. ,, ,, 469,0 ,, $= 60,22^{mm}$

Der Abstand dieses fünften Kreises von dem andern fünften Kreise (über dem positiven Theile der Axe gerechnet von dem andern Endpunkte der Axe), also die Länge der Sehne zwischen den beiden Kreisen, betrug auf allen Meridianen 463,0 Theilstriche $= 59,45^{mm}$.
Von diesen beiden Kreisen lag fast genau gleichweit der zehnte (nahe mit dem Aequator der Kugel zusammenfallende) Kreis ab.

Der Abstand des fünften Kreises auf der positiven Seite der Axe von dem Kreise, in welchem die Röhre die Kugel berührte, also die Länge der Sehne zwischen diesen beiden Kreisen, betrug

auf dem Meridian 1. und 3. 306,7 Theilstriche $= 39.38^{mm}$
,, ,, ,, 2. 309,8 ,, $= 39,78$
,, ,, ,, 4. 301,0 ,, $= 38,65$.

Der Abstand des fünften Kreises auf der positiven Halbaxe von dem

dritten über derselben betrug 119,9 Theilstriche; der Abstand desselben fünften Kreises von dem zweiten 178,9 Theile.

Der Durchmesser der eisernen Röhre betrug

in der Ebene des Meridianes 1. 3. 297,4 Theilstriche = 38,19$^{mm}$
„ „ „ „ „ 2. 4. 296,4 „ = 38,06$^{mm}$.

Diese Abweichung in der Rundung der Röhre war nach dem Abdrehen durch das Einlöthen des Zapfens zum Einschrauben der Kugel entstanden.

Die Summe aller auf dem Meridiane 1. 3. gemessenen Sehnen beträgt 356,74$^{mm}$; die Summe der entsprechenden auf dem Meridiane 2. 4. beträgt 356,28$^{mm}$. Da die Abweichungen der Kugel von der vollkommen regelmässigen Form nur sehr gering sind, so werde ich aus den Abständen auf den verschiedenen Meridianen das Mittel nehmen. Es beträgt dann die Länge der Sehne zwischen dem Endpunkte der negativen Halbaxe und dem nächsten fünften Kreise 470,75 Theilstriche, zwischen diesem Kreise und dem andern fünften über der positiven Halbaxe 463,00 Theilstriche, zwischen dem letzten fünften und dem Berührungskreise der Röhre 306,05 Theilstriche, und der mittlere Durchmesser der Röhre ist gleich 296,70 Theilstrichen.

Wird der Durchmesser der Kugel = 918,3 Theilstrichen angenommen, so beträgt im Mittel der Winkel

| | | Winkel | Cosinus |
|---|---|---|---|
| zwischen der positiven Halbaxe | und der negativen . . . . . . . . . | 180° 0′ | — 1,0000 |
| | und dem Radius nach dem fünften Kreise über der negativen Halbaxe . . . . | 118 19 | — 0,4743 |
| | und dem Radius nach dem zehnten Kreise | 88 3 | + 0,0340 |
| | und dem Radius nach dem fünften Kreise über der positiven Halbaxe . . . . | 57 46 | + 0,5334 |
| | und dem Radius nach dem dritten Kreise über der positiven Halbaxe . . . . | 42 46 | + 0,7341 |
| | und dem Radius nach dem zweiten Kreise über der positiven Halbaxe . . . . | 35 18 | + 0,8161 |
| | und dem Radius nach dem Berührungskreise der Röhre . . . . . . . . . . | 18 51 | + 0,9464 |

Mit der Länge des Durchmessers = 918,3 Theilstriche stimmt auch die unmittelbare Messung des innern Durchmessers eines Ringes überein, der genau so weit war, dass die Kugel eben hindurchging. Ich

hatte ihn anfertigen lassen, um die Form der Kugel nach allen Richtungen zu prüfen. Diese Messung gab im Mittel 918,5 Theilstriche. Der Durchmesser der Kugel soll also zu 918,3 Theilstrichen = 117,91$^{mm}$ angenommen werden.

Mittelst des erwähnten Ringes war sogleich erkennbar, dass der Aequatorialdurchmesser der Kugel um eine sehr geringe Grösse kleiner war, als der Polardurchmesser oder die Axe. Die Messungen auf der Peripherie des zehnten Kreises ergaben für den Durchmesser dieses Kreises 117,62$^{mm}$, woraus der Aequatorialdurchmesser sich ergibt zu 117,68$^{mm}$. Der Unterschied zwischen ihm und der Länge der Axe betrug also 0,23$^{mm}$.

### 4. *Ueber den Einfluss des Körpers des Beobachters auf die Messungen.*

Die eben beschriebene messingene Kugel war mittelst eines in die eiserne Röhre eingeschobenen Eisenstabes mit dem Innern einer elektrischen Batterie aus 10 Flaschen (unter denen 2 sehr grosse) in Verbindung. Die Flaschen waren in 3 Kasten vertheilt; in dem Kasten, welcher der Kugel am nächsten war, standen 4 Flaschen, deren Zuleitungsdrähte in eine oberhalb befindliche Kugel zusammenliefen. Von dieser Kugel der Batterie stand die messingene Kugel 1400$^{mm}$ ab. Die eiserne Röhre hatte nicht ganz diese Länge; sie durfte nur in einer Länge von 895$^{mm}$ genommen werden, weil eine grössere Länge das Abdrehen auf der Drehbank unmöglich gemacht hätte. Der hintere Theil des Eisenstabes war dafür fast ganz mit einer Zinkröhre von beinahe 40$^{mm}$ im Durchmesser bedeckt. Eine solche Abweichung in der Dicke über diesem hintern Theile der Röhre hat auf die Vertheilung der Elektricität auf der Kugel keinen merklichen Einfluss.

Der Mittelpunkt der Kugel befand sich mehr als 1400$^{mm}$ von dem Fussboden und den Seitenwänden des Zimmers entfernt. Die Röhre lag horizontal, und war in einer Entfernung von 525$^{mm}$ von der Kugel durch eine vom Fussboden aufwärts gehende gefirnisste Glasröhre, an deren oberes Ende eine dicke mit passender Vertiefung versehene Schellackmasse angeschmolzen war, gestützt. In einer Entfernung von 830$^{mm}$ von der Kugel fand sich der Sicherheit wegen noch eine zweite ähnliche Stütze.

Die Zeit, welche jede einzelne Messung in Anspruch nahm, betrug 1¼ bis 1½ Minute; bei jeder Versuchsreihe wurden die einzelnen Messungen in möglichst gleichen Zwischenzeiten gemacht. Die relative Dicke der elektrischen Schicht wurde in den nächstfolgenden Versuchen bestimmt für die Punkte, für welche $\mu = +0,0340$, $\mu = +0,5334$ und $\mu = +0,8161$. In dem Punkte $\mu = -1$ soll die Dicke $= 1$ gesetzt, und mit ihr alle übrigen verglichen werden. Alle nachfolgenden Messungen sind mit einer und derselben Ladung der Batterie angestellt; man sieht daraus, wie langsam die Spannung derselben abnimmt.

Von $2^h$ 52′ bis $3^h$ 10′.

Abwechselnde Messungen an den Punkten $\mu = -1$, und $\mu = +0,5334$.

| $\mu = -1$. | $\mu = +0,5334$. | Dicke der elektrischen Schicht. | Mittel. |
|---|---|---|---|
| 8,65 | | | |
| 8,50 | 6,70 | 0,782 | |
| 8,40 | 6,65 | 0,787 | |
| 8,40 | 6,60 | 0,786 | 0,785 |
| 8,25 | 6,55 | 0,787 | |
| 8,20 | 6,45 | 0,785 | |

Die in den beiden ersten Spalten der vorstehenden Tabelle befindlichen Zahlen sind die um 0,1 verringerten abgelesenen Ausschläge; diese Correction von 0,1 wurde durch die im Elektrometer vorhandene Elektricität nöthig. Sie behielt auch in den folgenden Versuchen diesen Werth, so dass in den nachstehenden Tabellen ebenfalls gleich die um 0,1 verringerten Ausschläge aufgeführt sind. Die Messungen wurden erst an dem Punkte $\mu = -1$, dann an dem Punkte, für den $\mu = +0,5334$, dann wieder auf $\mu = -1$, dann wieder an dem andern Punkte u. s. f. gemacht. Die dritte Spalte enthält die Verhältnisse zwischen dem Mittel zweier an dem Punkte $\mu = -1$ ausgeführten Messungen zu der dazwischen liegenden an dem andern Punkte. Ich hätte mit gleichem Rechte auch noch die Verhältnisse zwischen jeder auf dem Punkte $\mu = -1$ und dem Mittel aus den beiden zunächst gelegenen in dem Punkte $\mu = +0,5334$ gemachten Messungen hinzufügen können. Die vierte Spalte enthält das Mittel aus den Zahlen der dritten.

Von $3^h$ 24′ bis $3^h$ 40′.

Abwechselnde Messungen an den Punkten $\mu = -1$ und $\mu = +0{,}0340$.

| $\mu = -1$. | $\mu = +0{,}0340$. | Dicke der elektrischen Schicht. | Mittel. |
|---|---|---|---|
| 8,00 | | | |
| 7,90 | 7,25 | 0,912 | |
| 7,80 | 7,20 | 0,918 | |
| 7,75 | 7,10 | 0,914 | 0,915 |
| 7,70 | 7,05 | 0,913 | |
| 7,65 | 7,05 | 0,919 | |

Von $3^h$ 54′ bis $4^h$ 9′.

Abwechselnde Messungen an den Punkten $\mu = -1$ und $\mu = +0{,}8161$.

| $\mu = -1$. | $\mu = +0{,}8161$. | Dicke der elektrischen Schicht. | Mittel. |
|---|---|---|---|
| 7,55 | | | |
| 7,50 | 4,25 | 0,565 | |
| 7,40 | 4,15 | 0,557 | |
| 7,30 | 4,15 | 0,565 | 0,563 |
| 7,30 | 4,10 | 0,562 | |
| 7,20 | 4,10 | 0,565 | |

In der Zeit von $2^h$ 52′ bis $4^h$ 9′, also in ungefähr $1\frac{1}{4}$ Stunde, hatte die Spannung in der Batterie sich von 8,65 bis 7,20 verringert.

Die vorstehenden Versuche habe ich noch eines andern Grundes wegen ausführlich mitgetheilt; sie zeigen nämlich im Vergleich mit den später anzuführenden, welchen Einfluss die Annäherung des Körpers des Beobachters auch bei noch ziemlich grossem Abstande hat. Bei der Anlegung des Probekügelchens an den Punkt $\mu = -1$ stand ich bei den angeführten Messungen seitwärts, d. h. in einer auf der Axe der Röhre senkrechten und durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Linie so weit entfernt, dass ich mit ausgestreckten Armen mittelst des Glas- und Schellackstabes (also mittelst einer Verlängerung von 550$^{mm}$) das Probekügelchen an den bezeichneten Punkt anlegen konnte. Wenn ich das Probekügelchen an den Punkten $\mu = 0{,}0340$, $\mu = 0{,}5334$, $\mu = 0{,}8161$ u. s. w. anlegte, so stand mein Körper mehr nach der eisernen Röhre hin, und namentlich wurde der Arm, welcher das Probekügelchen anlegte, der Röhre etwas genähert. Diese Stellung meines Körpers wurde nothwendig, weil ich auf dem horizontalen grössten Kreise der Kugel

mass. So oft nun die Stellung meines Körpers und vor Allem die Annäherung des Armes fast genau dieselbe war, wie solches bei rasch auf einander folgenden, sonst mit Sorgfalt gemachten Messungen leicht der Fall sein wird, mussten die erhaltenen Werthe sehr nahe dieselben bleiben, während diess natürlich nicht mehr der Fall sein konnte, wenn die Stellung des Körpers eine andere wurde.

Um die Messungen von den im Vorstehenden angedeuteten Fehlern frei zu erhalten, brachte ich meinen Körper in allen folgenden Messungen, bei denen sonst Nichts weiter bemerkt ist, in eine möglichst von der Kugel und Röhre entfernte Stellung; und zwar stellte ich mich jedes Mal in einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden und auf der verlängerten Axe der eisernen Röhre senkrechten Linie soweit von der Kugel entfernt, dass ich bei ausgestrecktem Arme mittelst des schon mehrfach erwähnten isolirenden Stabes das Probekügelchen an die grosse Röhre und Kugel anlegen konnte.

Da bei allen Messungen der Körper und der ausgestreckte Arm möglichst genau denselben Ort seitwärts von der Kugel einnahmen, so wird der Einfluss auf die Kugel sehr nahe gleich gross geblieben sein. Um jedoch den noch vorhandenen Einfluss zu schwächen und aus den gemessenen Verhältnissen der Dicken der elektrischen Schicht möglichst auszuscheiden, nahm ich die Messungen nicht wie zuvor auf dem horizontalen, sondern auf dem vertikalen grössten Kreise der Kugel vor, dessen Ebene durch die Axe der Röhre ging. Dadurch gewann ich auch zugleich den Vortheil, das Probekügelchen stets in derselben Weise an die grosse Kugel anlegen zu können.

Da indess, wie schon angedeutet, die durch die Annäherung meines Körpers auch in der zuletzt bezeichneten Stellung hervorgebrachten Aenderungen in der Dicke der elektrischen Schicht sich nicht vollständig beseitigen liessen, so wurde es nothwendig, ihre Grösse zu bestimmen, um sie gehörigen Orts berücksichtigen zu können. Um den Betrag des Einflusses, den meine Hand und der übrige Körper auf die Kugel ausübte, zu ermitteln, blieb kein anderes Mittel übrig, als, ähnlich wie bei Beobachtungen der Schiffscompasse, den Fehler zu verdoppeln. Ich mass daher die elektrische Spannung an einem bestimmten Punkte des vertikalen, durch die verlängerte Axe der Röhre gehenden grössten Kreises zuerst in der zuvor angegebenen Weise, dann mass ich dieselbe wiederum an demselben Punkte, nachdem ein Assistent von nahe gleicher

Grösse mit mir sich auf die entgegengesetzte Seite der Kugel ebenso weit vom Mittelpunkte derselben aufgestellt hatte, und die Hände genau so gegen die Kugel ausgestreckt hielt, wie ich selbst beim Anlegen des Probekügelchens. Die elektrischen Verhältnisse mussten in allen Punkten des erwähnten vertikalen grössten Kreises durch die Anwesenheit des Gehülfen genau nochmals in derselben Weise abgeändert werden, wie solches bei sämmtlichen Messungen durch meinen eigenen Körper geschah. Eine dritte Messung wurde dann wieder wie die erste nach dem Zurücktreten des Assistenten angestellt, und das Mittel aus der ersten und dritten Messung mit der um gleiche Zeiträume von beiden abstehenden zweiten verglichen.

Durch solche Messungen ergab sich, dass die Annäherung meines Körpers in der oben bezeichneten Weise in allen Punkten des vertikalen, durch die Axe der Röhre gehenden grössten Kreises eine Zunahme der Elektricität bewirkte, deren Werth die folgende kleine Tabelle angibt. Für jeden in der ersten Spalte durch die Werthe von $\mu$ bezeichneten Punkt dieses vertikalen Kreises findet sich die zugehörige Zunahme in der zweiten Spalte.

| $\mu$. | Zunahme. |
|---|---|
| $-1,0000$ | 0,015 |
| $+0,0340$ | 0,013 |
| $+0,5334$ | 0,018 |
| $+0,8144$ | 0,016 |

Da diese Zunahmen nicht für sich allein beobachtet werden können, sondern stets nur mit der ganzen elektrischen Spannung des betreffenden Punktes vereinigt, so lässt ihre Bestimmung als Mittel aus nur wenigen, z. B. wie im vorliegenden Falle sechs bis sieben einzelnen Messungen eine geringere Genauigkeit zu, als sonst möglich wäre. Im Ganzen ergibt sich aber, dass das Verhältniss zwischen den Dicken der elektrischen Schicht in den verschiedenen Punkten des bezeichneten vertikalen grössten Kreises durch die angegebene Stellung des Körpers nicht erheblich geändert ist. Es dürfte mit den vorstehenden Angaben wohl verträglich sein, wenn für alle Punkte dieses Kreises eine gleich grosse Zunahme, welche dem Mittel obiger vier Werthe entspricht, also eine Zunahme von 0,015 angenommen wird.

Auch auf dem Punkte der eisernen Röhre, welcher auf der obern Seite um 50$^{mm}$ von der Kugelfläche absteht, habe ich die Zunahme infolge der Annäherung meines Körpers bestimmt, und erhielt aus zwei Messungen einen mit dem für die Kugel angenommenen Mittel nahe übereinstimmenden Werth.

### 5. *Ueber das Probescheibchen und Probekügelchen.*

#### a. Das Probescheibchen.

Um die Verhältnisse der Dicke der elektrischen Schicht an verschiedenen Punkten eines oder mehrerer Körper zu bestimmen, hat Coulomb sich des sogenannten Probescheibchens bedient; er befestigte ein kreisförmiges Scheibchen Goldpapier an einen Schellackfaden, berührte damit den zu untersuchenden Punkt, und setzte es nachher in die Drehwage. Der Durchmesser dieses Scheibchens betrug nach S. 437 der fünften Abhandlung Coulomb's in den Denkschriften der Pariser Akademie vom Jahr 1787, 4 bis 5 Linien. Auf S. 440 derselben Abhandlung citirt Coulomb Messungen, bei denen er elektrische Kugeln von 8 und von 4 Zoll Durchmesser mit einem solchen Scheibchen berührt. S. 629 seiner sechsten Abhandlung in den Denkschriften der Pariser Akademie vom Jahre 1788 berührt er damit die Seitenfläche eines Cylinders und dessen durch eine Halbkugel geschlossenes Ende, u. s. w. Die von dem Probescheibchen aufgenommenen Elektricitätsmengen benutzt Coulomb, um dadurch die Verhältnisse zwischen den Dicken der elektrischen Schicht im ersten Falle auf den beiden Kugeln, und im zweiten auf der Seitenfläche und der halbkugeligen Endigung des Cylinders zu erhalten.

Dieses Verfahren der Bestimmung der elektrischen Dicken beruht auf der Voraussetzung, dass das Probescheibchen bei dem Anlegen an einen Körper stets eine Elektricitätsmenge aufnimmt, welche der elektrischen Dicke der berührten Punkte proportional ist. Coulomb geht S. 673 der oben schon citirten sechsten Abhandlung auf diese Voraussetzung besonders ein, und untersucht, ob sie zulässig sei oder nicht. Er beginnt damit, nachzuweisen, wie sich die Elektricität zwischen einer Kugel von 8 Zoll Durchmesser und einer Kreisscheibe von 16 Zoll Durchmesser und $\frac{1}{2}$ Linie Dicke theilt, wenn die Kugel tangentiell mit dem Mittelpunkte der Scheibe berührt wird, und findet, dass die

Kreisscheibe der Kugel durch ihre Berührung sehr nahe zwei Drittel der Elektricität entzieht und also nur ein Drittel zurücklässt. Da nun die Kreisscheibe eine doppelt so grosse Oberfläche besitzt, als die Kugel, so scheint ihm dieser Versuch anzuzeigen, dass die elektrische Flüssigkeit sich zwischen der Kugel und Scheibe proportional ihren Oberflächen theilt.

Coulomb fährt dann fort: »Ich habe durch eine sehr grosse Zahl von Versuchen, die mit kleinern Scheiben als die vorgenannte gemacht wurden, gefunden, dass diess Resultat immer statt hat; d. h. welches auch die Durchmesser der Kugel und der Scheibe sein mochten, jedes Mal, wenn die Kugel tangentiell mit der Scheibe berührt wurde, theilte sich die auf der Kugel vorhandene Elektricität im Verhältniss der Summe beider Oberflächen der Scheibe zu der Oberfläche der Kugel. Der Versuch hat diess Resultat besonders in sehr genauer *(d'une manière très-exacte)* *) Weise bestätigt, wenn die mit der Kugel in Berührung gesetzte Scheibe einen in Bezug auf die Kugel sehr kleinen Durchmesser besass; so dass, wenn man z. B. die Kugel von 8 Zoll Durchmesser mit einem kleinen isolirten Scheibchen von 6 Lin. Durchmesser berührt, jede Seite des letztern eine elektrische Dichtigkeit erhält, wie sie die Oberfläche der Kugel besitzt, d. h. dass das kleine Scheibchen von 6 Linien Durchmesser sich mit einer Elektricitätsmenge ladet, welche doppelt so gross ist als diejenige, welche die berührte Oberfläche der Kugel besass.«

Ich muss gestehen, dass ich nicht wohl einsehe, wie Coulomb die letzte beispielsweise genannte Bestimmung mit so kleinen Scheiben hat ausführen können. Die kleine Scheibe entzieht der grossen Kugel so wenig Elektricität, dass das weiter oben beschriebene Verfahren der Berührung durchaus unbrauchbar werden musste. Coulomb gibt nun aber nicht an, dass er einen andern Weg eingeschlagen, dass er etwa die Kugel mit verschiedenen Scheiben berührt, und letztere in die Drehwage getragen, oder dass er andere Probekügelchen zu Hülfe genommen hätte u. s. w. In jedem Falle würden auch solche indirecten Wege manchen nicht unbegründeten Einwänden ausgesetzt gewesen sein, wenn nicht besondere Rücksichten dabei genommen worden wären.

*) Den Ausdruck *d'une manière très-exacte* verwandelt Biot (*Traité des Phys. et math.* II. p. 271) in *tout-à-fait exact.*

Coulomb sucht das obige für eine Kugel und Scheibe durch die Versuche erhaltene Resultat theoretisch abzuleiten, indem er sich dabei auf eine Scheibe von relativ kleinem Durchmesser, also auf ein sogen. Probescheibchen, beschränkt, und geht dann auf S. 676 der sechsten Abhandlung zu dem allgemeinen Nachweise über, dass das obige Resultat für eine solche kleine Scheibe auch seine Richtigkeit behalten soll, wenn der mit ihr berührte Körper durch eine convexe Oberfläche von beliebiger Gestalt begränzt wird. Gleich darauf fügt er ausdrücklich hinzu, dass obiges Resultat auch dann noch gelte, wenn man mit dem Probescheibchen eine grosse elektrisirte Ebene berührt. In dem folgenden Abschnitte S. 678 hebt er nochmals hervor, dass man also die elektrischen Dichtigkeiten an zwei Punkten sehr genau bestimme, wenn man dieselben nach einander mit dem Probescheibchen berühre, und das Scheibchen in der Drehwage aus gleicher Entfernung auf die elektrische Kugel des Balkens wirken lasse.

Eine genauere Erwägung der Vorgänge beim Anlegen eines solchen Probescheibchens an Oberflächen von verschiedener Krümmung lässt indess den von Coulomb allgemein aufgestellten Satz zweifelhaft erscheinen, und die von mir in dieser Beziehung angestellten Versuche zeigen, dass derselbe nicht richtig sein kann. Wenn der Coulomb'sche Satz richtig wäre, so müssten z. B. 2 ungleichgrosse Probescheibchen, welche an bestimmte Punkte zweier mit einander in vollkommen metallischer Verbindung stehenden Kugeln von verschiedenen Durchmessern angelegt werden, dasselbe Verhältniss der elektrischen Dichtigkeiten für diese Punkte geben. Mit dem Innern einer Batterie aus vier grossen Flaschen stand einerseits eine Kugel von 117,91$^{mm}$, welche von einer eisernen Röhre von 38,1$^{mm}$ Durchmesser getragen wurde, und andererseits eine Kugel von 20,12$^{mm}$ Durchmesser, befestigt an einer Röhre von 6,5$^{mm}$ Durchmesser, in Verbindung. Es wurden nun an die vordersten Punkte beider Kugeln, also an die Punkte, welche die verlängerten Axen der Röhren trafen, Probescheibchen vom Durchm. 9,0, 13,6, 18,0, 22,3 und 26,7$^{mm}$ angelegt. Mit diesen verschiedenen Scheibchen wurden die in nachstehender Tabelle enthaltenen Dichtigkeitsverhältnisse gefunden. Beiläufig will ich übrigens bemerken, dass die folgenden Messungen, auch wenn sonst Nichts entgegenstände, zur absoluten Bestimmung des Verhältnisses der an den bezeichneten Punkten vorhandenen Elektricität nicht dienen könnten, weil die Kugeln nicht weit genug von den um-

gebenden Leitern entfernt waren. Für die vorliegende Untersuchung ist es aber gleichgültig, ob die äussern Umgebungen auf die Kugeln noch einen schwachen Einfluss ausüben oder nicht, wenn dieser Einfluss nur immer derselbe ist; letzteres fand in den nachstehenden Messungen statt.

| Durchmesser des Probescheibchens. | Dichtigkeit im vordersten Punkte der kleinen Kugel. | Dichtigkeit im vordersten Punkte der grossen Kugel. |
|---|---|---|
| 9,0$^{mm}$ | 1 | 0,184 |
| 13,6 | 1 | 0,195 |
| 18,0 | 1 | 0,210 |
| 22,3 | 1 | 0,212 |
| 26,7 | 1 | 0,214 |

Diese Versuche beweisen also, dass man mit verschiedenen Probescheibchen, selbst wenn ihre Durchmesser (wie bei den beiden ersten) innerhalb des von Coulomb beispielsweise angeführten Werthes (6 Linien) liegen, doch verschiedene Verhältnisse findet, was nothwendig darauf hindeutet, dass die von den Scheibchen aufgenommene Elektricität nicht streng durch das von Coulomb ausgesprochene Gesetz bestimmt wird. Aller Wahrscheinlichkeit nach lässt sich die Allgemeinheit des Coulomb'schen Satzes auch nicht dadurch retten, dass man die Abweichung von demselben in den vorstehenden Versuchen auf Rechnung der ungleichen Vertheilung der Elektricität auf den Kugeln zu setzen sucht. Für die grosse Kugel ändert sich nämlich die elektrische Dichtigkeit innerhalb eines Kreises von 6,8$^{mm}$ Halbmesser um ihren vordersten Punkt nur unmerklich; anders ist diess auf der kleinen Kugel für einen Kreis von gleichem Halbmesser um ihren vordersten Punkt. Setzen wir z. B. das kleinste Scheibchen hätte das richtige Verhältniss geliefert, indem innerhalb eines Kreises von 4,5$^{mm}$ Halbmesser sich auch vorn auf der kleinen Kugel die Elektricität wenig ändert, so würde allerdings, wenn ein Scheibchen stets doppelt so viel Elektricität aufnehmen soll, als die Fläche der Kugel, welche es deckt, die durch Anlegen an die kleine Kugel von dem Scheibchen von 13,6$^{mm}$ Durchmesser aufgenommene Elektricitätsmenge relativ geringer sein müssen, als die von dem Scheibchen von 9$^{mm}$ Durchmesser aufgenommene, und infolge dessen, weil für die grosse Kugel eine solche Verringerung noch nicht eintritt, das Verhältniss der Dichtigkeiten auf beiden Kugeln beim Messen

mit der grössern Scheibe so abgeändert werden, dass die Dichtigkeit auf der grossen Kugel grösser erschiene, wie diess in den obigen Messungen sich zeigt. Dann müsste aber das kleinste Scheibchen ein der Wahrheit mehr genähertes Verhältniss geben; weshalb man also im vorliegenden Falle das wahre Verhältniss der Dichtigkeiten unterhalb 0,184 zu suchen hätte; was jedoch, wenn man den erwähnten Einfluss der Umgebungen vernachlässigen dürfte, spätern Versuchen widersprechen würde.

Eine specielle Untersuchung über das Verhalten des Probescheibchens nach den Messungen Coulomb's ist zweifelsohne nicht allein wegen der experimentellen Angaben Coulomb's, sondern ebenso, wenn nicht vielleicht noch mehr, wegen der beigefügten theoretischen Ableitung derselben (S. 677 der sechsten Abhandlung) unterlassen worden; indess sind auch die von Coulomb diesem Beweise zu Grunde gelegten Annahmen unstatthaft.

Die Schlussfolgerung, durch welche Biot (*Traité de phys. exp. et math.* Bd. 2, S. 269) den Gebrauch des Probescheibchens zur Bestimmung der elektrischen Dichtigkeit rechtfertigen will, ist, wie man sogleich erkennen wird, nicht begründet. Biot führt den Versuch an, dass wenn man das Ende und die Mitte der Seitenfläche eines Cylinders mit dem Probescheibchen berührt, und die Menge der von ihm aufgenommenen Elektricität misst, dann den Cylinder mit einem zweiten, genau gleichen nicht elektrischen symmetrisch berührt, und die genannten Berührungen und Messungen wieder ausführt, man dann genau die Hälfte der vorhergehenden Elektricitätsmengen findet. Er fügt hinzu, dass sich hieraus zwei Folgerungen ziehen lassen: 1) dass bei der Vermehrung der Elektricität eines Leiters die auf jedem Elemente der Oberfläche vorhandene Elektricitätsmenge der gesammten Elektricitätsmenge proportional ist, und 2) dass das Probescheibchen als unendlich klein im Verhältniss zur ganzen Oberfläche des Leiters betrachtet, an jedem Punkte dieser Oberfläche stets eine Elektricitätsmenge aufnimmt, welche der auf dem berührten Elemente angehäuften proportional ist. Der zweite Satz folgt aber in seiner Allgemeinheit nicht aus jenem Versuche.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich, dass die Probescheibchen zur Bestimmung des Dichtigkeitsverhältnisses an zwei Punkten auf verschieden gekrümmten Oberflächen untauglich sind, da die mathematische Analyse bis jetzt kein Mittel gewährt, um die vorhandenen Fehler aus-

zuscheiden. Auch Riess (*Die Lehre von der Reibungselektricität* Bd. 1. S. 164) äussert sich gelegentlich: »Die Prüfungsscheibe bei Flächen von sehr verschiedener Krümmung anzuwenden, ist ebenfalls misslich.«

**b. Das Probekügelchen.**

Anstatt des Probescheibchens hat sich Coulomb auch der Kugeln bedient, um die Dicke der elektrischen Schicht an einem Punkte zu bestimmen, und später scheinen die Kugeln sogar mehr als die Scheiben zu solchen Messungen gebraucht worden zu sein. Auch bei ihnen ist die Frage: Können sie zur Bestimmung der Dicke der elektrischen Schicht an Stellen von verschiedenen Krümmungen dienen? eine noch unbeantwortete. Ich erinnere mich einen dahin zielenden Ausspruch allein bei Riess (S. 157 des zuvorgenannten Werkes) gefunden zu haben, wo derselbe bei Veranlassung der Bestimmung der elektrischen Anordnung auf einem Würfel sagt: »Die Messungen der Dichtigkeit auf der scharfen Kante und Ecke des Würfels haben mit denen auf der Fläche nicht gleiche Genauigkeit, theils der mangelhaften Beschaffenheit dieser Stellen wegen, theils desshalb, weil die Proportionalität der daselbst aufgenommenen zu der vorhandenen Elektricitätsmenge nicht erwiesen ist.«

Dass das Probekügelchen zur Bestimmung des Verhältnisses der elektrischen Dicken an Stellen von verschiedenen Krümmungen im Allmeinen ebenso wenig geeignet ist, als das Probescheibchen, ja dass bei Vergrösserung des Durchmessers der Probekugel die Abweichungen in den gefundenen Verhältnissen selbst noch grösser werden als bei Anwendung der Scheiben, davon kann man sich leicht durch Versuche überzeugen. Während die beiden oben schon genannten Kugeln von 117,91$^{mm}$ und 20,12$^{mm}$ Durchmesser durch ihre Röhren unter einander und mit einer elektrischen Batterie zusammenhingen, wurden für die Dicken der elektrischen Schicht an den vordersten Punkten auf diesen Kugeln folgende Resultate erhalten, wenn die Probekügelchen die in der ersten Reihe der nachstehenden kleinen Tabelle angeführte Grösse besassen.

| Durchmesser des Probekügelchens. | Dicke der elektrischen Schicht im vordersten Punkte der kleinen Kugel. | grossen Kugel. |
|---|---|---|
| 11,65mm | 1 | 0,318 |
| 3,47 | 1 | 0,241 |
| 3,20 | 1 | 0,241 |
| 2,50 | 1 | 0,234 |
| 1,67 | 1 | 0,230 |
| 1,45 | 1 | 0,230 |
| 0,90 | 1 | 0,211 |

Je nach der Grösse des Kügelchens werden also sehr verschiedene Verhältnisse für diese Dicken erhalten, und unter diesen wird keines das richtige sein.

Wenn es sich um die Bestimmung der elektrischen Dicken auf einer Kugel und einer cylindrischen Röhre, wie später der Fall eintreten wird, handelt, so kann das Probekügelchen wohl dienen, um die Verhältnisse der Dicken in verschiedenen Punkten der Kugel oder in verschiedenen Punkten der Röhre zu ermitteln; bei dem jetzigen Standpunkte der mathematischen Elektricitätslehre ist es aber nicht möglich, einen durch dasselbe auf der Kugel gefundenen Werth mit einem auf der Röhre gemessenen zu vergleichen. Das Probekügelchen nimmt nämlich an beiden Oberflächen Elektricitätsmengen auf, die zu den an den berührten Stellen vorhandenen in verschiedenen Verhältnissen stehen, und die mathematische Analyse liefert noch nicht die Mittel, um diese Verhältnisse zu bestimmen und darnach die gemessenen Werthe corrigiren zu können. Wenn später die Kenntniss der elektrischen Dicke auf einer Kugel und der sie tragenden Röhre nothwendig wird, so sind wir gezwungen, diesen Werth auf ganz anderm Wege auszumitteln.

Nur einen Fall gibt es, in welchem sich jetzt schon ein kleines Probekügelchen auch zur Bestimmung der elektrischen Dicken auf Oberflächen von verschiedenen Krümmungen gebrauchen lässt; es wird diess möglich, wenn die Oberflächen Kugelflächen sind und die Dicke der elektrischen Schicht sich rings um die Punkte derselben, für welche die Messungen gemacht werden sollen, gar nicht oder nur sehr langsam ändert.

Zwei solche Punkte, in deren Nähe sich die elektrischen Dicken fast gar nicht ändern, sind nun z. B. die vordersten Punkte der obigen beiden Kugeln von 117,91 und 20,12mm Durchmesser, wenn sie durch ihre Röhren mit einer elektrischen Batterie verbunden sind. Meinen

Ausspruch, dass zur Bestimmung ihrer relativen Dichtigkeit ein kleines Probekügelchen anwendbar sei, werde ich auf folgende Weise rechtfertigen.

Wenn ein kleines Probekügelchen an einen Punkt einer elektrischen Kugel angelegt wird, so wird die von ihm aufgenommene Elektricitätsmenge vorzugsweise von der Dicke der elektrischen Schicht in dem berührten Punkte und seinen allernächsten Umgebungen abhängen. Da die Elektricität auf der Kugel und ihrem sonstigen Anhange im Gleichgewichte ist, so ist die Dicke der elektrischen Schicht an jedem Punkte das Resultat aus den Wirkungen aller Theile der Kugel und der sie tragenden Röhre. Diess gilt also auch von dem vordersten Punkte der Kugel, und beispielsweise sei die Dicke der elektrischen Schicht an diesem Punkte $= \alpha$. Diese Dicke $\alpha$ in dem vordersten Punkte wird nun aber ungeändert bleiben, wenn man anstatt der Kugel mit ihrem Anhange eine blosse Kugel von gleichem Halbmesser setzt, und ihrer Oberfläche überall die Dichtigkeit $\alpha$ beilegt; dann ist die Elektricität auf dieser Kugel wieder im Gleichgewichte, und den Theil der Wirkung auf den vordersten Punkt, den sonst die auf der Röhre ausgebreitete Elektricität ausübte, wird jetzt die auf der hintern Seite der Kugel bis zur Dicke $\alpha$ vermehrte Elektricitätsschicht liefern. Wenn man nun an diese isolirte Kugel, deren Oberfläche die constante Dichtigkeit $\alpha$ besitzt, das kleine Probekügelchen anlegt, so wird es von dieser Kugel eine Elektricitätsmenge aufnehmen, welche der an dem vordersten Punkte der mit der Röhre versehenen Kugel, wo die Dicke ebenfalls $\alpha$ ist, aufgenommenen Menge bis auf eine sehr kleine Grösse gleichkommt, wenn die elektrische Dicke sich in der Nähe dieses Punktes nur sehr wenig ändert. Auf einer Kugel von $20{,}12^{mm}$ Durchmesser, die von einer Röhre von $6{,}5^{mm}$ Durchmesser getragen wird, ändert sich die Dicke der elektrischen Schicht von dem vordersten Punkte bis auf 10 Millimeter Entfernung erst um 0,04; in der nächsten Umgebung dieses Punktes wird sich dieselbe also nur äusserst wenig ändern, und ein Probekügelchen von $3^{mm}$ oder geringerem Durchmesser muss an diesem Punkte, wo die elektrische Dicke $\alpha$ ist, bis auf eine sehr kleine Grösse dieselbe Elektricitätsmenge aufnehmen, als wenn es eine Kugel von gleichem Durchmesser und mit Elektricität von der constanten Dicke $\alpha$ bedeckt berührt hätte. Was von der Kugel von $20{,}12^{mm}$ Durchmesser ausgesagt wurde, gilt noch um so mehr von der Kugel von $117{,}91^{mm}$ Durchmesser.

Das Vorstehende spricht nur aus, dass ein kleines Probekügelchen, welches an Punkte von Kugelflächen angelegt wird, in deren Nähe sich die Dicke der elektrischen Schicht äusserst wenig ändert, durch diese Berührung eine gleiche Menge von Elektricität aufnimmt, wie durch Anlegen an eine Kugelfläche von gleichem Durchmesser, die überall eine jenem berührten Punkte gleiche Elektricität besitzt; es sagt aber durchaus nicht, dass diese an Kugeln von verschiedenen Durchmessern aufgenommenen Elektricitätsmengen auch so fort das Verhältniss der Dicken der elektrischen Schicht an den berührten Punkten ausdrücken. Indess ist es jetzt, nachdem die Berührung einer Kugel mit veränderlicher elektrischer Dicke auf eine mit constanter Dicke reducirt ist, leicht, mit Hülfe der mathematischen Untersuchungen Poisson's aus den von dem Probekügelchen aufgenommenen Elektricitätsmengen die wahren Verhältnisse der elektrischen Dicken an den berührten Punkten herzuleiten.

Poisson behandelt in seiner ersten Abhandlung über die Vertheilung der Elektricität auf der Oberfläche von Leitern den Fall, wo zwei Kugeln einander berühren, und gibt S. 61 derselben das Verhältniss an, in welchem die Elektricität sich zwischen ihnen theilt. Wird der Halbmesser der grössern Kugel $= 1$ gesetzt, und der Halbmesser der kleinen in diesem Maasse ausgedrückt mit $b$ bezeichnet, so erhält man das Verhältniss $\sigma$ der Dicken, in welchem sich die Elektricität zwischen beiden Kugeln theilt

$$\sigma = \frac{1}{b^2} + \frac{\pi \operatorname{cotg} \frac{\pi}{1+b}}{b^2 \int \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t}\, dt}$$

wo das Integral von $t = 0$ bis $t = 1$ zu nehmen ist; oder falls $b$ eine kleine Grösse ist, angenähert:

$$\sigma = \frac{1}{(1+b)^2} \left\{ 1{,}6449 + 1{,}2020 \frac{b}{1+b} + 0{,}2742 \left(\frac{b}{1+b}\right)^2 \right\}.$$

Eine Tafel für $\sigma$, entsprechend den Werthen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ u. s. f. bis $\frac{1}{15}, \frac{2}{15} \cdots \frac{14}{15}$, und schliesslich $\frac{1}{20}$ hat Plana auf S. 373 ff. in seinem *Mémoire sur la distribution de l'électricité etc.* (*Memorie della accademia delle scienze di Torino*, zweite Reihe, Bd. 7) mitgetheilt, und Riess hat die berechneten Resultate Plana's sehr zweckmässig nach abnehmenden Werthen von $b$ umgestellt und dem ersten Bande seiner Lehre von der Reibungselektricität angehangen. Schreitet auch das Argument $b$ dieser Tafel in sehr ungleicher Weise fort, so kann dieselbe doch in

der von Riess ihr gegebenen Gestalt dienen, um mit Bequemlichkeit durch Interpolation angenäherte Werthe von $\theta$ für einen innerhalb dieser Tafel liegenden Werth von $b$ zu erhalten. Plana hat in seiner Tafel die Werthe von $\theta$ für $b < 0,05$ nicht berechnet; indess lassen sich diese Werthe mit Leichtigkeit nach der zweiten obigen Formel mit hinreichender Genauigkeit finden.

Unter Zuziehung der Werthe von $\theta$ sind wir nun im Stande aus den von einem Probekügelchen bei der Berührung zweier verschieden gekrümmten Kugelflächen aufgenommenen Elektricitätsmengen das wahre Verhältniss der an den berührten Punkten vorhandenen Elektricität abzuleiten. Der Kürze wegen will ich das Gesagte an speciellen Beispielen nachweisen.

Wenn durch $b$ das Verhältniss des Halbmessers der kleinern Kugel (von 20,12$^{mm}$ Durchmesser) und des Probekügelchens, durch $b'$ das Verhältniss des Halbmessers der grössern Kugel (von 117,91$^{mm}$ Durchmesser) und desselben Probekügelchens, durch $\theta$ das Verhältniss der elektrischen Dicken nach der Theilung der Elektricitätsmengen zwischen dem Probekügelchen und der kleinern Kugel, und durch $\theta'$ das entsprechende Verhältniss nach der Theilung zwischen demselben Probekügelchen und der grössern Kugel bezeichnet wird, so kann man die zusammengehörigen Werthe in folgender Tafel zusammenstellen.

| Durchmesser des Probekügelchens. | $b$ | $b'$ | $\theta$ | $\theta'$ |
|---|---|---|---|---|
| 11,65$^{mm}$ | 0,579 | 0,0988 | 1,125 | 1,478 |
| 3,47 | 0,172 | 0,0294 | 1,388 | 1,585 |
| 3,20 | 0,159 | 0,0271 | 1,400 | 1,590 |
| 2,50 | 0,1243 | 0,0212 | 1,440 | 1,601 |
| 1,67 | 0,0830 | 0,0142 | 1,510 | 1,616 |
| 1,45 | 0,0721 | 0,0123 | 1,517 | 1,620 |
| 0,91 | 0,0447 | 0,0076 | 1,555 | 1,629 |

Die Werthe von $\theta$ und $\theta'$ drücken also die Verhältnisse der constanten Dicken der elektrischen Schichten aus, mit denen beide Kugeln bedeckt sind, wenn sie nach der Berührung von einander getrennt und hinreichend weit von einander und von allen sonstigen Leitern entfernt werden. Ist also z. B. die Dicke der elektrischen Schicht auf der grossen Kugel von 117,91$^{mm}$ Durchmesser nach der Trennung $= x$, so wird das

Probekügelchen von 3,20$^{mm}$ nach der Trennung die constante Dicke 1,590 . $\varkappa$ besitzen. Da sein Radius = 3,20$^{mm}$, so beträgt die von ihm aufgenommene Elektricitätsmenge, nach Poisson's Weise gerechnet, $4\pi . 3{,}20^2 . 1{,}590 . \varkappa$, und diese Elektricitätsmenge ist dem oben S. 502 mitgetheilten Werthe 0,241 proportional. Ist auf der kleinern Kugel vom Durchmesser 20,12$^{mm}$ die Dicke der elektrischen Schicht nach der Trennung = $\lambda$, so wird sie auf derselben Prüfungskugel $1{,}400 . \lambda$; die von ihr aufgenommene Elektricitätsmenge $4\pi . 3{,}20^2 . 1{,}400 . \lambda$ ist aber nach S. 502 gleich 1, wenn die von der grossen Kugel aufgenommene = 0,241 ist. Man erhält also

$$4\pi . 3{,}20^2 . 1{,}590 . \varkappa : 4\pi . 3{,}20^2 . 1{,}400 . \lambda = 0{,}241 : 1$$

oder

$$\frac{\varkappa}{\lambda} = \frac{1{,}400}{1{,}590} 0{,}241 .$$

Das wahre Verhältniss der elektrischen Dicken auf den beiden Kugeln ergibt sich folglich, wenn man das Verhältniss der Elektricitätsmengen, welche das Probekügelchen an den beiden Kugeln aufnimmt, mit dem Verhältniss $\frac{\delta}{\delta'}$ multiplicirt.

Nun wird aber nach dem Vorhergehenden diess Verhältniss nicht geändert, wenn anstatt der beiden Kugelflächen mit constanter Dicke die vordersten Punkte der beiden von Röhren getragenen Kugeln berührt werden. Die angegebene Correction liefert also auch für diesen Fall das wahre Verhältniss.

Um auch durch das Experiment die Richtigkeit dieser Correction zu beweisen, will ich die obigen Versuche sämmtlich auf die vorhergehende Weise berechnen. Aus den oben S. 502 angeführten beobachteten Werthen für die elektrischen Dicken ergeben sich dann folgende verbesserte:

| Durchmesser des Probekügelchens. | Beobachtet. | Berechnet. | Mittel. |
|---|---|---|---|
| 11,65$^{mm}$ | 0,318 | 0,242 | |
| 3,47 | 0,241 | 0,211 | 0,213 |
| 3,20 | 0,241 | 0,212 | |
| 2,50 | 0,234 | 0,211 | |
| 1,67 | 0,230 | 0,215 | |
| 1,45 | 0,230 | 0,215 | |
| 0,90 | 0,211 | 0,206 | |

Dieser Tafel muss ich folgende Bemerkungen beifügen: Man sieht, dass

die Probekügelchen von der zweiten bis einschliesslich zur sechsten einen von dem Mittel 0,213 nur wenig abweichenden Werth geben, wodurch also die Anwendbarkeit der obigen Correction auch experimentell erwiesen ist. Der verbesserte Werth der ersten Kugel weicht dagegen stark ab, ein Beweis, dass für so grosse Probekugeln, deren Durchmesser mehr als die Hälfte der einen berührten Kugel beträgt, die obigen Voraussetzungen nicht mehr gelten. Die siebente Kugel war aus feinem Silberdrahte an der Lampe geschmolzen und weder vollkommen rund, noch auch auf ihrer Oberfläche vollständig glatt; hie und da zeigte sie kleine blasige Vertiefungen. Dieses Mangelhafte in ihrer Gestalt ist der Grund der Abweichung ihres verbesserten Werthes 0,206 vom Mittel; dass ihr nicht verbesserter Werth 0,211 nahe mit diesem Mittel übereinstimmt, ist also nur zufällig. Die Probekügelchen 3, 4, 5 und 6 waren Körner von Bleischrot; aus grösseren Mengen waren die vollkommensten ausgelesen. Das Probekügelchen 2 war auf der Drehbank aus Messing gedreht und nach Möglichkeit überall gleichmässig gerundet.

Ich glaube mich nicht zu täuschen, wenn ich noch zufüge, dass man bei einem so kleinen Probekügelchen von $1,45^{mm}$ Durchmesser eine so starke Verbesserung des einen Gliedes des Verhältnisses 1 : 0,230 um 0,015 wohl nicht erwartet hat.

Die vorstehenden Messungen und Berechnungen zeigen, wie gross das Probekügelchen sein darf, um bei gegebenen von Röhren oder Stäben getragenen Kugeln, welche mit demselben an ihren vordersten Punkten berührt werden sollen, noch die Verbesserungen mit Erfolg anbringen zu können; jedenfalls wird es zweckmässig sein, dem Probekügelchen einen Durchmesser zu geben, welcher kleiner ist, als der sechste Theil des Durchmessers der Kugeln.

Man kann indess durch Umstände genöthigt werden, bisweilen grössere Probekügelchen anzuwenden. Gesetzt die eine Kugel hänge an einem langen dünnen Drahte: so lässt sich die mit ihr verbundene Batterie nur bei einer gewissen geringen Spannung ziemlich constant erhalten; ladet man sie stärker, so sinkt die Spannung sehr schnell auf diesen geringen Werth. Ist nun das Probekügelchen sehr klein, so wird möglicherweise die von ihm aufgenommene Elektricitätsmenge zu gering, um mit dem gerade vorhandenen Elektrometer genau gemessen werden zu können. Wendet man dann aber ein grösseres Probekügelchen an, so muss man die Correction für dasselbe bestimmen durch Vergleichung

der von ihm gelieferten Werthe mit den durch ein kleineres Probekügelchen erhaltenen, wenn man beide Kugeln wieder unter sehr nahe gleichen Umständen, wo sie aber eine stärkere Ladung der Batterie gestatten, mit beiden Probekügelchen berührt, wenn man also z. B. um den Elektricitätsverlust zu verringern, den Draht der einen Kugel etwas dicker und kürzer nimmt.

6. *Vertheilung der Elektricität auf der Kugel von 117,91mm Durchmesser, wenn dieselbe an einer Röhre von 38,12mm Dicke befestigt ist.*

Als Mittelwerthe aus mehr als 10 Messungen an jedem Punkte der an ihrer Röhre befestigten Kugel von 117,91mm Durchmesser habe ich folgende Verhältnisse der Dicken der elektrischen Schicht erhalten:

| $\mu$. | Dicke der elektrischen Schicht. |
|---|---|
| — 1,0000 | 1,000 |
| — 0,4743 | 0,964 |
| + 0,0340 | 0,901 |
| + 0,5334 | 0,773 |
| + 0,7341 | 0,650 |
| + 0,8164 | 0,553 |
| + 0,9464 | 0,000 |

7. *Vertheilung der Elektricität auf der eisernen Röhre von 38,12mm Dicke, wenn sie die Kugel von 117,91mm Durchmesser trägt.*

In der ersten Spalte der folgenden Tabelle stehen die Entfernungen von dem Ende der Röhre, welches die Kugel berührt; in der zweiten die Dicken der elektrischen Schicht, die Dicke im vordersten Punkte der Kugel gleich 1 gesetzt. Die Angaben sind die Mittel aus drei Messungen für jeden Punkt. Diese Werthe sind indess mit den vorstehenden auf der Kugeloberfläche noch nicht vergleichbar, weil das Probekügelchen bei der Berührung der Kugelfläche und der Cylinderfläche nicht in gleichem Verhältnisse Elektricität aufnimmt. Unter sich sind die Zahlen der zweiten Spalten in aller Strenge vergleichbar. Um durch die isolirende Stütze keine merklichen Störungen hervorzurufen, stand dieselbe während dieser Versuche 700mm von dem Ende der Röhre, welches die Kugel berührte, entfernt.

| Entfernung von dem Ende der Röhre. | Dicke der elektrischen Schicht. |
|---|---|
| 25mm | 0,605 |
| 50 | 0,713 |
| 100 | 0,859 |

Früher angestellte Messungen, bei welchen zwar nicht mit derselben Sorgfalt wie bei den eben angeführten darauf geachtet worden war, dass ich meinem Körper stets dieselbe Stellung gegen die Kugel und Röhre gab, die aber doch nur einen geringen Einfluss von Seiten meines Körpers erfahren haben können, da ich bei möglichster Entfernung desselben das Probekügelchen auf nach oben gewandte Punkte der Röhre anlegte, haben folgende Resultate geliefert. Die Angaben sind die Mittel aus zwei oder drei Messungen für jeden Punkt. Die vordere isolirende Stütze stand bei diesen Messungen 525mm, und die zweite 850mm vom Ende der Röhre entfernt.

| Entfernung von dem Ende der Röhre. | Dicke der elektrischen Schicht. |
|---|---|
| 12,5mm | 0,451 |
| 25 | 0,595 |
| 50 | 0,712 |
| 75 | 0,766 |
| 100 | 0,790 |
| 200 | 0,828 |
| 300 | 0,860 |

Man sieht, dass die Dicken der elektrischen Schicht auf der Röhre von dem die Kugel berührenden Ende anfangs rascher, dann aber langsamer zunehmen und sich dem Grenzwerthe 0,859 nähern.

8. *Vertheilung der Elektricität auf derselben Kugel, wenn sie an einem dünnen Messingdrahte von* 0,125mm *Durchmesser aufgehangen ist.*

Die Messung der Elektricität auf der an einem dünnen Drahte hängenden Kugel war mit zwei Uebelständen verbunden: erstens war die leichte Beweglichkeit der Kugel seitwärts, und zweitens das Hinundherschwingen und Umdrehen hinderlich. Letztere Bewegungen machten besonders an solchen Punkten, an welchen sich die Elektricität rasch ändert, ihre Messung schwierig, während der erste Umstand vorzugs-

weise bei Messungen auf dem grössten Kreise, welcher auf der Richtung des Aufhängedrahtes senkrecht stand (für welchen $\mu = 0$ war), eintrat. Der geringe Widerstand, welchen die hohle Kugel dem an ihre Seite angelegten Probekügelchen entgegensetzte, war oft nicht hinreichend, um eine vollständige Leitung an dem Berührungspunkte herzustellen. Es half ein frisches Putzen der Kugeln an den zur Berührung kommenden Punkten, und ein mehrmaliges Berühren oder Anschlagen mit dem Probekügelchen; was um so eher hier geschehen konnte, da die Dicke der elektrischen Schicht in der Gegend des genannten Kreises sich nur sehr langsam ändert. Ein Nichtbeachten der angegebenen Vorsichtsmaassregeln kann Werthe liefern, die aller sonstigen Sorgfalt ungeachtet um drei Procent unter den wahren liegen.

Als Mittelwerthe aus wenigstens 8 Beobachtungen habe ich erhalten:

| $\mu$. | Dicke der elektrischen Schicht. |
|---|---|
| — 1,0000 | 1,000 |
| + 0,0340 | 0,966 |
| + 0,5334 | 0,921 |
| + 0,9056 | 0,819 |
| + 0,9658 | 0,754 |
| + 0,99 . . | 0,000 |

Die Vermehrung in der Dicke der elektrischen Schicht, welche im Punkte $\mu = -1$ durch die Annäherung meines Körpers und meiner Hand beim Anlegen des Probekügelchens erzeugt wurde, betrug 0,018. Ich liess bei dieser Bestimmung einen Assistenten das Probekügelchen an den bezeichneten Punkt legen, während ich selbst abwechselnd der Kugel mich näherte, als wollte ich ebenfalls das Probekügelchen anlegen, und dann wieder entfernte. Man darf bei der Bestimmung dieses Einflusses sich nicht mit ungefähren Annäherungen begnügen. Als ich mit dem Assistenten die Rollen umtauschte, erhielt ich eine Vermehrung von mehr als 0,025. Der Grund hiervon lag darin, dass ich die Stellung des hülfeleistenden Assistenten, dessen Arme bei kleinerer Statur viel kürzer waren als die meinigen, so abgemessen hatte, dass seine Hände ebensoweit von der Kugel abstanden als die meinigen; dadurch war aber sein ganzer Körper der Kugel näher gekommen als der meinige, und musste folglich die Dicke der elektrischen Schicht in einem stärkern Grade vermehren.

## VIII. Aenderung der elektrischen Vertheilung auf der Oberfläche von Kugeln und den sie tragenden Stäben durch die Annäherung von leitenden Flächen.

Die Construction der Drehwage, wie sie nachher beschrieben werden soll, erforderte die Kenntniss der Einwirkungen, welche mit der Erde in leitender Verbindung stehende Oberflächen auf die Kugeln und Stäbe der Drehwage ausüben; sei es nun, um diese Einwirkungen, wofern es zulässig, in genäherter Weise in Rechnung ziehen zu können, oder um die Verhältnisse so zu wählen, dass jene Einflüsse als unbeträchtlich nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Da für solche Fälle, wie sie der vorliegende darbot, wo die erwähnten Kugeln und Stäbe mit einer gewissermassen unerschöpflichen Elektricitätsquelle in Verbindung stehen, bis jetzt keine Versuche vorliegen, so werde ich in diesem Abschnitte wenigstens einen Theil der von mir gemessenen Einwirkungen mittheilen.

### 1. *Vertheilung der Elektricität auf der Kugel von 117,91$^{mm}$ Durchmesser, als sie an der 38,12$^{mm}$ im Durchmesser haltenden eisernen Röhre befestigt war, und ihr eine metallische Ebene, welche senkrecht auf der verlängerten Axe der Röhre stand, genähert wurde.*

Um eine möglichst ausgedehnte metallische Ebene zu erhalten, überzog ich eine grosse hölzerne Wandtafel von 1460$^{mm}$ Länge und 850$^{mm}$ Breite mit Kupferpapier und setzte diese metallische Ebene mit der Erde in Verbindung. Durch Annäherung derselben an die Kugel, dergestalt dass die verlängerte Axe der Röhre die Mitte der Tafel senkrecht traf, wurde die Vertheilung der Elektricität auf der Kugel abgeändert, und zwar wurde die Elektricität überall vermehrt. Die Aenderungen in der Dicke der elektrischen Schicht wurden auf die Weise gemessen, dass zuerst bei Abwesenheit der Tafel die Dicke der elektrischen Schicht auf der Kugel von 117,19$^{mm}$ Durchmesser mit der Dicke der elektrischen Schicht auf einer zweiten am entgegengesetzten Ende der Batterie befindlichen Kugel verglichen wurde. Eine Annäherung der Tafel an die erste Kugel übte bei der grossen Entfernung auf die Vertheilung der Elektricität auf der zweiten Kugel keinen Einfluss aus, während dieselbe auf der ersten sich änderte. Die so abgeänderte Dicke der elektrischen Schicht im vordersten Punkte der ersten Kugel wurde dann mit der unverändert gebliebenen Dicke an einem bestimmten Punkte der zweiten Kugel verglichen.

Das Verhältniss der Dicke der elektrischen Schicht an einem bestimmten Punkte der zweiten Kugel zu der auf der ersten im Punkte $\mu = -1$, fand sich, wenn die Tafel entfernt war, wie 1 : 0,807.

Als die mit Kupferpapier überzogene Tafel der ersten Kugel bis auf 520,5$^{mm}$ Abstand vom Mittelpunkte genähert wurde, hatte sich das vorstehende Verhältniss in 1 : 0.846 verwandelt, so dass also durch die Annäherung der leitenden Ebene bis auf die angegebene Weite die Dicke der elektrischen Schicht in dem Punkte der ersten Kugel $\mu = -1$, sich im Verhältniss von 1 : 1,048 vermehrt hatte.

Mit der Dicke der elektrischen Schicht in dem Punkte $\mu = -1$ wurde nun bei demselben Abstande der leitenden Ebene die Dicke der elektrischen Schicht an andern Punkten der ersten Kugel verglichen, und es ergab sich

| $\mu$. | Dicke der elektrischen Schicht. |
|---|---|
| — 1,0000 | 1,000 |
| — 0,4743 | 0,958 |
| + 0,0340 | 0,887 |
| + 0,5334 | 0,755 |
| + 0,9464 | 0,000 |

Die Zahlen der zweiten Spalte sind das Mittel aus sieben Messungen an jedem Punkte. Die Verhältnisse weichen, wie man sieht, etwas von den bei Abwesenheit der leitenden Ebene gefundenen ab, und zwar ist, wie es sein muss, die Dicke der elektrischen Schicht in den nach $\mu = -1$ gelegenen Theilen verhältnissmässig grösser geworden. Da die Zunahme in der Dicke der elektrischen Schicht für den Punkt $\mu = -1$ bekannt ist, so lässt sich dieselbe auch für die übrigen in der ersten Spalte bezeichneten Punkte finden. Durch Multiplication mit 1,048 erhält man die bei Annäherung der leitenden Ebene vorhandenen Dicken, wenn die im Punkte $\mu = -1$ bei Abwesenheit derselben gemessene = 1 gesetzt wird.

| $\mu$. | Dicke der elektrischen Schicht. | Zunahme. |
|---|---|---|
| — 1,0000 | 1,048 | 0,048 |
| — 0,4743 | 1,004 | 0,040 |
| + 0,0340 | 0,930 | 0,029 |
| + 0,5334 | 0,791 | 0,018 |
| + 0,9464 | 0,000 | 0,000 |

Die Differenzen der in der zweiten Spalte verzeichneten und der auf S. 508 mitgetheilten Werthe geben die in der dritten Spalte angeführten Zunahmen. Diese Zunahmen sind auf der von der leitenden Ebene abgewandten Seite der Kugel nur gering.

Als die mit Goldpapier beklebte Tafel der Kugel bis auf eine Entfernung von 260$^{mm}$ genähert wurde, so fand sich die Dicke der elektrischen Schicht im Punkte $\mu = -1$ im Verhältniss von 1 : 1,179 vermehrt. Die durch Annäherung der Tafel bewirkte Zunahme betrug demnach 0,179. Die Entfernung 260$^{mm}$ ist die Hälfte der frühern 520,5$^{mm}$. Nimmt man an, dass die Dicke der elektrischen Schicht an dem Punkte $\mu = -1$ sich im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen ändert, so hätte die Zunahme, wenn man von der Messung bei 260$^{mm}$ ausgeht, bei 520,5$^{mm}$ 0,045 betragen müssen, welcher Werth sehr nahe mit dem gemessenen übereinstimmt. Als die Tafel der Kugel bis auf 131,0$^{mm}$ von ihrem Mittelpunkte genähert wurde, war die Elektricität im Punkte $\mu = -1$ im Verhältniss von 1 : 1,695 gestiegen. Der vierte Theil von 520,5$^{mm}$ ist 130,1$^{mm}$. Soll also das ausgesprochene Gesetz Geltung haben, so muss die Division der Zunahme 0,695 durch 16 nahe den frühern Werth 0,048 geben. Es ist $\frac{0,695}{16} = 0,0435$. Jenes Gesetz kommt also dem wahren Gesetze sehr nahe und kann zu angenäherten Berechnungen oder zu Reductionen bei wenig von einander abweichenden Entfernungen benutzt werden.

2. *Vertheilung auf derselben Kugel an der Röhre von* 38,1$^{mm}$ *Durchmesser, während eine leitende Fläche mittelst eines Loches über die Röhre geschoben war, jedoch ohne die Röhre zu berühren.*

Eine grosse Tafel aus Pappe, 700$^{mm}$ breit und 1000$^{mm}$ lang, wurde auf beiden Seiten mit sogenanntem Silberpapier beklebt, und in der Mitte mit einem 72$^{mm}$ im Durchmesser haltenden Loche versehen. Sie wurde dann mit diesem Loche über die horizontal liegende eiserne Röhre von 38,1$^{mm}$ Durchmesser geschoben, und in verticaler Stellung so befestigt, dass der Mittelpunkt des Lochs möglichst mit der Axe der Röhre zusammenfiel. Der Rand des Loches stand also überall noch um 17$^{mm}$ von der Oberfläche der Röhre ab. Die Ebene der Pappe, deren Oberfläche mit der Erde in leitende Verbindung gesetzt war, schnitt die Röhre an einer Stelle, welche 480$^{mm}$ von dem die Kugel berührenden Ende derselben abstand.

Die Dicke der elektrischen Schicht an dem vordersten Punkte der Kugel wurde nach der gewöhnlichen Weise durch abwechselnde Messungen verglichen mit der elektrischen Dicke einer auf der Batterie befindlichen Kugel, die durch einen aus Zinkblech gebildeten Schirm gegen den Einfluss der Papptafel geschützt war. Es ergab sich, dass die Dicke der elektrischen Schicht auf dem vordersten Punkte der Kugel durch die Anwesenheit der zur Erde abgeleiteten Tafel im Verhältniss von 1 zu 1,048 vermehrt wurde.

Die weitern Messungen an den verschiedenen Punkten der Kugel lieferten folgende Verhältnisse zwischen den Dicken der elektrischen Schicht.

| $\mu$. | Dicke der elektrischen Schicht. |
|---|---|
| — 1,0000 | 1,000 |
| — 0,4743 | 0,986 |
| + 0,0340 | 0,930 |
| + 0,5334 | 0,810 |
| + 0,8144 | 0,592 |
| + 0,9464 | 0,000 |

Hieraus folgen durch Vergleichung mit der ursprünglichen Dicke bei Abwesenheit der Papptafel die Zunahmen, wie sie folgende Tabelle gibt:

| $\mu$. | Dicke der elektrischen Schicht. | Zunahme. |
|---|---|---|
| — 1,0000 | 1,048 | 0,048 |
| — 0,4743 | 1,034 | 0,070 |
| + 0,0340 | 0,975 | 0,074 |
| + 0,5334 | 0,849 | 0,076 |
| + 0,8144 | 0,620 | 0,067 |
| + 0,9464 | 0,000 | 0,000 |

Auf der eisernen Röhre wurden folgende Werthe erhalten:

| Entfernung von dem Ende der Röhre. | Dicke der elektrischen Schicht. |
|---|---|
| 50mm | 0,780 |
| 200 | 0,977 |
| 400 | 1,05 |
| 480 | 2,09 |

Hieraus folgen die Zunahmen:

| Entfernung von dem Ende der Röhre. | Zunahme. |
|---|---|
| 50mm | 0,105 |
| 200 | 0,196 |
| 400 | 0,242 |
| 480 | 0,33 |

Auf der Papptafel selbst ist negative Elektricität verbreitet. Eine ungefähre Vorstellung von der Menge, welche das Probekügelchen an den verschiedenen Punkten derselben aufnimmt, werden die folgenden Messungen geben. Von genauen Werthen kann schon der Unebenheit der Oberfläche wegen nicht die Rede sein. Wird die von dem Probekügelchen auf dem vordersten Punkte der Kugel bei Anwesenheit der Papptafel aufgenommene Elektricitätsmenge gleich 1 gesetzt, so nahm dasselbe Kügelchen auf der der Kugel zugewandten Seite der Papptafel folgende Mengen auf:

| | |
|---|---|
| Dicht am Rande der Oeffnung | 3,65 |
| 10mm von diesem Rande entfernt | 1,35 |
| 20 ,, ,, ,, ,, | 0,86 |
| 50 ,, ,, ,, ,, | 0,39 |
| 100 ,, ,, ,, ,, | 0,18 |
| 200 ,, ,, ,, ,, | 0,09. |

Um die Werthe für diese Mengen zu erhalten, wenn die im vordersten Punkte der Kugel bei Abwesenheit der Papptafel aufgenommene Menge gleich 1 gesetzt wird, sind die vorstehenden Werthe noch mit 1,048 zu multipliciren. Es werden dann diese Mengen:

| | |
|---|---|
| Dicht am Rande der Oeffnung | 3,82 |
| 10mm von diesem Rande entfernt | 1,41 |
| 20 ,, ,, ,, ,, | 0,90 |
| 50 ,, ,, ,, ,, | 0,41 |
| 100 ,, ,, ,, ,, | 0,19 |
| 200 ,, ,, ,, ,, | 0,09. |

3. *Vertheilung auf derselben Kugel an derselben Röhre, als die metallische Fläche ihr von der Seite her, d. h. so dass ihre Ebene parallel mit der Axe stand, genähert wurde.*

Ich will die Zunahme in der Dicke der elektrischen Schicht bestimmen für folgende fünf Punkte: 1) für den vordersten Punkt der Kugel, der in der Verlängerung der Axe der Röhre liegt; 2) für den höchsten

Punkt; 3) für das Ende des auf der genäherten Ebene senkrechten Durchmessers, welches der Ebene zugewandt ist; 4) für das andere Ende eben dieses horizontalen Durchmessers, und 5) für den Punkt, welcher auf dem verticalen durch die Axe der Röhre gehenden grössten Kreise mit $\mu = + 0,5334$ bezeichnet wird. Die Ebene der Tafel stand bei den folgenden Messungen um 831,2$^{mm}$ von dem Mittelpunkte der Kugel ab; die Verlängerung des auf der Tafel senkrechten Durchmessers der Kugel traf sehr nahe die Mitte der Fläche der Tafel.

1) An dem vordern Punkte der Kugel betrug die Zunahme in der Dicke der elektrischen Schicht 0,013, oder diese Dicke war von 1 auf 1,013 gestiegen.

2) Das Verhältniss der elektrischen Dicken an dem vordersten und an dem höchsten Punkte der Kugel fand sich 1 : 0,905. Wird die Dicke im vordersten Punkte der Kugel bei Abwesenheit der Tafel = 1 gesetzt, so wird die Dicke in dem höchsten Punkte 0,917. Bei Abwesenheit der Tafel ist das Verhältniss 1 : 0,901, so dass hiernach also an dem höchsten Punkte eine Zunahme von 0,016 stattgefunden hätte.

3) Für die Bestimmung der Zunahme der elektrischen Schicht in den Endpunkten des horizontalen auf der Ebene der Tafel senkrechten Durchmessers entstand eine eigenthümliche Schwierigkeit dadurch, dass ich meinem Körper bei der Berührung dieser Punkte mit dem Probekügelchen nicht genau dieselbe Lage gegen die Kugel geben konnte, als bei der Berührung des vordersten Punktes, mit welchem jene beiden verglichen werden sollten. Es mussten also erst noch besondere Messungen angestellt werden, um diesen Einfluss meines Körpers auszuscheiden. Bei der Berührung auf dem vordern Punkte der Kugel nahm ich stets die bei allen frühern Messungen angewandte Stellung seitwärts von der Kugel ein; bei der Berührung der beiden Endpunkte des vorhin bezeichneten horizontalen Durchmessers stellte ich mich möglichst weit vor die Kugel, also in die Verlängerung der Axe der Röhre, so dass ich mit dem ausgestreckten Arme und mittelst des isolirenden Stabes das Probekügelchen gerade an die betreffenden Punkte anlegen konnte. Jetzt ergab sich bei gänzlicher Abwesenheit der Tafel das Verhältniss zwischen dem vordern Punkte (wo $\mu = - 1$) und eines Punktes des Kreises, für welchen $\mu = + 0,0340$, nicht wie früher 1 : 0,901, sondern 1 : 0,906. Als die Tafel bis 831,2$^{mm}$ genähert war, fand ich das Verhältniss für den der Tafel zugewandten Endpunkt des

horizontalen Durchmessers wie 1 : 0,909. Hiernach ist also in diesem Punkte die Dicke der elektrischen Schicht im Verhältniss von 1 : 1,015 gestiegen. Die Zunahme beträgt also 0,015.

4) Auf analoge Weise wurde das Verhältniss der Dicken der elektrischen Schicht an dem vordersten Punkte der Kugel und dem abgewandten Endpunkte des horizontalen Durchmessers ausgemittelt. Der Versuch ergab keine merkliche Veränderung in der Dicke der elektrischen Schicht.

5) Für den in dem oben bezeichneten verticalen grössten Kreise gelegenen Punkt, für welchen $\mu = + 0,5334$ ist, ergab sich aus dem Versuche eine Zunahme von 0,015.

Auf dem Punkte der obern Seite der Röhre, welcher um $50^{mm}$ von dem Ende derselben absteht, ergab die Messung nach der Annäherung der Tafel eine Zunahme in der Dicke der elektrischen Schicht von nahe 0,02.

4. *Vertheilung auf derselben Kugel, während sie mit der Erde in leitender Verbindung stehend einer gleich grossen elektrischen Kugel sich gegenüber befand, und die Mitte zwischen beiden Kugeln eine isolirte gleich grosse Kugel einnahm.*

Mit der Batterie wurde durch eine messingene Röhre von $36,8^{mm}$ Durchmesser eine erste Kugel von nahe $118^{mm}$ Durchmesser verbunden; die Röhre lag horizontal, und ihre Axe ging durch den Mittelpunkt der Kugel. Dieser Kugel gegenüber wurde nun eine zweite Kugel, und zwar die vollkommene Kugel von $117,91^{mm}$ Durchmesser nebst der an ihr befestigten eisernen Röhre so aufgestellt, dass die Axe der letztern Röhre genau in die Verlängerung der Axe der zuvor erwähnten messingenen Röhre fiel. Die Mittelpunkte beider Kugeln waren $819,5^{mm}$ von einander entfernt, und die beiden Röhren befanden sich auf den einander abgewandten Seiten der Kugeln. Die eiserne Röhre wurde an ihrem hintern Ende mit der Erde leitend verbunden. Gerade in die Mitte zwischen beide Kugeln konnte noch eine gleich grosse Kugel isolirt gestellt werden. Um diese dritte Kugel zu tragen, diente eine aus drei dünnen Schellackarmen gefertigte Vorrichtung, die durch einen Schellackstab auf einem bis zur Erde hinabreichenden Glasstabe befestigt war. Die dritte Kugel trug einen isolirenden Griff aus Schellack und wurde unter Vermeidung jeglicher ableitenden Berührung stets erst

kurz vor der Messung auf die isolirende Vorrichtung gelegt und sogleich nach der Messung wieder entfernt. In der Zwischenzeit zwischen zwei Messungen wurde auch die isolirende Vorrichtung vor der elektrischen Strahlung der mit der Batterie verbundenen Kugel geschützt.

Wird die Dicke der elektrischen Schicht in dem vordersten Punkte der ersten Kugel, für welchen $\mu = -1$ ist, gleich 1 (und zwar positiv genommen) gesetzt, so ist auf dem der ersten Kugel nächsten Punkte der zweiten Kugel die Dicke dieser Schicht 0,053 (aber negativ).

Wird die Dicke der elektrischen Schicht auf diesem Punkte der zweiten Kugel (für welchen in Bezug auf diese Kugel $\mu = -1$ ist) gleich 1 gesetzt, so sind die Verhältnisse zwischen den Dicken auf dieser zweiten Kugel folgende:

| $\mu$. | Dicke der elektrischen Schicht. |
|---|---|
| −1,0000 | 1,00 |
| +0,0340 | 0,73 |
| +0,7341 | 0,41 |
| +0,9464 | 0,00 |

Auf der eisernen Röhre betrug diese Dicke in derselben Einheit

50mm von der Oberfläche der Kugel entfernt 0,42
300 „ „ „ „ „ „ 0,24.

Hieraus ergeben sich die Dicken der elektrischen Schicht auf Kugel und Röhre, wenn die Dicke in dem vordersten Punkte der mit der Batterie verbundenen Kugel gleich 1 gesetzt wird.

Auf der Kugel:

| $\mu$. | Dicke der elektrischen Schicht. |
|---|---|
| −1,0000 | 0,053 |
| +0,0340 | 0,039 |
| +0,7341 | 0,022 |
| +0,9464 | 0,000 |

und auf der Röhre:

50mm von dem Ende 0,022
300 „ „ „ 0,013.

5. *Vertheilung der Elektricität auf der zuvor bezeichneten dritten Kugel, als sie mit einer Röhre von 38,1mm Durchmesser versehen so zwischen die beiden andern Kugeln gestellt wurde, dass ihre Röhre horizontal und senkrecht auf der Richtung der Röhren der ersten und zweiten Kugel stand.*

An die Stelle der zweiten (vollkommenen) Kugel wurde eine nahe gleich grosse Kugel mit einer Zinkröhre von fast 40mm Durchmesser gesetzt, und die vollkommene Kugel mit ihrer Röhre an die Stelle der dritten Kugel, also mitten zwischen die beiden andern Kugeln gestellt. Die Mittelpunkte aller drei Kugeln und die Axen der Röhren der ersten und zweiten Kugel lagen in einer horizontalen Linie, während die horizontale Axe der eisernen Röhre der dritten mittelsten Kugel auf dieser Linie senkrecht stand. Auf dieser mittelsten Kugel, deren Röhre zur Erde abgeleitet war, wurden folgende Dicken erhalten, wenn die Dicke in dem vordersten Punkte der ersten Kugel gleich 1 gesetzt wird:

In dem Punkte, welcher der ersten Kugel am nächsten lag 0,225
in dem Punkte, welcher der zweiten Kugel am nächsten lag 0,065
in dem obersten Punkte . . . . . . . . . . . . 0,122.

6. *Vertheilung der Elektricität auf der ersten Kugel, während die zweite und dritte Kugel die zuvor angeführten Stellungen einnahmen.*

Die vollkommene Kugel wurde als erste Kugel benutzt, und zwei andere sehr nahe gleich grosse an die Stelle der zweiten und dritten Kugel des vorhergehenden Versuchs gestellt. Die Zunahme an dem vordersten Punkte der ersten Kugel, für welchen $\mu = -1$, betrug 0,042.

Die Verhältnisse der Dicke der elektrischen Schicht an den verschiedenen Punkten der Kugel ergaben sich:

| $\mu$. | Dicke der elektrischen Schicht. |
|---|---|
| −1,0000 | 1,000 |
| −0,4743 | 0,943 |
| +0,0340 | 0,866 |
| +0,5334 | 0,745 |
| +0,9464 | 0,000 |

In einer Entfernung von 50 Millimetern von dem Ende der an der ersten Kugel befestigten Röhre war die Dicke 0,690. Hieraus folgen die Dicken der elektrischen Schicht, wenn die Dicke derselben im Punkte $\mu = -1$

bei Abwesenheit der andern Kugeln = 1 gesetzt wird, wie sie folgende Tabelle liefert. Die dritte Spalte enthält die Zunahmen.

| $\mu$. | Dicke der elektrischen Schicht. | Zunahme. |
|---|---|---|
| —1,0000 | 1,042 | + 0,042 |
| —0,4743 | 0,983 | + 0,019 |
| +0,0340 | 0,902 | + 0,001 |
| +0,5334 | 0,776 | + 0,003 |
| +0,9464 | 0,000 | 0,000 |

Für den bezeichneten Punkt auf der Röhre (50$^{mm}$ vom Ende) wird dann die Dicke 0,719, und die Zunahme + 0,006.

7. *Vertheilung der Elektricität auf der vollkommenen von der eisernen Röhre getragenen Kugel, als ihr eine zweite mit nahe gleich dicker Röhre versehene Kugel von unten her bis auf 110$^{mm}$ genähert wurde.*

Die Röhre der ersten Kugel lag horizontal, die der zweiten stand vertical; die verlängerte Axe der letztern ging durch den Mittelpunkt der ersten Kugel. Die zweite Kugel war mit der Erde leitend verbunden.

Die Zunahme der Elektricität im vordersten Punkte der ersten Kugel, wo $\mu = -1$, betrug 0,021.

Die Verhältnisse der Dicken der elektrischen Schicht auf dem höchsten und tiefsten Punkte der ersten Kugel, die beide auf dem Kreise liegen, welcher durch $\mu = +0,0340$ bezeichnet wird, ergaben sich:

| | |
|---|---|
| Vorderster Punkt | 1,000 |
| Tiefster Punkt . . | 0,925 |
| Höchster Punkt . | 0,887 |

Hieraus lassen sich die Dicken berechnen, wenn die Dicke im vordersten Punkte bei Abwesenheit der zweiten Kugel = 1 gesetzt wird.

| | Dicke der elektrischen Schicht. | Zunahme. |
|---|---|---|
| Vorderster Punkt | 1,021 | 0,021 |
| Tiefster Punkt . . | 0,944 | 0,043 |
| Höchster Punkt . | 0,906 | 0,005 |

### 8. *Zunahme in der Dicke der elektrischen Schicht auf dem vordersten Punkte der Kugel von 20,12$^{mm}$ Durchmesser durch die Annäherung einer leitenden Ebene.*

Eine Kugel von 20,12$^{mm}$ Durchmesser wurde an dem einen Ende eines Stabes von 2000$^{mm}$ Länge und 6,4$^{mm}$ Durchmesser befestigt, während das andere Ende desselben mit einer Batterie aus vier Flaschen in Verbindung stand. Um die Zunahme in der Dicke der elektrischen Schicht auf dem vordersten Punkte der Kugel infolge der Annäherung einer leitenden Ebene zu bestimmen, wurde die elektrische Spannung an diesem Punkte mit der elektrischen Spannung an dem vordersten Punkte einer auf der entgegengesetzten Seite der Batterie von einem Stabe getragenen Kugel verglichen.

Zunächst wurde die grosse mit Goldpapier beklebte Tafel der Kugel von der Vorderseite her genähert, so dass die verlängerte Axe des Stabes, welcher die Kugel trug, die Mitte der Tafel traf und auf der Ebene derselben senkrecht stand. Als Einheit nehme ich die Dicke der elektrischen Schicht im vordersten Punkte der Kugel, wie sie bei Abwesenheit der Tafel statt hat. Die Zunahmen an dem vordersten Punkte finden sich in dieser Einheit ausgedrückt in der zweiten Spalte der nachstehenden Tabelle, deren erste Spalte die zugehörigen Entfernungen der leitenden Oberfläche der Tafel von dem Mittelpunkte der Kugel enthält.

| Entfernung. | Zunahme. |
|---|---|
| 130$^{mm}$ | 0,136 |
| 260 | 0,053 |
| 520 | 0,022 |
| 1040 | 0,007 |

Es nehmen, wie man sogleich übersieht, die Zahlen der zweiten Spalte in einem etwas grössern Verhältnisse als dem der umgekehrten einfachen Entfernungen ab. Unter der Voraussetzung z. B. dass die Zunahmen im umgekehrten Verhältnisse der $\frac{4}{3}$ Potenzen der Entfernungen ständen, erhält man von dem ersten Werthe 0,136 ausgehend der Reihe nach die Werthe 0,054; 0,022; 0,009; welche mit den durch Beobachtung gewonnenen sehr nahe übereinstimmen.

Man darf jedoch nicht vergessen, dass die obigen Zahlen nur die Zunahme ausdrücken, welche durch die Annäherung einer leitenden

Fläche von 1460$^{mm}$ Länge und 850$^{mm}$ Breite erzeugt wird. Jedenfalls wird bei dem weitern Entfernen dieses begrenzten Leiters von der Kugel die Zunahme auf dem vordern Punkte der Kugel in stärkerm Grade geschwächt, als wenn eine unbegrenzte leitende Ebene in gleicher Weise von der Kugel entfernt wird, indem, wenn ich mich der Kürze wegen so ausdrücken darf, ein Theil der von der Kugel ausgehenden elektrischen Strahlung, welcher bei grösserer Nähe die Tafel noch trifft, bei weiterer Entfernung derselben an ihr seitwärts vorbeigeht. Bei der allmähligen Entfernung einer unendlich ausgedehnten leitenden Ebene von dem Mittelpunkte der Kugel würde die Potenz der Entfernung, mit welcher die Zunahmen im umgekehrten Verhältnisse stehen, kleiner als $\frac{4}{3}$ werden; es wäre selbst möglich, dass sie 1 werden kann, so dass dann die Zunahmen genau im umgekehrten Verhältnisse der Entfernungen stünden. Oder wird, damit diess letzte Verhältniss eintreten kann, auch noch gefordert, dass die Kugel denselben Durchmesser besitze als der Cylinder, dass also letzterer eigentlich keine Kugel trage, sondern nur mit einer Halbkugel geschlossen sei? Oder ist für die Gültigkeit dieses Gesetzes, wie man aus den Entwickelungen auf S. 481 u. 482 schliessen könnte, ausserdem eine gewisse Verringerung in dem Durchmesser der Kugel und Röhre nothwendig? Ich will nur noch daran erinnern, dass als die erwähnte Tafel der grossen Kugel von 117,91$^{mm}$ Durchmesser genähert wurde, die Zunahmen beinahe im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen standen (siehe S. 513). Bei der Annahme der zweiten Potenz selbst lieferte die Rechnung damals stets zu kleine Werthe, so dass also der Exponent der Potenz der Entfernung, mit welcher die Zunahmen im umgekehrten Verhältnisse standen, kleiner war als 2.

Als die Tafel der kleinen Kugel von 20,12$^{mm}$ Durchmesser und dem sie tragenden Stabe von der Seite her genähert wurde, so dass ihre leitende Oberfläche mit der Axe des Stabes parallel war, wurden auf dem vordersten Punkte der Kugel, der in der Verlängerung der Axe des Stabes liegt, folgende Zunahmen gefunden:

| Entfernung. | Zunahme. |
|---|---|
| 400$^{mm}$ | 0,049 |
| 800 | 0,004 |

Die Entfernungen sind wie immer vom Mittelpunkte der Kugel aus gerech-

net. Die Tafel war so aufgestellt, dass ihre längere Dimension horizontal lag, damit sie in möglichst weiter Erstreckung neben dem Stabe hinlief. Die Kugel befand sich der Mitte der Tafel gegenüber. In dieser Stellung, wo die Kugel und der Stab in seiner ganzen Länge gleichweit von der leitenden Ebene abstehen, muss nothwendig ein anderes Gesetz der Aenderung der Zunahmen eintreten, als in dem vorhergehenden Falle; und es zeigt sich auch hier eine um sehr vieles stärkere Abnahme der Einwirkung der Tafel auf die Elektricität der Kugel.

## IX. Genäherter mathematischer Ausdruck für die Dicke der elektrischen Schicht auf der Kugel von 117,91$^{mm}$ und der Röhre von 38,1$^{mm}$ Durchmesser.

Wenn man einen unendlich dünnen Cylinder aus nicht leitender Masse, der überall auf seiner Oberfläche mit einer gleichdicken elektrischen Schicht bedeckt ist, einer isolirten nicht elektrischen metallischen Kugel bis zur Berührung in solcher Richtung nähert, dass die verlängerte Axe des Cylinders durch den Mittelpunkt der Kugel geht, so lässt sich nach S. 483, weil $y = r$ oder $\zeta = 1$ ist, die Dicke der hierdurch erzeugten elektrischen Schicht mittelst folgender Formel ausdrücken,

$$-\frac{e}{r}\left\{2\left(\frac{1}{\sqrt{2(1-\mu)}}-1\right)+\log\text{nat.}\frac{2}{1-\mu+\sqrt{2(1-\mu)}}\right\},$$

wo $e$ diejenige Elektricitätsmenge bedeutet, welche auf der Längeneinheit der Oberfläche des Cylinders enthalten ist, $r$ den Radius der Kugel und $\mu$ den Cosinus desjenigen Winkels, welchen der nach dem Punkte der Kugel, für welchen die Dicke der elektrischen Schicht bestimmt werden soll, gezogene Radius mit der Axe des Cylinders macht. Das Zeichen — rührt daher, dass die Elektricität des Cylinders positiv genommen wurde. Setzt man $1 - \mu = 2t^2$, d. h. führt man anstatt des Cosinus den Sinus des halben Winkels ein, so nimmt die vorstehende Formel folgende etwas einfachere Gestalt an:

$$-\frac{e}{r}\left\{\frac{1}{t}-2-\log\text{nat.}\,t(t+1)\right\}.$$

Es war nicht unwahrscheinlich, dass die Form des vorstehenden Ausdrucks auch zur wenigstens angenäherten Berechnung der elektrischen Vertheilung auf der Kugel von 117,91$^{mm}$ Durchmesser, während dieselbe an der Röhre von 38,1$^{mm}$ Durchmesser sitzt, würde dienen können, wenn man jedes der drei Glieder mit einer angemessenen Constante

multiplicirte. Nimmt man $a$, $b$, $c$ als diese drei zu bestimmenden Constanten, so würde also die Vertheilung $y$ auf der Kugel unter den angegebenen Umständen sich darstellen lassen durch

$$y = a + \frac{b}{t} + c \log t (t + 1).$$

Zur Bestimmung dieser drei Constanten bedarf es nur einer Messung, indem zwei Werthe von $y$ (der Dicke der elektrischen Schicht) ohne Weiteres bekannt sind. Nämlich für $\mu = -1$ ist $y = 1$, und für $\mu = 0{,}9464$, d. h. für den Kreis, in welchem die Röhre die Kugel berührt, muss $y = 0$ sein. Als dritten, den Messungen zu entlehnenden Werth von $y$ will ich $y = 0{,}773$ für $\mu = 0{,}5334$ nehmen. Man erhält dann

$$a = 1{,}1574, \quad b = -0{,}1804, \quad c = 0{,}0760,$$

so dass also

$$y = 1{,}1574 - 0{,}1804 \frac{1}{t} + 0{,}0760 \log t (t + 1).$$

Werden nach dieser Formel die Dicken der elektrischen Schicht auf den verschiedenen Punkten der Kugel berechnet, so findet man die in der zweiten Spalte der folgenden Tabelle befindlichen Werthe.

| $\mu$. | Dicke der elektr. Schicht | | Unterschiede. |
|---|---|---|---|
| | berechnet. | beobachtet. | |
| — 1,0000 | 1,000 | 1,000 | 0,000 |
| — 0,4743 | 0,963 | 0,964 | + 0,001 |
| + 0,0340 | 0,903 | 0,901 | — 0,002 |
| + 0,5334 | 0,773 | 0,773 | 0,000 |
| + 0,7341 | 0,643 | 0,650 | + 0,007 |
| + 0,8161 | 0,533 | 0,553 | + 0,020 |
| + 0,9464 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

Auf dem grössten Theile der Kugel drückt also die obige Formel die Vertheilung der Elektricität hinreichend genau aus; nur auf den der Röhre nächstgelegenen Theilen ihrer Oberfläche finden sich zwischen der Beobachtung und der Berechnung merkliche Unterschiede. Die obige Formel ist aber dessenungeachtet zur Berechnung der von dieser Kugel ausgeübten Einwirkungen völlig brauchbar, wenn man den sehr kleinen von ihr nicht umfassten Theil der auf der Kugel verbreiteten Elektricität noch besonders berücksichtigt, wie diess später geschehen wird.

Nach der Herleitung der allgemeinen Form für die Vertheilung der Elektricität auf der an der Röhre befestigten Kugel war nicht zu erwarten, dass die erhaltene Formel in aller Strenge die Vertheilung ausdrücken

würde, und es darf daher eine Differenz von 0,020 nicht überraschen. Wenn übrigens die zuvor berechneten Constanten 1,1574, 0,1804 und 0,0760 durch Zuziehung der Beobachtungen in der Nähe der Röhre etwas abgeändert werden, so lässt sich die stärkste Differenz von 0,020 zwischen den Resultaten der Rechnung und Beobachtung sehr vermindern, dafür treten dann aber grössere Unterschiede für $\mu = -0{,}4743$ und $+0{,}0340$ auf, die zwar noch nicht auf 0,010 steigen, aber doch sehr weit die Gränzen der Genauigkeit, welche die Messung an diesen Punkten gestattet, überschreiten. Eine derartige Abänderung der genannten Constanten scheint mir daher nicht erlaubt zu sein. Man ersieht übrigens leicht, dass der von der obigen Formel nicht umfasste Theil der Elektricität auf der Kugel nur gering ist.

Berechnet man nach der obigen Formel für $y$ die Menge der auf der Kugel enthaltenen Elektricität, so wird sie ausgedrückt durch das zwischen den Gränzen $\mu = 0{,}9464$ bis $\mu = -1$ und $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$ genommene Integral

$$\frac{r^2}{4\pi}\iint y \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi = -\frac{r^2}{2}\int y \, d\mu \text{; oder durch } 2r^2\int yt\,dt$$

wenn $1 - \mu = 2t^2$ gesetzt wird, wo dann das Integral zu nehmen ist von $t = 0{,}1636$ bis $t = 1$. Man erhält, wenn $m$ den Modulus der Briggischen Logarithmen bedeutet,

$$2r^2\left\{\frac{t^2}{2}(a - cm) + t\left(\frac{cm}{2} - b\right) + \frac{c}{2}\left(t^2 \log t(1+t) - \log(1+t)\right)\right\} + \text{Const.}$$

Zwischen den angeführten Gränzen wird der Werth dieses Ausdrucks

$$0{,}8266\,r^2$$

oder da $r = 58{,}95$, beträgt diese Elektricitätsmenge

2873.

Um die noch übrige von der obigen Formel nicht umfasste kleine Menge zu berechnen, setze man von $\mu = 0{,}9464$ bis 0,8161 die mittlere Dicke der elektrischen Schicht = 0,01, von 0,8161 bis 0,7341 0,014, und von 0,7341 bis 0,5334 0,003, so erhält man unter der Benutzung der Formel $-\frac{r^2}{2} y \int d\mu$, wo $y$ als constant betrachtet wird, als Summe für alle drei bezeichneten Stücke der Oberfläche

$$0{,}0015\,r^2$$

oder die Menge 5,21. Es beträgt dieselbe $\frac{1}{551}$ von der durch die Formel schon gelieferten Elektricität. Die gesammte Elektricitäts-

menge auf der Kugel würde also 2878 sein, wenn die Dicke derselben im Punkte $\mu = -1$ gleich 1 ist.

Sucht man den Schwerpunkt der auf der Kugel verbreiteten elektrischen Massen, so liegt derselbe in der Axe; man kann also die auf einer unendlich dünnen Kugelzone, deren Axe die Verlängerung der Röhre bildet, vorhandene Elektricität in dem Durchschnitte mit dieser Axe angehäuft nehmen, und erhält dann den gesuchten Schwerpunkt, wenn man den Werth des Integrals

$$2r^3 \int yt\,(1-2t^2)\,dt$$

genommen zwischen den Gränzen $t = 0{,}1636$ und $t = 1$, durch die gesammte Menge der auf der Kugel vorhandenen Elektricität dividirt. Setzt man die Dicke $y$ der elektrischen Schicht gleich

$$a - \frac{b}{t} + c \log t\,(t+1),$$

so wird das allgemeine Integral des vorstehenden Ausdrucks,

$$r^3 t \left\{ -2b + \frac{t^2}{3}(4b - cm) + t(1-t^2)\left(a - \frac{cm}{2} + c \log t\,(t+1)\right)\right\} + \text{Const.},$$

wo $m$ wieder den Modulus des gewöhnlichen Logarithmensystems bezeichnet. Setzt man $a = 1{,}1574$; $b = 0{,}1804$; $c = 0{,}0760$, so wird der Werth des vorstehenden Integrals zwischen den angegebenen Gränzen

$$-0{,}1016\,r^3 = -20820.$$

Berücksichtigt man noch die von der obigen Formel für $y$ nicht umfasste Elektricität, so ist zu $-0{,}1016\,r^3$ noch zu addiren $+0{,}0012\,r^3$, und man findet dann die Lage des Schwerpunktes

$$-\frac{r^3\,(0{,}1016 - 0{,}0012)}{r^3\,(0{,}8266 + 0{,}0015)}.$$

Der Schwerpunkt liegt hiernach $0{,}1212\,r$ oder $7{,}15^{mm}$ von dem Mittelpunkte ab, und zwar nach der von der Röhre abgewandten Seite hin.

Die durch die Messung gefundenen Dicken der elektrischen Schicht $z$ auf der Röhre, während die Kugel vorn an ihr befestigt ist, lassen sich durch folgenden einfachen Ausdruck darstellen:

$$z = 0{,}859\left\{1 - \frac{1}{1 + 0{,}0953\,x}\right\} = 0{,}859\left\{1 - \frac{1}{1 + 5{,}618\,\frac{x}{r}}\right\} = \frac{0{,}859\,x}{x + 0{,}1780\,r},$$

wo $x$ die Entfernung des Querschnittes, auf welchem gemessen wurde, von dem die Kugel berührenden Ende, und $r$ den Halbmesser dieser Kugel bedeutet. Er ist aus zwei Beobachtungswerthen hergeleitet, nämlich aus der constanten Dicke 0,859 in grosser Entfernung von der Kugel, und

aus der Dicke 0,605 für $x = 25^{mm}$. Ausserdem musste die Forderung erfüllt sein, dass $z = 0$ für $x = 0$. Für $x = 50$ gibt der obige Ausdruck 0,710 also nur 0,003 weniger als die Beobachtung. Werden die oben S. 509 angeführten weniger genauen Messungen für $x = 75$, 100, 200 in Betracht gezogen, so gibt die Rechnung 0,754, 0,777 und 0,816, während jene Beobachtungen 0,766, 0,790 und 0,828 lieferten; letztere Werthe sind also um 0,012 oder 0,013 höher als die berechneten.

Die gleiche Grösse der Differenz bei diesen Werthen würde auf eine constante Fehlerquelle, die möglicherweise (wie früher schon angedeutet) in der Stellung meines Körpers gelegen haben kann, hinweisen, wenn man den zur Berechnung angewandten mathematischen Ausdruck als streng richtig betrachten dürfte. Wollte man die Einfachheit des Ausdrucks aufgeben, und anstatt des Gliedes $\frac{1}{1+ax}$, wo $a$ eine zu bestimmende Constante bedeutet, eine Bruchpotenz $\frac{1}{(1+ax)^{\frac{m}{n}}}$, wo $\frac{m}{n}$ etwas grösser als 1 ist, anwenden, so liessen sich die Differenzen bei 75, 100 und $200^{mm}$ noch vermindern. $\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$ ist indess schon zu gross.

Der obige Ausdruck für $z$ kann aber nur dienen, um die Verhältnisse der elektrischen Dicken auf verschiedenen Querschnitten der Röhre selbst anzugeben und ist noch nicht geeignet, um das Verhältniss zwischen den Dicken auf einem Punkte der Kugel und der Röhre zu bestimmen. Der Grund liegt darin, dass das Probekügelchen sich in verschiedenen Verhältnissen an den genannten Punkten mit Elektricität ladet. Die Constante 0,859, welche aus den Versuchen sich ergab, ist also nicht richtig, und leider gibt es bis jetzt kein directes Mittel, um die Grösse des Fehlers zu bestimmen.

Unter so bewandten Umständen bleibt Nichts übrig, als diese Constante (sie möge mit $a$ bezeichnet werden) auf folgendem indirecten Wege zu ermitteln.

Bezeichnet man $\sin\frac{\vartheta}{2}$ mit $t$, so wird die Vertheilung der Elektricität auf der Kugel nach S. 524 dargestellt durch

$$y = 1{,}1574 - \frac{0{,}1804}{t} + 0{,}0760 \log t\,(t+1).$$

Mittelst dieses Ausdrucks lässt sich die Anziehung der über die Kugel verbreiteten Elektricität auf einen Punkt der Axe der Röhre berechnen.

Die Vertheilung auf der Röhre wird nach dem Obigen dargestellt durch den Ausdruck

$$z = \frac{a\frac{x}{r}}{0{,}1780 + \frac{x}{r}}.$$

Man kann daher die Anziehung der auf der Oberfläche der Röhre vorhandenen Elektricität auf denselben Punkt der Röhre berechnen. Im Zustande des elektrischen Gleichgewichts müssen dann die beiden Anziehungen der Kugel und der Röhre auf den gewählten Punkt einander gleich sein, und entgegengesetzte Richtung besitzen. Die Gleichsetzung beider Werthe liefert also eine Bedingungsgleichung, aus welcher sich, da alles Uebrige bekannt ist, $a$ bestimmen lässt.

Die Wahl des Mittelpunktes der Kugel behufs Aufstellung der angedeuteten Gleichung würde eine ungeeignete sein, indem die Anziehungen der Kugel und Röhre auf diesen Punkt nur schwach sind und deshalb keine scharfe Vergleichung gestatten. Zweckmässiger ist es daher, diese Anziehungen für den Punkt der Kugeloberfläche zu berechnen, für welchen $\mu = 1$ ist, also für den Endpunkt desjenigen Halbmessers, dessen Verlängerung mit der Axe der Röhre zusammenfällt.

Die Menge der auf einem Elemente der Kugel befindlichen Elektricität ist

$$\frac{y}{4\pi} r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi,$$

also die Anziehung auf den zuvor bezeichneten Punkt

$$\frac{y}{8\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi}{1 - \cos\vartheta}$$

und dieselbe zerlegt nach der Richtung der Axe der Röhre

$$-\frac{y}{8\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi}{\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}} = \frac{y}{8\pi} \frac{d\mu\, d\psi}{\sqrt{2(1-\mu)}}.$$

Die nach dieser Richtung zerlegte Anziehung der auf der Kugelfläche von $\mu = 0{,}9464$ bis $\mu = -1$ ausgebreiteten Elektricität ist dann

$$\frac{1}{8\pi} \iint \frac{y\, d\mu\, d\psi}{\sqrt{2(1-\mu)}}$$

das Integral nach $\mu$ zwischen den eben angeführten Gränzen, und nach $\psi$ von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$ genommen.

Nach Ausführung der Integration nach $\psi$ erhält man

$$\frac{1}{4} \int \frac{y d\mu}{\sqrt{2(1-\mu)}}$$

oder wenn man $1 - \mu = 2t^2$ setzt,

$$-\tfrac{1}{2}\int y dt,$$

das Integral genommen zwischen den Gränzen $t = 0{,}1636$ und $t = 1$.

Setzt man für $y$ den obigen Werth ein, so wird das allgemeine Integral des vorstehenden Ausdrucks

$$-0{,}5787\,t + 0{,}2077 \log t - 0{,}0380 \{t (\log t - 0{,}8686) + (1+t) \log (1+t)\} + \text{Const.}$$

Das Zeichen log bedeutet stets die gewöhnlichen Briggischen Logarithmen. Zwischen den angegebenen Gränzen genommen giebt diess Integral dann die Anziehung

$$-0{,}3180,$$

also nach der Seite der Kugel hin.

Zu dieser Anziehung ist noch diejenige hinzuzufügen, welche von dem kleinen Reste der von der Formel nicht umfassten Elektricität herrührt. Nimmt man diese in der constanten Dicke 0,01 von 0,9464 bis 0,8161, 0,014 von 0,8161 bis 0,7341, und 0,003 von 0,7341 bis 0,5334, so erhält man die hieraus hervorgehende Anziehung zu nahe $-0{,}0013$. Die Anziehung aller auf der Kugel vorhandenen Elektricität ist also

$$-0{,}3193.$$

Die auf einem Elemente der Oberfläche der Röhre vorhandene Elektricität lässt sich ausdrücken durch

$$\frac{z}{4\pi}\,\rho\, d\varphi\, dx,$$

wo $z$ die Dicke der elektrischen Schicht auf diesem Elemente, $\rho$ den Halbmesser der Röhre, $x$ den Abstand des Querschnittes, auf welchem das Element von dem Ende der Röhre liegt, und $\varphi$ den Winkel bezeichnet, welchen die durch dieses Element und die Axe der Röhre gehende Ebene mit einer durch eben diese Axe gelegten festen Ebene bildet. Zur Längeneinheit werde der Halbmesser der Kugel genommen, so dass also $r = 1$ und $\rho = 0{,}3231$ wird. Dann ist

$$z = \frac{ax}{0{,}1780 + x},$$

wo $x$ nun in Theilen des Radius ausgedrückt werden muss.

Der Punkt auf der Axe der Röhre, in Bezug auf welchen zuvor die Anziehung der Kugel gesucht wurde, liegt 0,0536 (in der eben gewählten Längeneinheit) von dem Ende der Röhre entfernt; für denselben Punkt muss nun auch die Anziehung der Röhre berechnet werden. Die Anziehung der auf einem Elemente, welches um $x$ von dem Ende der Röhre absteht, verbreiteten Elektricität auf den zuvor genannten Punkt ist

$$\frac{z}{4\pi} \cdot \frac{\varrho\, d\varphi\, dx}{\varrho^2 + (x-0{,}0536)^2}.$$

Zerlegt man diese Anziehung nach der Axe der Röhre, und setzt für $z$ und $\varrho$ die Werthe ein, so erhält man

$$\frac{0{,}3281}{4\pi} \cdot \frac{a\,x}{0{,}1780+x} \cdot \frac{x-0{,}0536}{\left\{0{,}1073 - 0{,}1072\,x + x^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\, d\varphi\, dx.$$

Die Anziehung der Elektricität auf dem Querschnitte, welcher um $x$ von dem Ende der Röhre absteht, wird erhalten durch Integration des vorstehenden Ausdrucks nach $\varphi$ zwischen den Gränzen $\varphi=0$ und $\varphi=2\pi$. Die Anziehung der auf dem ganzen Cylinder vorhandenen Elektricität auf den bezeichneten Punkt in der Richtung der Axe ist

$$0{,}1615\, a \int \frac{x}{0{,}1780+x} \cdot \frac{x-0{,}0536}{\left\{0{,}1073 - 0{,}1072\,x + x^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

das Integral genommen zwischen den Gränzen $x=0$ und $x=\infty$.

Setzt man $x=\xi-0{,}1780$, so wird das vorstehende Integral

$$0{,}1615\, a \int \frac{\xi^2 - 0{,}4096\,\xi + 0{,}0412}{\xi\left\{\xi^2 - 0{,}4632\,\xi + 0{,}1580\right\}^{\frac{3}{2}}}\, d\xi,$$

das zwischen den Gränzen $\xi=0{,}1780$ und $\xi=\infty$ zu nehmen ist. Das allgemeine Integral dieses Ausdrucks ist

$$0{,}1615\, a \left\{ \frac{-0{,}4781 - 1{,}1267\,\xi}{\sqrt{\xi^2 - 0{,}4632\,\xi + 0{,}1580}} \right.$$
$$\left. -0{,}6560 \log \text{nat.} \frac{0{,}1580 - 0{,}2316\,\xi + 0{,}3975\sqrt{\xi^2 - 0{,}4632\,\xi + 0{,}1580}}{\xi} \right\} + \text{Const.}$$

und der zwischen den angegebenen Gränzen genommene Werth

$$0{,}3778\, a.$$

Nach der frühern Berechnung betrug die Anziehung der Kugel gleichfalls in der Richtung der Axe der Röhre auf den bezeichneten Punkt $-0{,}3193$. Zur Bestimmung von $a$ erhalten wir also die Gleichung

$$0{,}3778\, a - 0{,}3193 = 0,$$

woraus folgt:

$$a = 0{,}845.$$

Die unmittelbare Bestimmung dieses Verhältnisses durch Anlegen eines Probekügelchens von 3,47$^{\text{mm}}$ Durchmesser an den vordern Punkt der Kugel und an weit von der Kugel abstehende Theile der Röhre hatte 0,859 ergeben; dieser Werth ist also etwas zu hoch. Wir sahen früher, dass das Probekügelchen von einer grössern Kugel eine verhältnissmässig zu grosse Elektricitätsmenge aufnahm. In vorliegendem Falle ist, wie aus der Berechnung folgt, die cylindrische Röhre, die zwar nach

einer Richtung eine stärkere Krümmung als die Kugel besitzt, dagegen aber in der hierauf senkrechten Richtung gar nicht gekrümmt ist, einer grössern Kugel zu vergleichen. Da die stärkere Krümmung senkrecht auf die Axe den Einfluss der gradlinigen Erstreckung parallel mit der Axe zum Theil aufhebt, so konnte die von dem Probekügelchen aufgenommene Elektricitätsmenge nicht allzusehr von der Proportionalität mit den in den berührten Punkten vorhandenen elektrischen Dicken abweichen.

### X. Genäherter mathematischer Ausdruck für die Dicke der elektrischen Schicht auf der Kugel von 117,91$^{mm}$ Durchmesser und auf einem sie tragenden Drahte von 0,125$^{mm}$ Dicke.

Der oben angeführte Ausdruck

$$y = -\frac{e}{r}\left\{\frac{1}{t} - 2 - \log\text{nat.}\, t(t+1)\right\}$$

bestimmte die Vertheilung, welche ein unendlich dünner mit einer gleichmässig dicken elektrischen Schicht bedeckter Cylinder aus einer nicht leitenden Substanz auf einer Kugel hervorruft, wenn er letzterer dergestalt genähert wird, dass seine verlängerte Axe durch den Mittelpunkt derselben geht.

Wird die Kugel an einem unendlich dünnen leitenden Drahte aufgehangen, so kann der obige Ausdruck auch nach Hinzufügung eines constanten Gliedes die Vertheilung auf der Kugel doch nicht genau ausdrücken, weil die Elektricität auf dem Drahte nicht überall in gleichmässiger, sondern gerade nach der Kugel hin in abnehmender Dicke vorhanden ist. Wäre die Vertheilung der Elektricität auf dem Drahte, während er die Kugel trägt, bekannt, so liesse sich die Vertheilung der Elektricität auf der Kugel auf analoge Weise, wie der obige Ausdruck gefunden wurde, berechnen. Es ist aber nicht wohl möglich, die Vertheilung auf einem sehr dünnen Drahte mit hinreichender Genauigkeit zu bestimmen; ausserdem müsste man, um die Rechnung zu erleichtern, die Annahme machen, dass die über jedem Querschnitte des Drahtes ausgebreitete Elektricitätsmenge in dem zu diesem Querschnitte gehörigen Punkte der Axe concentrirt wäre.

Gesetzt, die elektrische Vertheilung auf dem Drahte sei bekannt; man nehme dann die in jedem Querschnitte vorhandene Elektricitätsmenge in dem zugehörigen Axenpunkte unveränderlich befestigt an,

denke sich also den Draht mit seiner Elektricität in einen völligen Nichtleiter verwandelt. Trennt man nun den nicht leitenden Draht von der isolirten Kugel an dem Eintrittspunkte in dieselbe, und entfernt ihn möglichst weit, so behält die Kugel alle ihre Elektricität, welche sie zuvor besass, nur vertheilt sich dieselbe gleichmässig über ihre Oberfläche. Nähert man jetzt den als Nichtleiter gedachten Draht wieder bis zur Berührung der Kugel, so stellt sich durch seine Vertheilungswirkung der frühere Zustand genau wieder her.

Die Dicke der elektrischen Schicht $z$ auf dem Drahte werde durch $f(c)$ ausgedrückt, wo $c$ die Entfernung eines Querschnittes der Röhre von dem Mittelpunkte der Kugel bedeutet. Die auf dem um $c$ entfernten Querschnitte befindliche Elektricität würde dann eine Vertheilung auf der Kugel hervorbringen, welche bestimmt wäre durch

$$-\frac{\varrho f(c)}{2cr}\left\{\frac{(c^2-r^2)\,c}{(c^2-2rc\mu+c^2)^{\frac{3}{2}}}-1\right\}dc,$$

wo $r$ den Halbmesser der Kugel und $\varrho$ den Halbmesser der Röhre bedeutet. Um nun die durch den ganzen Draht, der sich bis in grosse Entfernung von der Kugel erstrecken soll, erzeugte Vertheilung zu erhalten, ist der vorstehende Ausdruck von $c=r$ bis $c=\infty$ zu integriren. Dann wäre allein noch die Elektricitätsmenge, welche die Kugel besitzt, oder was dasselbe sagt, die Dicke ihrer gleichförmigen Ausbreitung nach Entfernung des Drahtes zu bestimmen. Auch diese liess sich durch die Bedingungsgleichung berechnen, dass die Dicke der elektrischen Schicht in den Punkten, wo der Draht die Kugel berührt, Null sein muss.

Schon vorhin wurde aber angedeutet, dass sich die Vertheilung der Elektricität auf einem sehr dünnen Drahte in der Nähe der Kugel nicht mit hinreichender Genauigkeit experimentell bestimmen lässt. Mit Hinzuziehung der Rechnung liesse sich jedoch unter Umständen diese Vertheilung aus einer einzigen Messung auf der Kugel herleiten, wenn die allgemeine Form ihres mathematischen Ausdrucks gegeben wäre, und diese nicht mehr als zwei unbekannte Constanten einschlösse.

Nehmen wir an, dass $z=f(c)$ durch dieselbe Function, wie im vorigen Abschnitte, ausgedrückt werde, dass also

$$z=a\alpha\,\frac{c-r}{1+\alpha\,(c-r)}$$

sei, wo $a$ und $\alpha$ zwei noch zu bestimmende Constanten bedeuten.

Die Vertheilung auf der Kugel würde dann gefunden werden durch

das Integral

$$-\frac{a\alpha\varrho}{2cr}\int_r^\infty \frac{c-r}{1+\alpha(c-r)}\left\{\frac{c^2-r^2}{(c^2-2rc\mu+r^2)^{\frac{3}{2}}}-1\right\}dc.$$

Soll die Dicke der elektrischen Schicht nur an dem Punkte $\mu = 1$ der Kugeloberfläche gefunden werden, so geht das vorstehende Integral über in das einfachere

$$-\frac{a\alpha\varrho}{2}\int_r^\infty \frac{(3c-r)\,dc}{c\,(c-r)\,(1+\alpha(c-r))} =$$

$$= -\frac{a\alpha\varrho}{2}\left\{2\log\text{nat.}(c-r)+\frac{1}{1-\alpha r}\log\text{nat.}\,c-\frac{\alpha(3-2r\alpha)}{1-r\alpha}\log\text{nat.}(1+\alpha(c-r))\right\}+\text{Const.}$$

Man erkennt sogleich, dass das vorstehende Integral an beiden Gränzen unendliche Elemente enthält. Es ist daher nicht möglich, unter der gemachten Annahme mittelst der in dem Punkte $\mu = 1$ durch Vertheilung erregten Elektricitätsmenge eine Beziehung zwischen der auf der Kugel und dem Drahte vorhandenen elektrischen Menge zu erhalten. Der Grund dieses Unendlichwerdens liegt nach meinem Dafürhalten nicht nothwendig darin, dass die Form $a\alpha\frac{c-r}{1+\alpha(c-r)}$ eine untaugliche ist, sondern vielmehr in Folgendem:

Wenn die Röhre oder der Draht einen gewissen auch noch so kleinen Durchmesser besitzt, so ist die Elektricität auf ihrer Oberfläche verbreitet, und sie berührt die Kugel in dem Umfange eines Kreises. Bei der obigen Rechnung wurde nun diese Elektricität in die Axe des Drahtes zusammengedrängt. Dadurch muss die Wirkung auf den einzigen Punkt, in welchem die Axe des Drahtes die Kugeloberfläche trifft, unendlich gross werden.

Soll immer noch unter der Voraussetzung, dass die Elektricität in der Axe concentrirt ist, das Unendlichwerden des bestimmten Integrals für $\mu = 1$ vermieden werden, so muss die Zunahme der Elektricität in der Axe des Drahtes langsamer geschehen. Diess erreicht man durch die Wahl einer Potenz des Ausdrucks:

$$\frac{\alpha(c-r)}{1+\alpha(c-r)},$$

welche höher als 1 ist.

Setzt man

$$z = a\alpha^2\left\{\frac{c-r}{1+\alpha(c-r)}\right\}^2,$$

so wird die Dicke der elektrischen Schicht:

$$-\int_r^\infty \frac{a\alpha^2\varrho}{2cr}\left(\frac{c-r}{1+\alpha(c-r)}\right)^2\left\{\frac{(c^2-r^2)\,c}{(c^2-2rc\mu+r^2)^{\frac{3}{2}}}-1\right\}dc.$$

Um das Integral rational zu machen und zu verhindern, dass es an den Gränzen für $\mu=+1$ unendlich wird, setze man

$$c=\frac{r}{x}\cdot\frac{x-t^2}{1-x},$$

wo $2t^2=1-\mu$, also $t$ den Sinus des halben Winkels bedeutet, dessen Cosinus durch $\mu$ ausgedrückt wird. Das vorstehende Integral wird dann, nachdem man den Zähler mit dem Factor $(1-x)$ des Nenners dividirt hat,

$$-\tfrac{1}{2}a\alpha^2 r\varrho\int\frac{(x^2-t^2)^2\left[x^5+2(1-3t^2)x^4-4(1-3t^2)t^2x^3-2(1+4t^4)t^2x^2+(3+4t^2)t^4x-2t^6\right]dx}{x(x-t^2)(x^2-2xt^2+t^2)^2\left\{(1-\alpha r)x^2-x+\alpha rt^2\right\}^2}$$

$c$ durchläuft die Werthe zwischen den geforderten Gränzen, wenn $x$ von $-t$ bis $0$ oder von $t$ bis $1$ variirt. Die Bestimmung ist so zu treffen, dass der Werth von $(c^2-2cr\mu+r^2)^{\frac{1}{2}}$ positiv wird. Mit Rücksicht hierauf ist also das vorstehende Integral von $x=t$ bis $x=1$ zu nehmen.

Setzt man $\mu=+1$, also $t=0$, d. h. sucht die Dicke der elektrischen Schicht für den Punkt, in welchem der Draht die Kugel berührt, so wird das Integral für diesen Fall:

$$-\frac{a\alpha^2\varrho}{2}\int_r^\infty\frac{(3c-r)\,dc}{c\left\{1+\alpha(c-r)\right\}^2}=$$

$$-\tfrac{1}{2}a\alpha^2 r\varrho\int_0^1\frac{(x+2)\,dx}{\left\{1-x(1-\alpha r)\right\}^2}=$$

$$-\tfrac{1}{2}a\alpha^2 r\varrho\,\frac{1}{(1-\alpha r)^2}\left\{\frac{3-2\alpha r}{\alpha r}-(3-2\alpha r)+\log\text{nat.}\,\alpha r\right\}$$

Dieser Werth werde mit $-y_0$ bezeichnet. Ertheilt man nun der Kugel zuvor eine Elektricitätsmenge, welche sie mit einer überall gleichdicken Schicht $y_0$ bedeckt, so wird nach der Annäherung des Drahtes bis zur Berührung der Berührungspunkt keine Elektricität besitzen. Der ihm diametral entgegengesetzte Punkt, für welchen $\mu=-1$, erhält durch die Vertheilung von Seiten des Drahtes eine elektrische Schicht von der Dicke $y_1$, deren Werth das Integral

$$\frac{a\alpha^2\varrho}{2}\int_r^\infty\frac{(c-r)^2(3c+r)\,dc}{c(c+r)^2\left\{1+\alpha(c-r)\right\}^2}$$

gibt. Die ursprünglich vorhandene Elektricität $y_0$, und die mit ihr

gleichnamige durch Vertheilung erregte $y_1$ sollen nun an dem Punkte $\mu = -1$ eine Schicht von der Dicke $= 1$ geben, daraus folgt für die Bestimmung von $a$ und $\alpha$ die eine Bedingungsgleichung

$$y_0 + y_1 = 1.$$

Eine zweite Bedingungsgleichung lässt sich nicht *a priori* gewinnen, es bedarf dazu der Messung des Verhältnisses der Dicke der elektrischen Schicht auf einem beliebigen Punkte der Kugel zu der im Punkte $\mu = -1$ vorhandenen. Gesetzt man hätte den Werth dieser Dicke für $\mu = 0{,}9056$ zu 0,819 bestimmt. Wird dann das obige Integral, das für beliebige Punkte der Kugeloberfläche gilt, gebildet, so lässt sich aus ihm mittelst der Gleichung $y_0 + y_1 = 1$ die Grösse $a$ leicht eliminiren. Um $\alpha$ zu finden, hat man dessen Werth so zu wählen, dass die Formel für $\mu = 0{,}9056$ den gefundenen Werth 0,819 gibt.

Da der zu integrirende allgemeine Ausdruck rational ist, so stehen seiner Integration ausser der sehr langwierigen Zerlegung in Partialbrüche keine Hindernisse entgegen. Da indess sich die Richtigkeit der für die Vertheilung der Elektricität auf dem Drahte angenommene Form

$$a\left(\frac{\alpha(c-r)}{1+\alpha(c-r)}\right)^2$$

nicht nachweisen lässt, so habe ich es vorgezogen, auf einem andern kürzeren Wege die Vertheilung auf dem Drahte zu bestimmen.

Da die oben S. 524 für die Dicke der elektrischen Schicht auf der an einer Röhre von beträchtlicher Dicke befindlichen Kugel aufgestellte Formel die beobachteten Werthe auf dem grössten Theile der Oberfläche der letztern mit hinreichender Genauigkeit darstellt, so liegt es nahe, auch in dem vorliegenden Falle von dieser Form zur Berechnung der elektrischen Schicht Gebrauch zu machen.

Setzt man die Dicke der elektrischen Schicht

$$y = 0{,}9847 - \frac{0{,}02093}{t} + 0{,}1202 \log t\,(t+1),$$

so erhält man

| $\mu$. | Dicke der elektr. Schicht | | Unterschied. |
|---|---|---|---|
| | berechnet. | beobachtet. | |
| $-1{,}0000$ | 1,000 | 1,000 | 0.000 |
| $+0{,}0340$ | 0,964 | 0,966 | $+$ 0,002 |
| $+0{,}5334$ | 0,924 | 0,921 | $-$ 0,003 |
| $+0{,}9056$ | 0,819 | 0,819 | 0,000 |
| $+0{,}9658$ | 0,725 | 0,754 | $+$ 0,029 |

Die vier ersten berechneten Werthe stimmen mit den beobachteten hinlänglich überein. Diess gilt nicht mehr von dem fünften, und wird noch weniger für Werthe von $\mu$, welche grösser sind als 0,96, gelten. Namentlich gibt auch die obige Formel nicht $y = 0$ für den Punkt, wo die Oberfläche des Drahtes die Kugel trifft. Der Draht, an welchem die Kugel bei obigen Messungen hing, hatte $0{,}125^{mm}$ Durchmesser, so dass seine Oberfläche die Kugel in einem Kreise berührte, der ungefähr um 3,75′ von dem Punkte $\mu = -1$ abstand; es ist für denselben also $t = 0{,}00054$. In diesem Kreise muss die Dicke der elektrischen Schicht $= 0$ sein. Die vorstehende Formel gibt aber $y = 0$ für einen Kreis, der ungefähr $\frac{1}{2}^0$ von dem Punkte $\mu = -1$ absteht. Handelt es sich nun um Wirkungen in die Ferne, so kann man die obige Formel ohne Weiteres gebrauchen, und die kleinen Abweichungen, wenn es nöthig sein sollte, in einer Correction beifügen; sollen indess, wie nachher der Fall sein wird, die Anziehungen auf den Punkt $\mu = -1$ berechnet werden, so ist selbstverständlich ein solcher mathematischer Ausdruck nöthig, der in der Nähe dieses Punktes die wirkliche Vertheilung der Elektricität mit möglichster Genauigkeit wiedergibt, der also vor Allem $y = 0$ gibt für $t = 0{,}00054$. Setzt man

$$y = 0{,}9382 - \frac{0{,}0001453}{t} + 0{,}2054 \log t\,(1 + t),$$

so erhält man

| $\mu$. | $t$. | Dicke der elektr. Schicht berechnet. | Dicke der elektr. Schicht beobachtet. | Unterschied. |
|---|---|---|---|---|
| −1,0000 | 1,0000 | 1,000 | 1,000 | 0,000 |
| 0,0340 | 0,6950 | 0,960 | 0,966 | + 0,006 |
| 0,5334 | 0,4830 | 0,908 | 0,921 | + 0,013 |
| 0,9056 | 0,2173 | 0,819 | 0,819 | 0,000 |
| 0,9658 | 0,1307 | 0,766 | 0,754 | − 0,012 |
| | 0,00054 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

also $y = 0$ für $t = 0{,}00054$.

Ich habe, wie man sieht, zur Bestimmung der Constanten in vorstehender Formel die drei Werthe 1,000, 0,819, 0,000 genommen. Die Abweichung für $\mu = 0{,}9658$ beträgt $-0{,}012$; hätte ich diese Messung selbst mit zu jener Bestimmung benutzt, so würde die Abweichung für diesen Punkt ganz weggefallen sein. Diess aber nicht zu thun, bestimmte mich die an dieser Stelle der Kugel so ausserordentlich rasche

Aenderung in der Dicke der elektrischen Schicht, welche leicht zu merklich grössern Beobachtungsfehlern als auf den übrigen Punkten der Kugel Veranlassung geben kann.

Wenn es sich nun um die Berechnung der Anziehung der auf der Kugel verbreiteten Elektricität auf den Punkt $\mu = -1$ handelt, so werde ich von beiden Formeln Gebrauch machen; die erstere werde ich anwenden von $t = 0{,}2173$ bis $t = 1$, und die zweite von $t = 0{,}00054$ bis $t = 0{,}2173$.

Mittelst der vorhergehenden Ausdrücke für die Dicke der elektrischen Schicht lässt sich die Menge der auf der Kugel angehäuften Elektricität berechnen. Man erhält dieselbe durch das schon oben S. 525 angegebene Integral

$$2r^2\left\{\frac{t^2}{2}(a-cm)+t\left(\frac{cm}{2}-b\right)+\frac{c}{2}\left(t^2\log t\,(1+t)-\log(1+t)\right)\right\}+\text{Const.},$$

worin $m$ den Modulus der Briggischen Logarithmen bedeutet. Mittelst der Constanten

$$a=0{,}9847,\quad b=0{,}02093,\quad c=0{,}1201$$

erhält man als Werth dieses Integrals von $t = 0{,}2173$ bis $t = 1$

$$0{,}9101\,r^2.$$

Mit den Constanten

$$a=0{,}9382,\quad b=0{,}0001453,\quad c=0{,}2054,$$

wird der Werth des Integrals von $t = 0{,}00045$ bis $t = 0{,}2173$

$$0{,}0363.$$

Die Menge der auf der Kugel vorhandenen Elektricität, wenn ihre Dicke im Punkte $\mu = -1$, gleich 1 gesetzt wird, beträgt also

$$0{,}9464\,r^2,$$

oder, da $r = 58{,}95$

$$3289.$$

Sucht man den Schwerpunkt dieser Elektricität, so erhält man denselben, wenn man mit der vorstehenden Elektricitätsmenge in den zwischen den gehörigen Gränzen genommenen Werth des Integrals

$$r^3t\left\{-2b+\frac{t^2}{3}(4b-cm)+t\,(1-t^2)\left[a-\frac{cm}{2}+c\log t\,(1+t)\right]\right\}+\text{Const.}$$

dividirt. Diess Integral ist zwischen denselben Gränzen zu nehmen, wie das vorhergehende, und ebenso haben die Constanten die zuvor angegebenen Werthe. Zwischen $t = 0{,}00054$ und $t = 0{,}2173$ ist der Werth

$$+\,0{,}03443\,r^3,$$

und zwischen $t = 0{,}2173$ und $t = 1$ ergibt sich derselbe

$$-\,0{,}04622\,r^3,$$

also die Summe beider

$$-\,0{,}01179\,r^3 \text{ oder } -\,2415.$$

Durch Division dieses Werthes mit der obigen Elektricitätsmenge findet man die Entfernung des Schwerpunktes der auf der Kugel ausgebreiteten Elektricität vom Mittelpunkte der Kugel:

$$-\,0{,}01246\,r \text{ oder } -\,0{,}7344^{mm}.$$

Das — Zeichen deutet an, dass er nach der von der Röhre abgewandten Seite hin liegt.

Zur Bestimmung der elektrischen Vertheilung auf dem Drahte lässt sich nun folgender Weg einschlagen. Die Annahme, dass die Dicke der elektrischen Schicht $z$ auf dem Drahte durch eine ähnliche Function, wie früher auf der Röhre, in angenäherter Weise sich werde darstellen lassen, ist wohl nicht unwahrscheinlich. Ich werde also

$$z = a\,\frac{x}{\alpha + x}$$

setzen, wo $x$ die Entfernung eines Querschnittes des Drahtes von dem die Kugel berührenden Ende, und $a$ und $\alpha$ zwei noch zu bestimmende Constanten bezeichnen. $a$ ist, wie aus dem Frühern bekannt, die constante Dicke in grösserer Entfernung von der Kugel. Als Längeneinheit soll der Einfachheit wegen der Halbmesser der Kugel genommen werden.

Man bestimme zuvörderst die Anziehung der Kugel einerseits und des Drahtes andererseits auf den Punkt der Kugeloberfläche, in welchem die Axe des Drahtes diese Oberfläche trifft: so müssen diese beiden Anziehungen gleich sein. Man bestimme ferner die Anziehungen der auf genannten beiden Körpern verbreiteten Elektricitäten auf einen Punkt der Axe des Drahtes, welcher z. B. um 1 (also um den Halbmesser der Kugel) von der Kugeloberfläche absteht: so müssen auch diese beiden Anziehungen gleich sein. Man erhält folglich zwei Gleichungen, aus denen sich die beiden Unbekannten $a$ und $\alpha$ bestimmen lassen. $a$ kann man ohne Schwierigkeit eliminiren, und $\alpha$ dann durch Versuche näherungsweise bestimmen. Ich wähle gerade den Punkt, der um 1 von der Kugeloberfläche absteht, weil die Berechnung der auf ihn ausgeübten Anziehungen eine hinreichende Schärfe in der Bestimmung der Constanten gestattet, was bei grössern Entfernungen nicht in gleichem Maasse

möglich ist, weil die Anziehung der Kugel ebenso wie die Anziehung des Drahtes sich immer mehr der Null nähert.

Die Anziehung, welche die auf der Kugel verbreitete Elektricität auf einen Punkt der Axe des Drahtes, der um $\lambda$ von der Oberfläche der Kugel absteht, ausübt, erhält man durch

$$-2\int \frac{y(\lambda+2t^2)\,t\,dt}{\{\lambda^2+4(1+\lambda)t^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

wo $y=a-\frac{b}{t}+c\log t(1+t)$ die Dicke der elektrischen Schicht auf der Kugel bedeutet. Bezeichnet man mit $m$ den Modulus der Briggischen Logarithmen und setzt

$$R=\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+(1+\lambda)t^2},$$

so ist das allgemeine Integral des vorstehenden Ausdrucks

$$\frac{1}{2(1+\lambda)^2}\left\{-y\frac{(1+\lambda)t^2-\frac{1}{2}\lambda}{R}+\frac{b\lambda}{2t(R+t\sqrt{1+\lambda})}+2cmR+\sqrt{1+\lambda}\left(\frac{b}{m}-c\right)\log(R+t\sqrt{1+\lambda})+\right.$$
$$\left.+c\left[\log\left\{\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)R+(1+\lambda)t+\tfrac{1}{4}\lambda^2\right\}-\log(1+t)-\log\frac{R-\frac{\lambda}{2}}{t}\right]\right\}+\text{Const.}$$

Das Integral ist zunächst für

$$y=0{,}9847-\frac{0{,}02093}{t}+0{,}1202\log t(1+t)$$

zu nehmen von $t=0{,}2173$ bis $t=1$; und dann für

$$y=0{,}9382-\frac{0{,}0001453}{t}+0{,}2054\log t(1+t)$$

von $t=0{,}00054$ bis $t=0{,}2173$.

Setzt man $\lambda=0$, d. h. sucht man die Anziehung auf den in der Kugeloberfläche liegenden Punkt der Axe des Drahtes, und vereinigt alle im obigen Ausdrucke vorkommenden constanten Grössen mit der Integrationsconstante, so wird das allgemeine Integral für diesen Fall

$$\tfrac{1}{2}\left\{-yt+2mct+\frac{b}{m}\log t-c\log(1+t)\right\}+\text{Const.},$$

dessen Werth zwischen den angegebenen Gränzen

$$-0{,}4452$$

beträgt. Setzt man $\lambda=1$, d. h. sucht die Anziehung auf den um den Halbmesser der Kugel von deren Oberfläche abstehenden Punkt, so wird

$$R=\sqrt{\tfrac{1}{4}+2t^2}$$

und das obige allgemeine Integral

$$\tfrac{1}{8}\left\{-y\frac{2t^2-\frac{1}{2}}{R}+\frac{b}{2t(R+t\sqrt{2})}+2cmR+\sqrt{2}\left(\frac{b}{m}-c\right)\log(R+t\sqrt{2})+c\left[\log\{\tfrac{3}{2}R+2t+\tfrac{1}{4}\}-\log(1+t)-\log\frac{R-\frac{1}{2}}{t}\right]\right\}+\text{Const.}$$

dessen Werth zwischen den angegebenen Gränzen

$$-0{,}2322$$

ist.

Beträgt nun, wie oben angenommen, die Dicke der elektrischen Schicht auf einem Punkte der Oberfläche des Drahtes

$$z = \frac{ax}{\alpha+x},$$

so wird die Anziehung der auf dieser Oberfläche verbreiteten Elektricität auf einen Punkt der Axe, der um $\gamma$ von dem Ende absteht,

$$\frac{a\varrho}{2}\int_0^\infty \frac{x}{\alpha-x}\cdot\frac{x-\gamma}{\{(x-\gamma)^2+\varrho^2\}^{\frac{3}{2}}}\,dx.$$

Das allgemeine Integral dieses Ausdruckes ist

$$\tfrac{1}{2}\frac{a\varrho}{(\alpha+\gamma)^2+\varrho^2}\Big\{-\frac{\varrho^2+\alpha x+\gamma^2}{\sqrt{(x-\gamma)^2+\varrho^2}}$$

$$-\frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\sqrt{(\alpha+\gamma)^2+\varrho^2}}\log\text{nat.}\frac{\sqrt{(x-\gamma)^2+\varrho^2}\sqrt{(\alpha+\gamma)^2+\varrho^2}+\varrho^2-(\alpha+\gamma)(x-\gamma)}{\alpha+x}\Big\}+\text{Const.};$$

sein Werth zwischen den angegebenen Gränzen

$$\tfrac{1}{2}\frac{a\varrho}{\{(\alpha+\gamma)^2+\varrho^2\}}\Big\{\sqrt{\varrho^2+\gamma^2}-\alpha$$

$$-\frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\sqrt{(\alpha+\gamma)^2+\varrho^2}}\log\text{nat.}\frac{\alpha\{\sqrt{(\alpha+\gamma)^2+\varrho^2}-(\alpha+\gamma)\}}{\sqrt{\gamma^2+\varrho^2}\sqrt{(\alpha+\gamma)^2+\varrho^2}+\varrho^2+\gamma(\alpha+\gamma)}\Big\}.$$

Dieser wird für $\gamma = 0$

$$\tfrac{1}{2}\frac{a\varrho}{\alpha^2+\varrho^2}\Big\{\varrho-\alpha-\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\varrho^2}}\log\text{nat.}\frac{\alpha(\sqrt{\alpha^2+\varrho^2}-\alpha)}{\varrho(\sqrt{\alpha^2+\varrho^2}+\varrho)}\Big\}$$

und für $\gamma = 1$

$$\tfrac{1}{2}\frac{a\varrho}{(\alpha+1)^2+\varrho^2}\Big\{\sqrt{\varrho^2+1}-\alpha$$

$$-\frac{\alpha(\alpha+1)}{\sqrt{(\alpha+1)^2+\varrho^2}}\log\text{nat.}\frac{\alpha\{\sqrt{(\alpha+1)^2+\varrho^2}-(\alpha+1)\}}{\sqrt{\varrho^2+1}\sqrt{(\alpha+1)^2+\varrho^2}+\varrho^2+(\alpha+1)}\Big\}.$$

Das Verhältniss zwischen den Anziehungen, welche die auf der Kugel verbreitete Elektricität auf die beiden zuvor genannten Punkte ausübt, ergibt sich aus dem Vorhergehenden zu 1,918. Diess muss nun aber dem Verhältniss zwischen den von der Röhre auf dieselben Punkte ausgeübten Anziehungen gleich sein, woraus die Gleichung

$$1{,}918 = \frac{(\alpha+1)^2+\varrho^2}{\alpha^2+\varrho^2}\;\frac{\varrho-\alpha-\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\varrho^2}}\log\text{nat.}\frac{\alpha}{\varrho}\frac{\sqrt{\alpha^2+\varrho^2}+\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\varrho^2}+\varrho}}{\sqrt{\varrho^2+1}-\alpha-\frac{\alpha(\alpha+1)}{\sqrt{(\alpha+1)^2-\varrho^2}}\log\text{nat.}\frac{\alpha[\sqrt{(\alpha+1)^2+\varrho^2}-(\alpha+1)]}{\sqrt{\varrho^2+1}\sqrt{(\alpha+1)^2+\varrho^2}+\varrho^2+(\alpha+1)}}$$

folgt, die zur Bestimmung der einzigen in ihr vorhandenen unbekannten

Grösse $\alpha$ dienen kann. Die Bestimmung von $\alpha$ wird dadurch erleichtert, dass $\rho$ eine sehr kleine Grösse ist, deren höhere Potenzen überall vernachlässigt werden dürfen, und dass man für $\alpha$ eine untere Gränze kennt. Vergleicht man nämlich die Vertheilung auf der Röhre von 38,1$^{mm}$ Durchmesser und auf dem dünnen Drahte, während beide eine Kugel von 117,91$^{mm}$ Durchmesser tragen, so ergibt selbst eine oberflächliche Erwägung, dass die Elektricität auf dem dünnen Drahte langsamer wachsen muss, als auf der dicken Röhre. Für die Röhre vom Durchmesser 38,1$^{mm}$ wurde nach S. 444 die Vertheilung durch

$$\frac{0{,}845\,x}{0{,}1780+x}$$

ausgedrückt; es wird also jetzt $\alpha$ wenigstens grösser als 0,1780 sein müssen, so dass $\rho^2$ gegen $\alpha^2$ vernachlässigt werden darf. Die vorstehende Gleichung wird dann

$$1{,}918=\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\rho-\alpha-\alpha\log\text{nat.}\frac{\rho}{2\alpha}}{1-\alpha-\alpha\log\text{nat.}\frac{\alpha\rho^2}{4(\alpha+1)^2}}$$

und wenn man nun auch noch $\rho$ selbst gegen $\alpha$ vernachlässigt,

$$1{,}918=\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha^2}\cdot\frac{-1-\log\text{nat.}\frac{\rho}{2\alpha}}{1-\alpha-\alpha\log\text{nat.}\frac{\alpha\rho^2}{4(\alpha+1)^2}}.$$

Hieraus ergibt sich $\alpha=0{,}7965$ und aus den weiter obenstehenden Gleichungen $a=104{,}3$. Die elektrische Vertheilung auf dem Drahte wird also angenähert ausgedrückt durch die Formel

$$\frac{104{,}3\,.\,x}{0{,}7965+x},$$

wo $x$ die Entfernung des betreffenden Querschnittes von dem Ende der Röhre bezeichnet.

## XI. Ueber elektrische Maassbestimmungen nach absolutem Maasse mittelst der Drehwage.

### 1. *Beschreibung einer kleinen Drehwage und Messungen mit derselben.*

In der Ecke eines Zimmers, welche gegen Luftströmungen geschützt war, wurde mittelst sogenannter Bankeisen ein auf seiner obern Fläche eben zugerichtetes Brett befestigt. Ein Kreis von etwas mehr als 460$^{mm}$ Durchmesser war auf dieser obern Fläche mit Stanniol beklebt, und konnte durch einen seitwärts gehenden Stanniolstreifen mit der Erde in leitende Verbindung gesetzt werden. Innerhalb dieser Kreisfläche waren

in Abständen von $278^{mm}$ und $345^{mm}$ vier starke Messingstäbe mittelst dicker Schellackringe isolirt durch das Brett, senkrecht gegen dessen Ebene, hindurchgeführt und unverrückbar festgestellt. Unterhalb des Brettes endigte jeder Stab in eine Klemmschraube zur Aufnahme der Poldrähte einer Volta'schen Säule; an seinem obern Ende aber war eine horizontale Hülse von $28,5^{mm}$ Länge und von $6,4^{mm}$ Weite angebracht, in welche kürzere oder längere Messingstäbe von gleichem Durchmesser eingeschoben werden konnten. Jeder dieser letzteren Messingstäbe trug eine Kugel von $19,85^{mm}$ Durchmesser, die sorgfältig rund gearbeitet war, wovon ich mich durch Einpassen in einen ausgedrehten Ring überzeugte. Zwei diagonal gegenüberstehende Kugeln und Stäbe wurden mittelst ihrer Klemmschrauben mit dem einen Pole einer Volta'schen Säule und die beiden andern mit dem andern Pole derselben Säule, deren Mitte zur Erde abgeleitet war, in Verbindung gesetzt. Zwischen diesen vier Kugeln, mit ihnen in gleicher Höhe, schwebte der von einem Stahldrahte getragene Wagebalken, gebildet aus einer hohlen $6,4^{mm}$ im Durchmesser haltenden Röhre, welche an jedem Ende eine wohlgerundete Kugel von $19,85^{mm}$ Durchmesser und unterhalb der Mitte an einem sehr kurzen Stäbchen zwei symmetrisch gestellte, einander mit ihrer Rückseite zugewandte und in gerundete Messingfassungen eingelegte Spiegel trug, zwischen denen zur Spannung des Aufhängedrahtes noch ein rundes Bleigewicht hing. Auf der Röhre waren in $32,48^{mm}$ und $241,73^{mm}$ Entfernung feine Rinnen eingedreht, in welche zur Bestimmung des Trägheitsmomentes zwei Gewichte mit ihren Schneiden eingehangen werden konnten. Beide Gewichte zusammen betrugen 19885,8 Milligramme. Dieselben blieben auch beim Messen der elektrischen Anziehungen und Abstossungen in den der Drehaxe nächsten Rinnen hängen.

Die bis jetzt erwähnten metallischen Theile der Drehwage konnten vollständig zugedeckt werden durch einen Holzring (von etwas über $280^{mm}$ Höhe und $453^{mm}$ innerem Durchmesser), und durch einen darauf passenden in zwei Hälften geschnittenen Deckel, in dessen Mitte eine Oeffnung zum Durchgange für den Aufhängedraht des Balkens angebracht war. Der Holzring war auf seiner Innenseite und ebenso die beiden Deckelhälften auf ihrer untern Seite mit Stanniol beklebt. An dem obern Rande setzten sich diese Deckelhälften mit einem Falz hinreichend dicht auf den Ring; an dem untern Rande, wo der Ring auf der ebenen Fläche des Brettes stand, erreichte ich durch Bekleben mit Tuch und Streifen

Pelzwerk einen dichten Anschluss, so dass die Schwingungen des Wagebalkens durch Strömungen von aussen nicht gestört werden konnten. An einer Seite war in den Holzring ein Planglas eingesetzt. Vor je zwei der in dem Boden des horizontalen Brettes befestigten Stäbe, welche sich auf einer und derselben Seite des Wagebalkens befanden, war ein ebenes vertikales Zinkblech von der Höhe des Holzringes mit zwei $12^{mm}$ im Durchmesser haltenden Durchbohrungen gestellt, so dass die oben erwähnten Hülsen frei durch diese Oeffnungen hindurchgingen, ohne das Blech zu berühren. Jedes der beiden Bleche war so breit, dass es das Stanniol des Holzringes mit seinen seitlichen Kanten berührte; eine Berührung zwischen den vertikalen Stäben und diesen Blechen fand dagegen nirgends statt. Das eine der Bleche musste dem Planglase gegenüber noch eine etwas grössere Oeffnung erhalten, um durch sie hindurch den Spiegel sehen zu können.*)

Der innere Raum, in welchem sich der Balken der Drehwage mit seinen zwei Kugeln sammt den vier von den horizontalen Stäben getragenen Kugeln befand, war also auf vier Seiten (oben, unten und zu beiden Seiten des Balkens) von Ebenen, vorn und hinten (d. h. an den in der Verlängerung des Balkens liegenden Seiten) von einer cylindrisch gekrümmten Fläche begrenzt. Alle innern Flächen waren metallisch und erhielten eine Ableitung zur Erde.

Der Stahldraht, welcher den Wagebalken trug, war ungefähr $3215^{mm}$ lang, und oben nahe an der Decke auf folgende Weise befestigt. Ein dreiarmiges Eisenstück war oberhalb des Kastens der Drehwage mit seinen drei Armen in die Wand eingesetzt. An der Verbindungsstelle der drei Arme war eine Scheibe mit aufrechtem kreisrunden Rande aufgeschraubt; auf diesen Rand passte genau eine andere runde Scheibe mit ihrem Rande, so dass letztere um ihren Mittelpunkt gedreht werden konnte. Diese Drehung vermochte ich von unten, von dem Sitze vor dem Fernrohre aus mittelst einer langen Stange und eines Universalgelenkes zu bewirken. Das Universalgelenk war nämlich verbunden mit einer neben der obern Scheibe liegenden Schraube ohne Ende, welche in den gezähnten Rand dieser drehbaren Scheibe eingriff. Diese letztere

*) Diese beiden Zinkbleche sind, wenn es sich nur um relative Messungen handelt, überflüssig. Ihr Vorhandensein in der obigen Drehwage war durch Versuche, dieselbe zu absoluten Bestimmungen zu gebrauchen, veranlasst worden.

Scheibe war in ihrem Mittelpunkte durchbohrt und trug neben dieser Durchbohrung auf ihrer obern Seite zwei Schellackstäbe, auf denen oben eine Vorrichtung befestigt war, wie sie für die Aufhängung der Magnetometerstäbe angewandt wird, nämlich eine horizontale Schraube, in deren Windungen sich der Draht legt, und die, wenn der Draht die rechte Länge hat, durch Zusammenpressen des einen Lagers an weiterer Umdrehung verhindert wird. Von dieser Schraube, die also isolirt war, ging der Draht durch die Durchbohrung der Scheiben hinab zu dem Wagebalken. Das zum Ablesen dienende Fernrohr trug gleich über sich auf seinem Stative die Skale, und stand auf einem an der Wand in der entgegengesetzten Ecke der Stube befestigtem Brette. Die Entfernung der Skale vom Spiegel war 4178$^{mm}$. Mittelst der vorhin beschriebenen Vorrichtung (der langen Stange, dem Universalgelenk u. s. w.) war es leicht, den Wagebalken in jede beliebige Stellung zu bringen, oder ihn in Schwingungen zu setzen, ohne dass Erschütterungen des Schwerpunktes entstanden; ebenso konnte man auch seine zu grossen Schwingungen mässigen.

Um den mit der Hand berührten Wagebalken in sehr kurzer Zeit zur Ruhe zu bringen, selbst wenn man z. B. die Gewichte verschoben hat, gibt es ein sehr einfaches Mittel. Man nimmt zwei aufrechte schmale Gegenstände, welche mit einem kleinen Fusse versehen sind, stellt sie in die Drehwage auf eine und dieselbe Seite des Balkens und rückt sie, während ein Gehülfe in das Fernrohr blickt, abwechselnd immer näher an den Balken dergestalt heran, dass im Fernrohr nahe die Skalentheile erscheinen, bei welchen der Balken in Ruhe ist. Durch scharfes Anstellen dieser Gegenstände an den Balken hören die Bewegungen seines Schwerpunktes infolge der Reibung bald auf; man zieht dann den einen Gegenstand sehr wenig zurück, so dass der Balken frei wird, lässt letztern sich noch etwas beruhigen, und nimmt zuletzt die beiden Gegenstände nach einander hinweg, aber jeden nur in solchem Augenblicke, wo ihn der Balken nicht berührt. Auf diese Weise braucht man nur einige Minuten, um die Drehwage wieder zum Beobachten bereit zu haben.

Vor Allem war es nun nöthig, die Torsionskraft des Drahtes zu bestimmen. Es sei $\vartheta$ die Kraft, welche erfordert wird, um den Draht, wenn sie auf einen an ihm befestigten Hebelarm von der Länge $= 1^{mm}$ wirkt, um die Einheit, d. h. um einen dem Halbmesser gleichen Bogen zu drehen, die also der Draht auch ausübt, wenn er um diese Grösse gedreht

ist. Wird er um $\varphi$ gedreht, so ist $\vartheta\varphi$ die Kraft, mit welcher er in seine ursprüngliche Lage zurückzukehren strebt. Bekanntlich hat man zwischen diesem Drehungsmomente $\vartheta$, dem Trägheitsmomente $C$ des Balkens mit seinem ganzen Zubehör und der Schwingungsdauer $t$ desselben die Gleichung

$$\vartheta t^2 = \pi^2 C$$

oder wenn man $C$ zerlegt in das Trägheitsmoment des Balkens nebst seinem unbeweglich mit ihm verbundenen Zubehör (Kugeln, Bleigewicht, Spiegel) $K$ und in das Trägheitsmoment der verschiebbaren Gewichte $2pr^2$, wo $2p$ die Masse beider Gewichte und $r$ ihre Entfernung von der Drehaxe bedeutet,

$$\vartheta t^2 = \pi^2 (K + 2pr^2),$$

woraus, wenn alle übrigen Grössen bekannt sind, sich $\vartheta$ berechnen lässt.

Dazu bedarf es zweier Schwingungsbeobachtungen mit verschiedenen Entfernungen der Gewichte. Als die Gewichte auf den um $32{,}48^{mm}$ von der Drehaxe abstehenden Rinnen hingen, fand ich die Schwingungsdauer (Dauer einer einfachen Schwingung) $= 47{,}478''$ mittlerer Zeit, und als sie auf den um $241{,}73^{mm}$ abstehenden Rinnen hingen, fand ich die Schwingungsdauer $60{,}165''$ mittlerer Zeit. Man erhält also zur Bestimmung von $\vartheta$ und $K$ die beiden Gleichungen

$$\vartheta \,.\, (47{,}478)^2 = \pi^2 (K + 19885{,}8 \,.\, (32{,}48)^2)$$
$$\vartheta \,.\, (60{,}165)^2 = \pi^2 (K + 19885{,}8 \,.\, (241{,}73)^2).$$

Hieraus ergibt sich $K = 1862600000$

und $\vartheta = 8246900$

oder $\log \vartheta = 6{,}91629$.

Wird die Schwere ausgedrückt durch das hier als Einheit für die beschleunigenden Kräfte angenommene Maass, so ist sie $= 9811{,}63$. Setzt man die Schwere selbst als Einheit der beschleunigenden Kräfte, so wird

$$\vartheta = 840{,}52,$$

d. h. es ist der Druck von 840,52 Milligramm auf einen Hebelarm von $1^{mm}$ nöthig, um den Draht um die Einheit oder einen Bogen von $57^0 17' 44{,}8''$ zu drehen.

Die beobachteten Schwingungsdauern bedürfen keiner Reduction auf unendlich kleine Bogen, weil die beschleunigende Kraft, wie schon vorhin angeführt, in dem vorliegenden Falle proportional dem Bogen selbst, und nicht wie bei der Schwere und der magnetischen Kraft proportional dem Sinus desselben wächst. Hingegen könnten dieselben möglicherweise eine Correction wegen der Dämpfung der Schwingungen

durch den Widerstand der Luft erfordern, die bedeutender ist, als sie Gauss in den *Resultaten des magnetischen Vereins für* 1837, S. 75, für die Berechnung der Schwingungsdauer ohne Dämpfung aus der mit Dämpfung für das Magnetometer aufstellt; und diese Correction wird dann um so mehr Berücksichtigung verdienen, da das logarithmische Decrement in dem vorliegenden Falle nicht unbedeutend ist. Dasselbe betrug z. B. während der Schwingungen, bei welchen sich die Gewichte auf $32{,}48^{mm}$ Entfernung befanden, 0,0103. Ich mag jedoch jetzt über die Beziehung zwischen Schwingungsdauer und logarithmischem Decrement um so weniger eine bestimmte Meinung aussprechen, weil meine Drehwage gegen kleine Erschütterungen, die theils von dem Zuwerfen der Thüren im Universitätsgebäude, theils von den vorbeifahrenden Wagen herrührten, nicht vollständig geschützt war; ich werde später die Untersuchung hierüber wieder aufnehmen. Bei den obigen Schwingungsbeobachtungen habe ich mich bemüht, den Einfluss der Temperatur dadurch zu beseitigen, dass ich dieselbe constant erhielt, was selbst in den Monaten, wo die Zimmer geheizt werden, leicht zu erreichen ist. Bemerken will ich nur noch, dass während der kältern Monate nicht die Stube selbst, worin die Drehwage aufgestellt war, sondern blos die Nebenstube geheizt wurde; in der ersten Stube blieb auch während der Beobachtung der vollkommen dicht anliegende Fensterladen selbst am Tage geschlossen.

Wie sehr die Stellungen des Balkens der Drehwage bei gleichen äussern Einflüssen sich gleich blieben, mögen z. B. folgende Angaben zeigen. An einem Tage war die Ruhelage desselben 676,8. Nach drei Stunden, während welcher der Balken durch zugeleitete Elektricität in beständigen meist starken Schwingungen gewesen, indem bei einer Reihe von Messungen mit dem Elektrometer die nicht weiter beobachtete Drehwage mit den elektrischen Drähten zusammenhing, war sie 677,6. Am darauf folgenden Morgen fand ich sie 677,4 und nach vierstündigen meist sehr starken Schwingungen 676,5.

Die Elektricität, welche zu den Kugeln der Drehwage geführt wurde, stammte, wie schon oben angedeutet, aus den beiden Polen einer Volta'schen Säule, die bei den zunächst mitzutheilenden Messungen aus 406 kleinen Kupfer- und Zinkelementen mit gewöhnlichem Brunnenwasser als flüssigem Leiter bestand. Alle einzelnen mit Flüssigkeiten gefüllten Gläser standen auf gut isolirenden Harzkuchen. Die Mitte der

Säule erhielt durch den Blitzableiter eine Ableitung zur Erde. Wie nahe constant sich die Elektricität in den Polen dieser Säule aus so zahlreichen Elementen hielt, mögen folgende Versuche beweisen. Nachdem die Säule theilweise bis sechs Tage lang schon zusammengesetzt gestanden, aber ohne geschlossen worden zu sein, wurden folgende Stellungen des Balkens beobachtet. Jede Angabe ist das Mittel aus fünf Elongationen. Es möge $a$ die Ruhelage des Balkens im nicht elektrischen Zustande bezeichnen; $b$ wenn er sammt den vier Standkugeln elektrisch ist, und zwar während er mit dem einen Pole in Verbindung steht; $c$ dagegen während im Balken und den vier Kugeln sich gerade die entgegengesetzten Elektricitäten durch Verbindung mit den entgegengesetzten Polen der Säule befinden.

$$a = 676{,}8,$$
$$b = 519{,}7,$$
$$c = 531{,}6.$$

Nach dreistündigem Gebrauche der Säule zu elektrischen Messungen erhielt ich

$$b = 520{,}0,$$
$$c = 533{,}0,$$
$$a = 677{,}6.$$

Am andern Morgen

$$a = 677{,}4,$$
$$b = 523{,}0,$$
$$c = 533{,}9.$$

Nach vierstündigem Gebrauch der Säule zu elektrischen Messungen

$$b = 522{,}3,$$
$$c = 534{,}0,$$
$$a = 676{,}5.$$

Das arithmetische Mittel der elektrischen Spannungen an beiden Polen $\frac{(a-b)+(a-c)}{2}$ ist also:

in der ersten Messung $\frac{157{,}1+145{,}2}{2} = 151{,}1$,

in der zweiten Messung $\frac{157{,}6+144{,}6}{2} = 151{,}1$,

am andern Morgen:

in der ersten Messung $\frac{154{,}4+143{,}5}{2} = 148{,}9$,

in der zweiten Messung $\frac{154{,}2+142{,}5}{2} = 148{,}3$.

Die Abnahme der elektrischen Spannung während der Nacht ist zum Theil eine Folge der Erniedrigung der Temperatur in der Säule.

Ich hatte später Veranlassung, eine Säule aus 782 Elementen von der angeführten Beschaffenheit aufzustellen; und auch bei dieser Anzahl von Elementen zeigte sich dieselbe Beständigkeit in der Intensität ihrer Pole während mehrerer Stunden, trotzdem dass diese Pole mit mehreren hundert Fussen dünnen Kupferdrahtes, die theils durch Schellack, theils aber auch nur durch Siegellackstangen isolirt waren, in Verbindung standen. Nach längeren Zeiträumen indess fand sich die Intensität vermindert. Die Ausschläge der obigen Drehwage würden bei der zuvor beschriebenen Einrichtung derselben zu gross geworden sein; ich entfernte daher die feststehenden Kugeln möglichst weit von den Kugeln des Balkens, so dass ihre Entfernung von den letztern gegen 155$^{mm}$ betrug. Bald nach dem Einsetzen der Zinkkupferelemente in die isolirten Wassergefässe belief sich der Unterschied zwischen den beiden Stellungen des Balkens bei Ladung mit den entgegengesetzten Elektricitäten auf 263,0 Skalentheile; am andern Tage Morgens auf 246,7, Nachmittags auf 244,2; am Morgen des dritten Tages auf 227,3. Am Nachmittage dieses dritten Tages betrug dieser Unterschied 225,6, und nach zweistündigem Gebrauche, wobei zwar die Pole durch Umlegen zweier Commutatoren sehr häufig mit den entgegengesetzten Leitungsdrähten der Drehwage verbunden, aber jede Schliessung der Kette sorgfältig vermieden wurde, noch 225,5 Skalentheile.

Es möge nicht auffallen, dass in den auf der vorhergehenden Seite mitgetheilten Messungen der eine Pol der Säule bedeutend stärker ist als der andere. Der Grund liegt darin, dass von den 406 Elementen ungefähr 270 Elemente einige Tage länger gestanden hatten, der Rest dagegen mit blanken Metallflächen erst später, und zwar an die eine Seite der 270 Elemente angesetzt worden war. Die stärkere elektrische Spannung gehört auch zu dem Pole, auf dessen Seite sich die später eingesetzten, noch dazu aus ganz anderm Kupfer und Zink bestehenden Elemente befanden. Eine solche Ungleichheit in den Polen ist übrigens bei dem von mir vorhin schon befolgten Verfahren der Messung völlig gleichgültig, wie sich leicht ergibt. Es sei $A$ die Menge der auf jeder Kugel der Drehwage befindlichen Elektricität, wenn beide Pole der Säule bei Ableitung ihrer Mitte genau gleichstark wirken. Gesetzt es werde die Ableitung aus der Mitte der Säule verrückt, so dass die Menge auf den mit dem einen Pole verbundenen Kugeln sich auf $A+x$ erhöht, und auf den mit dem andern verbundenen sich auf $A-x$ vermindert. Ist der

Balken der Drehwage mit dem stärkern Pole verbunden, so wird die Abstossung zwischen der einen Kugel desselben und der mit demselben Pole verbundenen feststehenden Kugel $(A+x)^2$, die Anziehung zwischen der Kugel des Balkens und der mit dem andern Pole verbundenen Kugel dagegen $(A+x)(A-x) = A^2-x^2$; die Summe beider in gleicher Richtung thätigen Wirkungen also $(A+x)^2 + A^2-x^2$. Ist der Balken der Drehwage mit dem schwächern Pole verbunden, so wird die Abstossung der gleichnamig elektrischen Kugel $(A-x)^2$, und die Anziehung der andern ungleichnamig elektrischen $(A-x)(A+x) = A^2-x^2$, also die Summe beider Wirkungen $(A-x)^2+A^2-x^2$. Das arithmetische Mittel aus beiden Gesammtwirkungen gibt $2A^2$, d. h. gerade dasselbe Resultat, als wenn jeder der beiden Pole dem andern genau gleich und jede Kugel die Elektricitätsmenge $A$ enthalten hätte. Das Verfahren, aus den Ausschlägen, welche in den beiden verschiedenen Lagen des Commutators erhalten werden, das arithmetische Mittel zu nehmen, ist also vollständig gerechtfertigt.

Aus den Ablenkungen des Balkens der Drehwage aus seiner Ruhelage liesse sich, wenn keine weitern Störungen vorhanden wären, die Menge der auf den Kugeln, dem Balken und den Stäben angehäuften Elektricität berechnen.

Wir wollen hier den Fall annehmen, dass die gesammte Elektricität, aus deren Anziehungen und Abstossungen die S. 547 angeführten Ablenkungen der Drehwage hervorgingen, nur auf den sechs Kugeln und zwar gleichförmig und auf allen in gleicher Dicke verbreitet gewesen sei, so erhielte man ihre Menge auf folgende Weise. Wenn auf allen Kugeln die Elektricität gleichmässig verbreitet ist, so kann man dieselbe im Mittelpunkte derselben vereinigt setzen. Es sei nun die Ablenkung der Drehwage in Theilen des Radius ausgedrückt $\varphi$, und $\vartheta$ die Kraft, welche nöthig ist, um bei ihrer Wirkung auf einen am untern Ende des Aufhängedrahtes befindlichen Hebelarm von $1^{mm}$ Länge, den Draht um die Einheit zu drehen. Es sei ferner $l$ die Entfernung des Mittelpunktes jeder der beiden Kugeln des Balkens von dem Drehpunkte, also die Länge des Hebelarmes für die Wirkungen der in diesen Mittelpunkten vereinigt gedachten Elektricitätsmengen, und $e$ die Entfernung der Mittelpunkte je zweier feststehenden Kugeln, welche einer und derselben Kugel des Balkens sich gegenüber befinden. Es werde ferner die ursprüngliche Ruhelage so gewählt, dass die Kugeln der Drehwage während ihrer

Ablenkung genau die Mitte der die eben bezeichneten feststehenden Kugeln verbindenden graden Linien einnehmen; die Entfernung der beweglichen Kugeln von den feststehenden beträgt dann $\frac{e}{2}$.

Ist der Radius einer Kugel $= r$, die Dicke der auf ihr gleichförmig verbreiteten Elektricität $= y$, so beträgt ihre Menge nach S. 443 $yr^2$, die wir als in dem Mittelpunkte der Kugeln vereinigt nehmen können. Das aus der gegenseitigen Wirkung einer beweglichen und einer der feststehenden Kugeln hervorgehende Drehungsmoment ist also, da beide Kugeln gleichgrosse Elektricitätsmengen besitzen,

$$\frac{4y^2r^4l}{e^2}.$$

Das durch die Wirkung aller vier feststehenden Kugeln auf die zwei beweglichen am Balken erzeugte Drehungsmoment beträgt dann

$$\frac{16y^2r^4l}{e^2}.$$

Diesem Drehungsmomente muss das Drehungsmoment aus der Torsion des Drahtes $\varphi\vartheta$ das Gleichgewicht halten. Man hat also

$$\frac{16y^2r^4l}{e^2} = \varphi\vartheta,$$

wo Alles ausser $y$ bekannt ist; es wird aber

$$y = \frac{e}{4r^2}\sqrt{\frac{\varphi\vartheta}{l}}.$$

Nun ist $r = 9{,}925^{mm}$, $\frac{e}{2} = 69{,}17^{mm}$ und $l = 138{,}915^{mm}$. Beträgt der Ausschlag 148,6 Skalentheile, so wird $\varphi = 1^0\ 1'\ 8''{,}2 = 0{,}01788$ des Bogens, der gleich dem Halbmesser ist. $\vartheta$ ist $= 8246900$, und $\varphi\vartheta$ hiernach $= 146700$. Hieraus ergibt sich

$$y = 11{,}41.$$

Die soeben berechnete Dicke der elektrischen Schicht 11,41 wurde nun auf der Kugel hervorgebracht durch ihre Verbindung mit dem einen Pole einer Säule aus 203 Elementen Kupfer-Zink-Wasser, deren anderer Pol zur Erde abgeleitet war; (die ganze Säule enthielt nach S. 546 406 Elemente, und war in der Mitte abgeleitet). Ein Element dieser Säule von mittlerer Stärke, dessen einer Pol zur Erde abgeleitet ist, würde, wenn man nur die Kugeln der Drehwage zu berücksichtigen hätte, durch seinen andern Pol der Kugel eine elektrische Schicht ertheilt haben, deren Dicke 0,05621 betrüge.

## 2. *Einfluss der Umgebungen auf die elektrischen Vertheilungen in der Drehwage.*

Indess so einfach, wie eben angenommen, gestalten sich die Verhältnisse an der zuvor beschriebenen Drehwage nicht. Denn

1) ist die Elektricität auf den Kugeln nicht gleichförmig vertheilt, ja selbst nicht einmal auf allen in gleicher Menge und in gleicher Weise angeordnet vorhanden; und

2) findet sich ausser auf den Kugeln auch noch Elektricität auf dem Wagebalken und den Stäben der feststehenden Kugeln.

Die Ungleichförmigkeit in der Vertheilung der Elektricität auf den Kugeln hat sehr verschiedene Ursachen. Sie rührt her

1) von dem Einflusse der mit ihnen verbundenen Röhren und Stäbe;
2) von der Rückwirkung der freien innern Wände des Holzringes, des Bodens und des Deckels des Gehäuses;
3) von der Einwirkung der seitlichen Zinkplatten;
4) von den Vertheilungswirkungen und Rückwirkungen der Kugeln auf einander, und
5) von der Vertheilungswirkung der Röhre und der Stäbe auf die übrigen nicht von ihnen getragenen Kugeln.

Aehnliche Ursachen ändern auch die Vertheilung auf der Röhre und den Stäben ab.

Von den oben genannten Ursachen für die Ungleichförmigkeit in der Dicke der elektrischen Schicht bleibt der Einfluss der ersten stets in voller Stärke und muss durch besondere Messungen genau bestimmt werden, wie diess oben S. 508 auch geschehen ist, während die übrigen sich durch angemessene Einrichtungen sehr verringern oder auch fast ganz beseitigen lassen. Aus dem Bestreben, die Einflüsse aller dieser Ursachen in Rechnung ziehen zu können, sind die oben von S. 511 bis S. 523 mitgetheilten Messungen hervorgegangen. Nehmen wir an, dass diese Einflüsse nicht für die zuvor beschriebene Drehwage, sondern für eine ihr vollkommen ähnlich gebaute, aber in allen ihren Dimensionen 5,94mal vergrösserte Drehwage bestimmt werden sollten, so würden die früher mitgetheilten Messungen dazu die nöthigen Mittel liefern, indem dann die Kugeln der Drehwage 117,91$^{mm}$ und die Röhren und Stäbe 38,12$^{mm}$ im Durchmesser halten würden. Ich will die Werthe der einzelnen Correctionen, welche durch diese äussern Einwirkungen

nöthig werden, hier nicht speciell aufführen; man kann sie leicht aus den frühern Messungen in angenäherter Weise entnehmen.

Nur die Ungleichförmigkeit, welche auf den Kugeln des Balkens durch die Vertheilungswirkung von Seiten der feststehenden Kugeln, und ebenso auf den feststehenden Kugeln durch den Einfluss der Elektricität der Kugeln des Balkens entsteht, verdient noch einer besondern Besprechung. Es genügt aber in dieser Beziehung, die eine Hälfte des Balkens zu betrachten, indem die Verhältnisse auf der andern Hälfte genau dieselben sind. Die beiden feststehenden Kugeln, welche sich seitlich in gleichen Entfernungen von einer und derselben Kugel des Balkens befinden, mögen mit *A* und *C*, und die zwischen ihnen schwebende Kugel des Balkens mit *B* bezeichnet werden. Gesetzt *A* und *B* seien positiv, *C* aber negativ. Durch die gegenseitige Einwirkung der elektrischen Kugeln *A* und *B* auf einander entsteht auf *B* eine sehr starke elektrische Vertheilung, deren Betrag ich z. B. für 2 Kugeln von 117,91$^{mm}$ Durchm. bei 410$^{mm}$ Abstand ihrer Mittelpunkte genauer bestimmt habe, aber der Kürze wegen, da kein weiterer Gebrauch von ihnen gemacht wird, nicht mittheilen will. Um indess eine Vorstellung von der Grösse dieser Vertheilung zu geben, möge erwähnt werden, dass die elektrische Schicht an den einander nächsten Punkten der genannten Kugeln, wenn sie bis auf die angegebene Entfernung einander genähert werden, um nahe $\frac{1}{8}$ der ursprünglichen Dicke vermindert wird. Von gleicher Grösse ist nun auch der Einfluss der Kugel *C* auf die Kugel *B*, vorausgesetzt, dass die Entfernungen der Kugel *B* von den Kugeln *A* und *C* einander gleich sind; der Einfluss der Kugel *C* strebt aber, weil *C* negative Elektricität enthält, die ursprüngliche Dicke auf *B* nicht zu vermindern, sondern gerade entgegengesetzt zu vermehren. So viel positive Elektricität nun durch die positive Kugel *A* aus *B* herausgedrängt wird, gerade so viel zieht die negative Kugel *C* wieder nach *B* herein, so dass *B* unter dem vereinigten Einflusse beider Kugeln *A* und *C* genau dieselbe Elektricitätsmenge enthält, als bei Abwesenheit derselben. Aber diese Elektricitätsmenge ist auf *B* sehr ungleich vertheilt, so dass ihre Dicke auf dem Punkte von *B*, welcher der Kugel *C* zunächst liegt, ungefähr um $\frac{1}{4}$ grösser, und in dem entgegengesetzten um $\frac{1}{4}$ geringer ist, als ursprünglich.

Einen ähnlichen Einfluss erleiden nun auch die feststehenden Kugeln durch die Elektricität der Kugeln am Balken, und zwar wird die Elektricität durch die Vertheilungswirkung in *A* vermindert und in *C*

vermehrt; diese Vermehrung in $C$ beträgt bei gleichem Abstande wieder gerade so viel, wie die Verminderung in $A$.

Bei der Grösse dieses gegenseitigen Einflusses leuchtet ohne Weiteres ein, dass wenn seine genaue Kenntniss durchaus nothwendig wäre, eine hinreichend scharfe Berechnung der auf den Kugeln vorhandenen Elektricität und der von ihr ausgeübten Anziehungen und Abstossungen mit vielen Schwierigkeiten verbunden sein würde. Die von mir gewählte Einrichtung macht aber eine solche Kenntniss unter der Voraussetzung eines nicht zu geringen Abstandes der Kugeln überflüssig; es lässt sich nämlich dann leicht nachweisen, dass die zuvor angeführten Vertheilungen das Drehungsmoment nicht merklich stören. Gesetzt wir hätten eine Drehwage, deren sämmtliche Dimensionen 5,94mal grösser wären als die der zuvor beschriebenen. Wir wollen der Einfachheit wegen die gesammte Aenderung in der Anordnung der Elektricität auf den beweglichen und feststehenden Kugeln allein auf die bewegliche Kugel $B$ des Balkens übertragen, und die Annahme machen, dass der Schwerpunkt der auf der Kugel $B$ angehäuften Elektricität hiedurch um $15^{mm}$, also um mehr als den vierten Theil des Halbmessers, nach $C$ hin verschoben worden sei; eine Annahme, welche die durch diese Vertheilung wirklich erzeugte Ungleichförmigkeit beträchtlich übersteigt. Der Abstand der Mittelpunkte der Kugeln $A$ und $C$ in der vergrösserten Drehwage würde $820^{mm}$, und also der Mittelpunkte der Kugeln $A$ und $B$, und $B$ und $C$ $410^{mm}$ betragen. Legt man in den Mittelpunkt jeder Kugel die Elektricitätsmenge 1, so ist die von $A$ und $C$ auf $B$ ausgeübte Abstossung und Anziehung $\frac{2}{410^2} = 0{,}00001190$. Behält die Kugel $B$ ihre Lage, aber der Schwerpunkt der auf ihr angehäuften Elektricität wird um $15^{mm}$ nach $C$ zu verschoben, so ist die Summe der Abstossung und Anziehung $\frac{1}{395^2} + \frac{1}{425^2} = 0{,}00001194$; dieselbe zeigt sich also gegen zuvor nur ungefähr um den 0,003 Theil vermehrt. Innerhalb dieser Gränzen der Genauigkeit kann daher in vorliegendem Falle von den zuvor besprochenen Vertheilungen ganz abgesehen und die Rechnung einfach so ausgeführt werden, als ob dieselben nicht existirten. Die Bedingung, welche erfüllt sein musste, war aber, dass die Kugel $B$ gerade die Mitte zwischen $A$ und $C$ einnimmt. Dieselbe ist indess stets leicht zu erfüllen, indem man mittelst der oben erwähnten Stange durch Umdrehung des obern Endes des Aufhängedrahtes den Balken während seines elektri-

schen Zustandes in die verlangte Stellung bringt; denn bei Abwesenheit jeder elektrischen Ladung der Kugeln ist ja die Lage des Balkens völlig gleichgültig. Man erkennt leicht, dass mit der Vergrösserung der Entfernung und ebenso mit der Verringerung des Durchmessers der Kugeln, auf denen dann eine geringere Verschiebung des elektrischen Schwerpunktes statt findet, die Aenderung in der Summe der Anziehungen und Abstossungen sich bedeutend vermindert, so dass dieselbe bei der angegebenen Entfernung für Kugeln von 10mm Halbmesser ganz unterhalb der Gränze der durch die Drehwage noch messbaren Einflüsse fallen würde.

Nimmt man die frühern Messungen von S. 511 bis S. 523 zu Hülfe, so ist es also möglich, aus den Ablenkungen des Balkens der vergrösserten Drehwage mit derselben Genauigkeit mit welcher die Anordnung der Elektricität auf den Kugeln und Stäben und deren gegenseitige Vertheilungswirkungen bekannt sind, die Menge der auf jeder Kugel vorhandenen Elektricität oder auch die Dicke der elektrischen Schicht z. B. in dem vordersten Punkte der Kugeln am Balken zu berechnen. Wenn nun der Satz hier Geltung hätte, dass auf zwei Systemen von verschiedener Grösse, welche in allen Theilen ähnlich gebildet sind, das Verhältniss der Dicken der elektrischen Schicht an zweien Punkten des einen Systemes genau gleich wäre dem Verhältnisse der Dicken an den zwei entsprechenden Punkten des andern Systemes: so würde das zuvor von der vergrösserten Drehwage Ausgesagte auch ohne Weiteres auf die kleine, wirklich ausgeführte. oben S. 541 bis S. 544 beschriebene Drehwage Anwendung finden. Der angeführte Satz passt aber leider nicht auf den vorliegenden Fall, weil nicht alle Verhältnisse der Dimensionen dieselben bleiben können, und die Elektricitätsmenge, mit welcher die Kugeln durch ihre Stäbe in Verbindung stehen, eine gewissermassen unerschöpfliche Quelle von unveränderlicher Spannung bildet. Dass der obige Satz hier in der That nicht angewendet werden darf, weisen schlagend die frühern Messungen auf der grossen und kleinen Kugel S. 513 u. 522 nach. Denn wie bei der Drehwage die Volta'sche Säule immer neue Elektricitätsmengen liefert, gerade so verbreitete sich in den frühern Messungen die Elektricität von dem innern Belege der Batterie aus über die mit ihr verbundene Kugel und Röhre, wenn eine leitende Ebene oder andere Kugeln genähert wurden, ohne eine merkliche Schwächung der freien elektrischen Spannung in der

Batterie selbst zu erzeugen; denn die bei diesem Vorgange der Batterie entzogene Elektricitätsmenge ist im Vergleich zu dem ganzen in der Batterie angehäuften Vorrathe als unendlich klein zu betrachten.

Es wird genügen, einen einzigen Fall hier hervorzuheben. Als der grossen Kugel von 117,91$^{mm}$ Durchmesser eine leitende Ebene von vorn her bis auf einen Abstand vom 8,83fachen ihres Halbmessers (d. h. bis 520,5$^{mm}$) genähert wurde, betrug die Zunahme am vordersten Punkte der Kugel (nach S. 512) 0,048, wenn die bei Abwesenheit der Ebene in diesem Punkte vorhandene Dicke = 1 gesetzt wird. Wenn dagegen dieselbe Ebene der kleinen Kugel von 19,85$^{mm}$ Durchmesser bis ebenfalls auf das 8,83fache ihres Halbmessers, also bis auf 87,6$^{mm}$ genähert wird, so muss diese Zunahme, wenn man das S. 521 angeführte Gesetz anwendet, 0,313 betragen; sie wird also mehr als 6½mal grösser sein, als bei der grossen Kugel unter ähnlichen Verhältnissen. Es stehen übrigens diese Zahlen 0,048 und 0,313 auch nicht etwa in solchem Verhältnisse, dass die Zunahme auf der kleinern Kugel soviel mal die Zunahme auf der grössern Kugel überträfe, als die Dicke der elektrischen Schicht an dem vordersten Punkte der kleinen Kugel grösser ist als an dem vordersten Punkte der grossen Kugel; denn die Dicke dieser Schicht an dem genannten Punkte der kleinen Kugel ist ungefähr 4mal grösser als an dem entsprechenden Punkte der grossen. Auch ist ja das Gesetz, nach welchem sich diese Zunahmen mit den verschiedenen Entfernungen der Ebene ändern, (wie schon früher S. 522 bemerkt wurde) für beide Kugeln nicht ein und dasselbe.

Wie bei der Verringerung der Dimensionen der Einfluss der vor der Kugel des Balkens befindlichen Wand wächst, in ähnlicher Weise müssen auch die übrigen oben erwähnten Vertheilungswirkungen zunehmen. Der Betrag derselben wird für die kleine Drehwage mit den oben S. 541 ff. beschriebenen Dimensionen so bedeutend werden, dass seine Auswerthung, wenn überhaupt ausführbar, nur mit der allergrössten Anstrengung gewonnen werden könnte. Man sieht also, dass eine Drehwage von solchen Dimensionen zur Erlangung absoluter Werthe von Elektricitätsmengen oder Dicken der elektrischen Schichten wenigstens für jetzt gänzlich unbrauchbar ist. Ihr Gebrauch ist dagegen, weil sie wenig Raum in Anspruch nimmt und die Schwingungsdauer ihres Balkens nicht gross ist, sehr bequem, wo es nur auf relative Messungen ankommt, oder auch selbst bei der Erzielung absoluter Werthe, wenn

ihre Ausschläge zuvor mit den Ausschlägen einer andern Drehwage, welche absolute Werthe zu berechnen gestattet, verglichen worden sind, und dafür Sorge getragen wird, dass die Kugeln des Balkens während der Ablenkung des letztern aus seiner Ruhelage durch die vorhandenen Elektricitätsmengen stets die Mitte zwischen den seitwärts von ihnen befindlichen feststehenden Kugeln einnehmen.

Je grösser der Raum ist, in welchem man die Drehwage aufstellt, und je grösser die Entfernungen der Kugeln von einander sind, um so geringer werden die Vertheilungswirkungen auftreten, so dass sie bei einer gewissen Entfernung der Kugeln von einander und von den umgebenden Wänden gänzlich oder fast gänzlich vernachlässigt werden können. Da aber nicht immer ein geeigneter Raum von der zuletzt angedeuteten Grösse zu Gebote steht, so wird das Bedürfniss zur Benutzung eines in seinen Dimensionen unter der angedeuteten Gränze liegenden Raumes zwingen. In solchen Fällen werden die im siebenten Abschnitte mitgetheilten Messungen für die Auswerthung der mannichfachen äussern Einwirkungen auf die verschiedenen Punkte der Kugeln und Stäbe manche Erleichterungen verschaffen, wenn sie selbstverständlich auch nicht alle directen Messungen ersparen können. In jedem Falle wird es bei der Construction einer Drehwage für absolute Messungen zweckmässig sein, die Entfernungen der Theile, welche einen vertheilenden Einfluss auf einander ausüben können, so gross zu nehmen, als es irgend die Umstände gestatten.

### 3. *Brauchbarkeit der kleinen Drehwage zu relativen Messungen.*

Bevor ich diese Drehwage verlasse, will ich noch Einiges über ihren Gebrauch als Elektrometer hinzufügen.

Die Drehwage überhaupt lässt sich in doppelter Weise zu elektrischen Messungen benutzen. Erstens kann man dieselbe, wenn zwei nahe gleichstarke Elektricitäten gegeben sind, auf die vorher beschriebene Weise gebrauchen, so dass man also ihre feststehenden und beweglichen Kugeln respective mit der einen oder andern Elektricitätsquelle verbindet; zweitens gestattet sie aber auch, falls nur eine Elektricitätsquelle gegeben ist, eine Verwendung nach Art der im zweiten Abschnitte beschriebenen Elektrometer, so dass man die feststehenden Kugeln in angemessener Weise mit den beiden entgegengesetzten Polen einer Volta'schen Säule verbindet, und dann den Kugeln des Balkens die

zu messende Elektricität zuführt; in diesem letzten Falle gestattet die Drehwage auch noch eine Zurückführung auf ein absolutes Maass. Man verbindet nämlich zuvor nach einander die beiden Pole der Säule, welche zu den feststehenden Kugeln geleitet sind, mit dem Balken und leitet daraus in absolutem Maasse die Menge oder Dicke der elektrischen Schicht auf den feststehenden Kugeln her; wird dann der Balken mit der gegebenen Elektricitätsquelle verbunden, und seine Ablenkung gemessen, so liefert die zuvor berechnete Dicke der elektrischen Schicht auf den vier feststehenden Kugeln und die zuletzt gemessene Grösse des Ausschlags nebst der bekannten Torsion des Drahtes und den gegebenen Dimensionen des Apparates alle Data, welche zu einer absoluten Bestimmung der Intensität der Elektricitätsquelle erforderlich sind.

Jede Aenderung in der Stärke der mit den Standkugeln verbundenen Säulenpole lässt sich gerade auf dieselbe Weise, wie oben bei dem Elektrometer (S. 427 ff.) bestimmen und in Rechnung ziehen.

Was die Empfindlichkeit der obigen Drehwage bei Messungen von sehr schwachen Elektricitäten anlangt, so lässt dieselbe Nichts zu wünschen übrig. Es wird genügen in dieser Beziehung folgenden Versuch anzuführen. Ich nahm nur zwei Elemente aus Kupfer, Zink und Wasser, und ordnete sie zu einer Säule, deren Mitte zur Erde abgeleitet, und deren Pole respective mit den Standkugeln und mit dem Balken verbunden wurden. Als die feststehenden Kugeln den Kugeln des Balkens so weit genähert waren, dass die nächsten Punkte ihrer Oberflächen noch einige Millimeter von einander abstanden, erhielt ich durch Umlegen eines Commutators, der nur die Elektricität in den Standkugeln (aber nicht in dem Balken) umkehrte, Aenderungen von 0,2 Skalentheilen in der Lage des Balkens. Nun lässt sich aber durch Anwendung eines feinern Drahtes diese Empfindlichkeit noch vielfach erhöhen; denn aus dem früher (S. 545) mitgetheilten Werthe über das Drehungsmoment ersieht man, dass der Draht nicht zu den feinsten gehörte. Es würde also möglich sein, durch einen feinern Aufhängedraht und durch weitere Annäherung der Standkugeln die Empfindlichkeit noch sehr bedeutend zu erhöhen. Ich hatte einen etwas dickern Draht wählen müssen, weil sonst die Ausschläge des Balkens bei der Stärke der Elektricität, wie ich sie zu meinen Versuchen brauchte, viel zu gross geworden wären.

Will man ausser einer gegebenen Elektricitätsquelle noch eine Volta'sche Säule zu Hülfe nehmen, also die Drehwage nach dem zweiten

der vorhin angegebenen Verfahren benutzen, so lässt sich die Empfindlichkeit ins Unglaubliche vermehren. Bei einer Entfernung der beiden einander gegenüberstehenden Standkugeln von 138,34$^{mm}$ betrug nach S. 547 der Ausschlag, als jede derselben ebenso wie der Balken mit einer Elektricitätsschicht, wie sie der Spannung einer Säule von 203 Zinkkupferelementen entspricht, bedeckt war, 148,6 Skalentheile. Bliebe diese Entfernung und die Verbindung der Standkugeln mit den Polen der Säule ungeändert, so würde eine dem Wagebalken zugeführte Elektricität von der Stärke der elektrischen Spannung an dem einen Ende eines einzigen Elementes, wenn sein anderes Ende zur Erde abgeleitet wäre, schon einen Ausschlag von 0,7 Skalentheilen erzeugen. Man wird folglich leicht übersehen können, wie gross selbst nur unter Voraussezzung einer Zunahme nach dem umgekehrten quadratischen Verhältniss der Entfernungen dieser Ausschlag werden muss, wenn man die Standkugeln den Kugeln des Balkens sehr nahe bringt, jedoch stets unter Erhaltung einer stabilen Gleichgewichtslage; in Wirklichkeit wird derselbe aber infolge der Vertheilungswirkungen noch grösser werden.

Der Einwurf, dass für absolute Bestimmungen sehr schwacher Elektricitäten diese Drehwage doch nicht geeignet sei, weil sie bei sehr grosser Empfindlichkeit keine Vergleichung mit einer andern Drehwage, die zu absoluten Bestimmungen dient, aber viel weniger empfindlich ist, erlaube, lässt sich sogleich beseitigen. Die Drehwage von kleinen Dimensionen ist nur desshalb nicht ohne Weiteres zu absoluten Messungen brauchbar, weil ihre einzelnen Theile einen zu starken vertheilenden Einfluss auf einander ausüben. Dagegen kann man die Torsion ihres Drahtes mit beliebiger Schärfe bestimmen. Ist aber der vertheilende Einfluss einmal bestimmt, so bleibt derselbe, so lange alle Entfernungen ungeändert bleiben, ebenfalls ungeändert. Man kann daher diesen Einfluss für eine Drehwage von kleinen Dimensionen auswerthen, indem man zuvörderst durch Vergleichung mit einer zu absoluten Messungen unmittelbar brauchbaren Drehwage den Balken der erstern an einem dickeren Drahte aufhängt. Wird dann später dieser dickere Draht durch einen dünnern ersetzt, so ist, wenn die Torsionen beider Drähte aus Schwingungsbeobachtungen des Balkens im belasteten und unbelasteten Zustande bekannt sind, auch die kleinere Drehwage mit ihrem sehr dünnen Drahte zu absoluten Messungen verwendbar.

In Fällen, wo der Unterschied in der Empfindlichkeit der beiden

zu vergleichenden Drehwagen nicht gar zu gross ist, wird das folgende Verfahren noch leichter zum Ziele führen. Man verbinde die Pole einer in ihrer Mitte abgeleiteten Säule mit der weniger empfindlichen zu absoluten Messungen tauglichen Drehwage, dagegen die Mitte einer jeden Hälfte derselben Säule mit der andern Drehwage, und bestimme die Ablenkungen für beide Drehwagen. Darauf mache man die frühern Endpole der Säule zu ihrer Mitte, leite solche ab, und verbinde die erste Drehwage mit den jetzigen Endpolen (den frühern mittleren Elementen der ganzen Säule), während die Verbindungen der zweiten Drehwage mit der Mitte jeder Hälfte ungeändert bleiben. Während auf die erste Drehwage stets die ganze Säule wirkt, ist mit der zweiten nur die eine oder andere Hälfte derselben verbunden. Wenn alle Elemente der Säule eine gleichstarke elektrische Spannung erzeugten, so wäre nur die Verbindung einer Hälfte der Säule mit der zweiten Drehwage nöthig, indem die Ablenkung den vierten Theil von derjenigen betragen müsste, welche die ganze Säule gäbe. Da eine solche Gleichheit aber nicht vorhanden ist, so müssen beide Hälften nach einander gemessen werden. Geschehen alle Umwechselungen in den Verbindungen ohne Erschütterung und Schliessung der Säule, so ist keine Störung in der Stärke derselben zu befürchten, was übrigens auch die grössere Drehwage sogleich anzeigen würde. Die so erhaltenen Data reichen hin, um die Angaben der zweiten Drehwage durch Vergleichung mit den Ablenkungen der ersten auf ein absolutes Maass zurückzuführen.

Da die elektrische Spannung in den Polen einer Säule bei vorsichtiger Behandlung sich längere Zeit constant erhält, so gibt es auch, ohne dass man nöthig hat, den Aufhängedraht zu ändern, noch ein anderes einfaches Verfahren, um eine weniger empfindliche Drehwage empfindlicher und dennoch zu absoluten Messungen nicht untauglicher zu machen. Gesetzt in der oben beschriebenen kleinen Drehwage seien die ruhenden Kugeln so weit als möglich von den Kugeln des Balkens entfernt, und durch Vergleichung mit einer grossen Drehwage alle Data zur Reduction der durch ihre Ablenkungen angezeigten Wirkungen auf absolute Maasse gewonnen worden. Man verringere nun, weil die Drehwage nachher empfindlicher gemacht werden soll, die Anzahl der Elemente in der Säule, und beobachte bei der bisherigen Anordnung die durch dieselben bewirkten Ablenkungen; dann nähere man die ruhenden Kugeln den beweglichen, und messe die Ablenkun-

gen von Neuem. Diese Messungen liefern ein Mittel, um die Drehwage auch in ihrer neuen Anordnung zu absoluten Messungen der auf Körpern, z. B. einer an einem Drahte frei in einem grossen Raume hängenden und durch diesen Draht mit dem Balken der Drehwage in Verbindung stehenden Kugel, zu benutzen.

Im Vorhergehenden wurde die Forderung aufgestellt, dass bei allen diesen Messungen der Balken der Drehwage im abgelenkten Zustande stets mitten zwischen beiden Kugeln sich befinden solle. Sind indess die Entfernungen der Kugeln von einander gross, wie z. B. in der nachstehend beschriebenen Drehwage, so darf man sich bei geringen Ausschlägen auch folgendes Verfahren gestatten. Man richtet den Balken so, dass seine Kugeln im nicht elektrischen Zustande sich mitten zwischen den Standkugeln befinden, setzt dann den Balken und die Standkugeln mittelst zweier passend eingeschalteten Commutatoren nacheinander mit den entgegengesetzten Polen der Säule in Verbindung, und nimmt aus den vier beobachteten Ausschlägen das Mittel. Die frühern Erörterungen lehren übrigens, wie weit diess Verfahren in jedem einzelnen Falle erlaubt ist.

4. *Beschreibung einer grossen Drehwage und Messungen mit derselben.*

Um eine Messung der Elektricität nach absolutem Maasse ausführen zu können, bleibt, wie zuvor gezeigt, Nichts übrig als eine Drehwage zu construiren, bei welcher die früher bezeichneten Vertheilungswirkungen gänzlich oder fast gänzlich zu vernachlässigen sind. Zu diesem Zwecke benutzte ich einen dunklen Raum von mehr als 5 Meter Länge, über 3 Meter Breite und fast 4,7 Meter Höhe. An der Mitte der Decke desselben ward eine ähnliche Vorrichtung, wie oben S. 543 beschrieben, zur isolirten Aufhängung des Drahtes befestigt; sie erhielt nur insofern eine verbesserte Einrichtung, als die Zuleitung zum Aufhängedrahte mittelst einer auf einem kreisförmigen Messingstück schleifenden Metallfeder geschah, so dass der Draht an seinem obern Ende mittelst Eingriffs einer Schraube ohne Ende in den gezähnten Rand einer Scheibe beliebig oft umgedreht werden konnte, ohne dass der Zuleitungsdraht diese Umdrehungen störte. An dem von dem Mittelpunkte dieser drehbaren Scheibe herabgehenden Drahte ward die Mitte eines Wagebalkens von 1582,65$^{mm}$ Länge befestigt. Der Wagebalken bestand in seinem mittleren Theile aus einem massiven Metallstabe von 6,5$^{mm}$ Dicke,

während die Enden, um das Trägheitsmoment möglichst zu vermindern, aus sehr dünnwandigen hohlen Röhren von gleichem Durchmesser gebildet waren. An den Enden befanden sich hohle Kugeln von 20,12$^{mm}$ Durchmesser, deren Mittelpunkte also 1602,77$^{mm}$ von einander und 801,38$^{mm}$ von der Drehungsaxe entfernt waren. An einem in der Verlängerung des Aufhängedrahtes unterhalb des Balkens befindlichen Stäbchen war ein Planspiegel befestigt; das untere Ende dieses Stäbchens trug ein gegen 4 Pfund schweres Bleigewicht zur Spannung des Drahtes.

Der Balken ward so gerichtet, dass er in der Ruhe parallel mit den langen Seiten des Zimmers lag. An diesen langen Seiten des Zimmers waren an den Wänden Vorrichtungen angebracht, um isolirt einerseits 985$^{mm}$, und andererseits 1100$^{mm}$ lange und 6,5$^{mm}$ dicke Metallstäbe zu tragen. Die Axen je zweier Metallstäbe fielen verlängert zusammen, standen senkrecht auf der Ruhelage des Balkens und gingen durch den Mittelpunkt der einen Kugel des Balkens in seiner Ruhelage. Jeder dieser Metallstäbe trug eine Kugel von 20,12$^{mm}$ Durchmesser, und der Abstand der Mittelpunkte je zweier Kugeln zur Seite eines Armes des Balkens belief sich auf 900,88$^{mm}$.

Um die Luftströmungen, welche in einem so grossen Raume wegen der Verschiedenheit der Temperatur entstehen müssen, nicht durch Zutritt äusserer Luft zu vermehren, waren die beiden Thüren, welche zu dem sonst übrigens gegen Temperaturschwankungen ziemlich geschützten Raume führten, auf der Innenseite mit Papier überklebt; es blieb in der einen nur ein kleines Thürchen, um in den Raum gelangen zu können, das aber bei den Messungen von aussen ebenfalls mit Papier dicht verklebt wurde. Indess trotz dieser Vorsichtsmassregeln durfte ich keinen sehr dünnen Aufhängedraht anwenden, indem bei der dadurch erzeugten grossen Schwingungsdauer eine genaue Bestimmung der Lage des Balkens unmöglich wurde; ich musste einen ziemlich starken Stahldraht zum Aufhängen wählen, wodurch freilich die Empfindlichkeit der Wage sehr bedeutend verringert wurde, was im vorliegenden Falle um so unangenehmer war, als auch sonst kein Mittel, diese Empfindlichkeit zu erhöhen, vorlag; eine Annäherung der festen Kugeln an die beweglichen des Balkens war nicht gestattet, indem ja eben die Gewinnung von grössern Entfernungen die Aufstellung dieser Drehwage veranlasst hatte. Die Bestimmung der Schwingungsdauer hat, wenn man etwas grosse Schwingungsbogen nimmt, keine Schwierigkeit.

Die Skale stand 5322$^{mm}$ vom Spiegel ab; das Licht gelangte von derselben durch ein in der einen Thür befindliches Planglas auf den Spiegel.

Um den Wagebalken nicht durch zu grosse Gewichte zu biegen, wurden zur Bestimmung des Trägheitsmomentes nur geringe Gewichte dicht hinter den Kugeln angehangen; sie wogen beide zusammen 6594,3 Milligramme. Die Schwingungsdauer des unbelasteten Balkens betrug 64,77", die Schwingungsdauer nach Anhängung von 6594,3 Milligrammen in 791,32$^{mm}$ Entfernung von der Drehaxe 69,37". Daraus ergibt sich das Trägheitsmoment des Balkens $K$

$$K = 28074000000, \quad \log K = 10,44830$$

und das Drehungsmoment $\vartheta$

$$\vartheta = 66049000, \quad \log \vartheta = 7,81986.$$

Nimmt man die Schwere als Einheit der beschleunigenden Kräfte, so wird $\vartheta = 6731,6,$

d. h. es ist der Druck von 6731,6 Milligrammen auf einen Hebelarm von 1$^{mm}$ nöthig, um den Draht um die Einheit zu drehen. Dieses starke Drehungsmoment bei einem Drahte von 3600$^{mm}$ Länge erlaubt einen Schluss auf seine Dicke, die nach einer oberflächlichen Messung fast $\frac{1}{2}^{mm}$ betrug.

Die Entfernungen der Kugeln von den Wänden sind hinlänglich gross, um bei der jetzt möglichen Genauigkeit den Einfluss der letzteren zu vernachlässigen; ein Gleiches gilt auch von der Einwirkung des Bodens, indem sämmtliche Kugeln und Stäbe sich in einer horizontalen Ebene 1400$^{mm}$ hoch über demselben befanden. Von der Decke des Zimmers standen die Kugeln noch viel weiter (3600$^{mm}$) ab. Die Vertheilungswirkungen der feststehenden Kugeln auf die Kugeln des Balkens, und umgekehrt der letztern auf die erstern, heben sich nach S. 554 auf, und brauchen also nicht weiter berechnet zu werden. Dagegen darf die Einwirkung einer feststehenden Kugel auf die andere trotz der grossen Entfernung von 900,88$^{mm}$ nicht unbeachtet bleiben.

Um bei der Länge des Wagebalkens jeden störenden Einfluss von Seiten der Zuleitungsdrähte zu verhindern, wurden dieselben mit besonderer Vorsicht angeordnet. Sämmtliche fünf Drähte, von denen vier von den feststehenden Kugeln und der fünfte von dem obern Ende des Aufhängedrahtes ausgingen, traten an einer schmalen Seite (Vorderwand) aus dem Raume, in welchem die Drehwage sich befand, heraus. Der von dem obern Ende des Aufhängedrahtes ausgehende Leitungsdraht lief in einer durch den Aufhängedraht und die Axe des ruhenden Balkens gelegten

verticalen Ebene unter der Decke hin, dann an der Vorderwand hinab bis zur Höhe des Balkens, und ging darauf mittelst Schellack isolirt durch die in der Vorderwand befindliche Thür nach aussen. Die Zuleitungsdrähte von den Enden derjenigen Stäbe, welche die beiden hintern Kugeln trugen, liefen durch Schellack isolirt dicht an den Wänden parallel mit dem Balken in seiner Ruhelage bis in die Nähe der Enden der Stäbe, welche die beiden vordern Kugeln trugen, und gingen dann zugleich mit und dicht neben den von diesen Stäben kommenden Drähten an den Wänden weiter bis zur Vorderwand, wo sie durch Schellack isolirt austraten. Die Theile der Zuleitungsdrähte der hintern Kugeln, welche zwischen den Stäben jeder Seite liegen, können auf den Balken der Drehwage keine Anziehung oder Abstossung ausüben, weil ihre Einwirkung auf die eine Hälfte des Balkens durch ihre Einwirkung auf die andere Hälfte aufgehoben wird. Die zwei jederseits von den vordern Stäben an nach der Vorderwand gehenden Leitungsdrähte können ebenfalls die Lage des Balkens nicht ändern, weil beide stets entgegengesetzte und gleiche Elektricitäten führen, also sich in ihrer Einwirkung auf die vordere Hälfte des Balkens aufheben.

Schon vorhin wurde angedeutet, dass die Schwingungen des Balkens an der grossen Drehwage infolge von Luftströmungen, welche im Innern des sie einschliessenden Raumes entstehen, sehr unangenehme Störungen erleiden, während die kleinere Drehwage davon frei ist. Um nun durch diese Störungen nicht bei andern Beobachtungen gehindert zu werden, welche eine Bestimmung der elektrischen Spannung mittelst der Drehwage erfordern, zog ich es vor, zunächst die Ablenkungen der kleinen Drehwage mit denen der grossen zu vergleichen, und dann die kleine Drehwage anstatt der grossen bei der Reduction auf absolute Maasse zu benutzen. Um eine genaue Vergleichung zwischen den Ablenkungen der beiden Drehwagen zu erhalten, verfuhr ich folgendermassen. Es wurden die Pole einer in der Mitte zur Erde abgeleiteten Volta'schen Säule von 782 kleinen Kupferzinkelementen, welche in Wasser standen, und durch Harzkuchen isolirt waren, nacheinander mit den beiden Drehwagen verbunden, dabei durch einen Commutator die Elektricitäten in dem Balken oder in den feststehenden Theilen der Wagen umgekehrt, und die zu den beiden entgegengesetzten Lagen des Commutators gehörigen Ablenkungen bestimmt. Nachdem ich mich zuvor von einer hinreichenden Beständigkeit der Grösse der elektrischen Spannung

an den Polen der Säule überzeugt hatte, wurde also erst die Ablenkung an der kleinen Drehwage gemessen, darauf durch mehrfache Umlegungen an der grossen Drehwage, und schliesslich wieder an der kleinen.

Um genaue Werthe an der grossen Drehwage zu erhalten, musste ich folgendes Beobachtungsverfahren einschlagen. Wenn der Commutator, durch dessen Umlegen der Balken der Drehwage nach der entgegengesetzten Seite getrieben wird, dem vor dem Fernrohre sitzenden Beobachter zur Hand ist, so hat es keine Schwierigkeit, die Schwingungen des Balkens selbst nach dem Umlegen des Commutators so weit zu verringern, dass sie nur wenige Skalentheile betragen, so dass keine Zeit zwischen den Beobachtungen der Elongationen in der einen und in der andern Lage des Balkens verloren geht. Sind ferner die Schwingungen klein, und man folgt dem Balken fortwährend bei seiner langsamen Bewegung mit den Augen, so kann man jede erhebliche Störung durch Luftströmungen deutlich erkennen. Alle solche Beobachtungen, wo ich erhebliche Störungen bemerkte, wurden sofort bei Seite gelegt. Dass es möglich ist, bei geduldigem Ausharren ruhige Perioden in den Schwingungen des Balkens anzutreffen, mag z. B. folgende Beobachtungsreihe beweisen. Die Schwingungsdauer des Balkens betrug 64,77″ Secunden, wonach die auf die folgende Reihe von möglichst schnell nach einander gemachten Beobachtungen verwandte Zeit wenigstens 15 Minuten erreicht hat.

| Lage des Commutators. | Elongationen. | Ruhelage des Balkens in der Ablenkung. | Unterschiede je zweier auf einander folgenden Ruhelagen. |
|---|---|---|---|
| Erste | 233,2 | | |
| | 244,5 | 238,9 | |
| | 233,5 | | 23,2 |
| Zweite | 207,5 | | |
| | 224,0 | 215,7 | |
| | 207,7 | | 23,1 |
| Erste | 250,6 | | |
| | 228,1 | 238,8 | |
| | 248,5 | | 23,3 |
| Zweite | 206,1 | | |
| | 226,2 | 215,5 | |
| | 204,9 | | |

Man sieht übrigens, wie der Balken seine Lage allmählig in der Weise

etwas änderte, dass er auf kleinere Zahlen ging. Durch die Umlegung des Commutators änderte gleichzeitig der Balken der kleinen Drehwage bei denselben Verbindungen mit der Säule seine Lage um 226,2 Skalentheile.

Die beiden Pole der Säule waren sehr nahe gleich; wurde der eine derselben mit dem Balken der kleinen Drehwage verbunden, während die feststehenden Kugeln derselben abwechselnd mit den beiden Polen in Verbindung standen, so erhielt ich vor der obigen Messung mit der grossen Drehwage eine Aenderung in der Stellung des Balkens der kleinen Drehwage um 226,2 Skalentheile und nach jener Messung um 226,3. Der andere Pol gab vor jener Messung 225,0, und nach derselben 224,8. Da nun bei der kleinen Drehwage nachher das Mittel aus beiden Polen angewendet werden soll, so muss, wenn wir hier der Einfachheit wegen blos die oben mitgetheilten, wenn ich so sagen soll einseitigen Versuche, bei denen nur der stärkere Pol mit dem Wagebalken verbunden war, benutzen wollen, um den Ausschlag bei gleicher mittlerer Intensität der beiden Pole zu berechnen, der Ausschlag 23,2 noch im Verhältnisse von 226,2 : 225,6 (dem Mittel aus den vier Beobachtungen der kleinen Drehwage) vermindert werden. Im vorliegenden Falle würde die Correction unbedeutend sein, und innerhalb der Gränze der Beobachtungsfehler liegen; anstatt 23,2 erhielte man 23,17. Es wäre also 23,17 Skalentheile Ablenkung an der grossen Drehwage entsprechend 225,6 Skalentheilen an der kleinen.

### 5. *Reduction auf ein absolutes Maass.*

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass man das Drehungsmoment, welches durch die Anziehungen und Abstossungen der auf den Kugeln und Stäben angehäuften Elektricität entsteht, schon angenähert findet, wenn man nur die auf den Kugeln und Stäben nach dem Gesetze, als wenn jede Kugel an ihrem Stabe befestigt allein in einem grossen Raume aufgestellt wäre, verbreitete Elektricität in Betracht zieht. Auf den Kugeln ist dann die Dicke $y$ der elektrischen Schicht nach S. 524

$$y = 1,1574 - 0,1804 \frac{1}{t} + 0,0760 \log t \, (t + 1)$$

und auf der Röhre wird sie nach S. 526 u. 530 ausgedrückt durch

$$\frac{0,845x}{x + 0,1780\rho} = \frac{0,845x}{x + 0,5785} = 0,845 \left\{ 1 - \frac{0,5785}{x + 0,5785} \right\},$$

wenn $x$ die Entfernung eines auf der Axe der Röhre senkrechten Quer-

schnittes von dem Ende der Röhre, und $\rho$ den Halbmesser der letzteren bedeutet.

Da alle vier feststehenden Kugeln mit ihren Stäben zu dem Balken und seinen Kugeln genau dieselben Beziehungen haben, so bedarf es nur der Berechnung der Anziehung und Abstossung einer dieser Kugeln und ihres Stabes auf den Balken mit seinen Kugeln; der vierfache Werth gibt dann die durch alle vier Kugeln erzeugte Wirkung. Die Berechnung einer solchen Anziehung oder Abstossung wird am einfachsten geschehen, wenn man die Einwirkungen der Kugeln und Röhren auf einander gesondert betrachtet.

1) Um nun zunächst die Abstossung zwischen einer feststehenden Kugel und der mit gleichnamiger Elektricität geladenen gegenüber befindlichen Kugel des Balkens zu erhalten, wird es bei der grossen Entfernung der Mittelpunkte beider Kugeln völlig ausreichend sein, wenn man die auf jeder Kugel vorhandene Elektricität in dem Schwerpunkte dieser elektrischen Massen vereinigt nimmt. Auf der Kugel von 117,91$^{mm}$ Durchmesser lag, während sie an der Röhre von 38,12$^{mm}$ Durchmesser befestigt war, nach S. 526 der Schwerpunkt der auf ihr vorhandenen Elektricität 7,15$^{mm}$ auf der verlängerten Axe der Röhre vom Mittelpunkte der Kugel nach der negativen, der Röhre abgewandten Seite hin; da der Durchmesser der Kugeln in der Drehwage (20,12$^{mm}$) zu dem Durchmesser des Balkens und der Stäbe in demselben Verhältnisse steht, wie der Durchmesser der grossen Kugel zu dem ihrer Röhre, so werden die Schwerpunkte der auf den Kugeln der Drehwage vertheilten elektrischen Menge eine ähnliche Lage haben, und also um 1,06$^{mm}$ von den Mittelpunkten derselben abstehen. Die auf der grossen Kugel vorhandene Elektricitätsmenge beträgt, wenn ihre Dicke in dem Punkte $\mu = -1$ gleich 1 ist, (nach S. 526) 2878; setzt man die Dicke der elektrischen Schicht auf demselben Punkte der Kugeln der Drehwage ebenfalls gleich 1, so werden sich die Mengen der auf beiden Kugeln vorhandenen Elektricitäten wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten. Die über jede Kugel der Drehwage ausgebreitete Elektricität beträgt dann 83,81, und kann in einem Punkte vereinigt angenommen werden, der um 1,06$^{mm}$ vom Mittelpunkte der Kugel entfernt liegt.

Die Entfernung des Schwerpunktes einer Kugel des Balkens von dem Schwerpunkte einer zur Seite stehenden Kugel ist 149,38$^{mm}$. Die Abstossung oder Anziehung der in den Schwerpunkten vereinigt gedachten

Mengen beträgt also

$$0{,}03479$$

und das daraus hervorgehende Drehungsmoment (erhalten durch Multiplication mit dem Hebelarme 802,44$^{mm}$)

$$27{,}91.$$

Die Abweichung der Verbindungslinie beider Schwerpunkte von der auf der Röhre des Balkens senkrechten Richtung ist so gering, dass sie ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden darf.

2) Es werde der Mittelpunkt der einen Kugel des Balkens zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystemes genommen, dessen erste Axe $x$ mit der Axe der Röhre des Balkens, und dessen zweite Axe $y$ mit der verlängerten Axe eines seitlichen Stabes zusammenfällt; es werde ferner die auf jedem senkrecht zur Axe der Röhre oder des Stabes geführten Querschnitte vorhandene Elektricitätsmenge in dem zugehörigen Axenpunkte vereinigt gedacht. Die Abstossung oder Anziehung, welche die auf einem seitlichen Stabe vorhandene Elektricität auf die im Schwerpunkte der Kugel des Balkens vereinigt gedachte Menge $E = 83{,}81$ ausübt, ist gegeben durch das Integral

$$\frac{E\varrho a}{2}\int \frac{y-\eta}{(\alpha+y-\eta)\,y^2}\,dy,$$

wo $\varrho$ den Halbmesser der Röhre 3,25$^{mm}$, $a$ die constante Dicke der elektrischen Schicht auf der Röhre 0,845, $\alpha$ die Zahl 0,5785, $\eta$ den Abstand des Anfangspunktes des seitlichen Stabes von dem Anfangspunkte der Coordinaten $= 460{,}33$ bedeutet, und das Integral genommen wird von $y = \eta = 460{,}33$ bis $y = \eta' = 1445$ für die zwei Stäbe auf der einen, und bis $\eta' = 1560$ für die zwei Stäbe auf der andern Seite. Zwischen den Gränzen $\eta$ und $\eta'$ wird das vorstehende Integral

$$\frac{a\varrho E}{2\,(\eta-\alpha)}\left\{1-\frac{\eta}{\eta'}+\frac{\alpha}{m\,(\eta-\alpha)}\log\left(\frac{\eta'}{\eta}\cdot\frac{\alpha}{\eta'-\eta+\alpha}\right)\right\}.$$

Die Abstossung oder Anziehung eines Stabes, der bis $\eta' = 1445$ reicht, ist 0,1687, die eines der beiden andern bis $\eta' = 1560$ reichenden 0,1746. Der Werth von $1-\frac{\eta}{\eta'}$ beträgt im ersten Falle 0,6815, im zweiten 0,7055; der Werth von $\frac{\alpha}{m\,(\eta-\alpha)}\log\left(\frac{\eta'}{\eta}\cdot\frac{\alpha}{\eta'-\eta+\alpha}\right)$ dagegen nur $-0{,}0080$. Das letzte von $\alpha$ als Factor abhängige Glied hat also nur einen geringen Einfluss. Das Gesetz der Elektricitätsvertheilung auf dem Stabe war für vorstehende Berechnung gegeben durch

$$\frac{0,845\,(y-\eta)}{(0,5785+y-\eta)}.$$

Will man die Vertheilung der Elektricität auf dem Stabe gleichförmig annehmen, und durch diese gleichförmig darauf verbreitete Elektricität dieselbe Abstossung oder Anziehung der Kugel erhalten, so braucht man nur $a$ so zu bestimmen, dass der Werth von

$$\frac{a\varrho E}{2(\eta-a)}\left(1-\frac{\eta}{\eta}\right)$$

für die einen Stäbe $=0,1627$ und für die beiden andern $=0,1746$ wird. Man erhält dann für $a$ den Werth

$$a=0,8354.$$

Aus den vorhin angegebenen Werthen der Abstossungen oder Anziehungen 0,1687 und 0,1746 erhält man durch Multiplication mit 802,44 die respectiven Drehungsmomente

135,4 und 140,1,

also im Mittel 137,7.

3) Es bezeichne $\varkappa$ den Abstand des Schwerpunktes der auf der feststehenden Kugel verbreiteten Elektricität von dem Anfangspunkte der Coordinaten, also $\varkappa=449,38^{mm}$; ferner sei $\xi$ der Abstand des vordern Endes der Röhre des Balkens, und $L$ der Abstand seiner Mitte von dem Anfangspunkte der Coordinaten, so ist das Drehungsmoment, welches die auf der feststehenden Kugel vorhandene Elektricität auf den elektrischen Balken ausübt,

$$\frac{E\alpha\varrho\varkappa}{2}\int\frac{(x-\xi)\,(L-x)\,dx}{(\alpha+x-\xi)\,(x^2+\varkappa^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wo das Integral zu nehmen ist von $x=\xi=9.56^{mm}$ bis $x=L=801,38$. Das allgemeine Integral wird

$$\frac{E\alpha\varrho\varkappa}{2}\left[\frac{\varkappa^2+(L+\alpha)\,x}{\varkappa^2\sqrt{x^2+\varkappa^2}}-\frac{\alpha\,(L+\alpha-\xi)}{\varkappa^2+(\xi-\alpha)^2}\left\{\frac{\varkappa^2-(\xi-\alpha)\,x}{\varkappa^2\sqrt{x^2+\varkappa^2}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2+(\xi-\alpha)^2}}\log\text{nat.}\left(\frac{\sqrt{\varkappa^2+(\xi-\alpha)^2}+\sqrt{x^2+\varkappa^2}}{x-\xi+\alpha}+\frac{\xi-\alpha}{\sqrt{\varkappa^2+(\xi-\alpha)^2}}\right)\right\}\right]+\text{Const.}$$

Zwischen den bezeichneten Gränzen wird dasselbe

115,6.

Der Werth des ersten Gliedes in der eckigen Klammer ist $=0,002247$, wogegen der Werth des zweiten $\alpha$ als Factor enthaltenden Gliedes nur 0,00001259 beträgt.

Wollte man die Vertheilung auf der Röhre des Wagebalkens gleichförmig annehmen, d. h. $\alpha=0$ setzen, so würde man dieselbe Abstossung oder Anziehung erhalten, wenn man

$$a = 0{,}8402$$

setzte.

4) Zuletzt muss noch die Abstossung oder Anziehung eines Stabes auf die Röhre des Balkens berechnet werden. Man erhält dieselbe durch das Doppelintegral

$$\frac{a^2\varrho^2}{4}\iint \frac{(x-\xi)}{(x-\xi+\alpha)}\cdot\frac{(y-\eta)}{(y-\eta+\alpha)}\cdot\frac{y(L-x)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy$$

genommen zwischen den Gränzen von $x=\xi=9{,}56$ bis $x=L=801{,}38$, und von $y=\eta=460{,}3$ bis $y=\eta'=1445$ für zwei Stäbe, und bis $\eta'=1560$ für die beiden andern Stäbe. Verwandelt man den vorstehenden Ausdruck in den folgenden

$$\frac{a^2\varrho^2}{4}\iint\left(1-\frac{\alpha}{x-\xi+\alpha}-\frac{\alpha}{y-\eta+\alpha}+\frac{\alpha^2}{(x-\xi+\alpha)\,(y-\eta+\alpha)}\right)\frac{y(L-x)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy,$$

so lassen sich die drei ersten Glieder ohne Schwierigkeit integriren. Im vierten Gliede lässt sich die eine Integration ebenfalls leicht ausführen, während die zweite mit Schwierigkeiten verbunden ist. Aus der Beschaffenheit der Aufgabe ersieht man zwar, dass der Werth dieses vierten Gliedes im Vergleich mit den drei andern, und namentlich mit dem ersten, nicht beträchtlich sein kann, indess gestatten es die gegebenen Verhältnisse nicht, denselben in Gränzen einzuschliessen oder in eine stark convergirende Reihe zu entwickeln. Da bei der Berechnung sowohl der Einwirkung einer feststehenden Kugel auf die Röhre des Balkens, als auch der einen Kugel des Balkens auf einen seitlichen Stab, sich deutlich herausgestellt hat, dass die von $\alpha$ abhängigen Glieder nur unbedeutend sind, so wird es im vorliegenden Falle genügen, die Röhren des Balkens und die feststehenden Stäbe als mit einer elektrischen Schicht von überall gleicher Dicke belegt zu betrachten, und hiernach ihre gegenseitige Abstossung oder Anziehung zu bestimmen. Um jedoch die Vernachlässigung von $\alpha$ möglichst auszugleichen, darf dann die Dicke dieser Schicht nicht 0,845 gesetzt werden, sondern muss so angenommen werden, dass die Wirkung der Stäbe und Röhren auf die einander nächsten Punkte fast vollkommen genau richtig gesetzt wird, d. h. auf der Röhre des Balkens ist nach oben diese Dicke $a=0{,}8402$, auf den Stäben nach S. 568 $a'=0{,}8354$ anzunehmen. Mit dieser Annahme wird dann das aus der Einwirkung der Röhre des Balkens und eines Stabes resultirende Drehungsmoment

$$\frac{aa'\varrho^2}{4}\iint \frac{y(L-x)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy.$$

Zwischen den angeführten Gränzen genommen wird das Integral

$$\frac{aa'\varrho^2}{4}\Big[L \log \text{nat.} \frac{(\xi+\sqrt{\eta'^2+\xi^2})\,(L+\sqrt{\eta^2+L^2})}{(L+\sqrt{\eta'^2+L^2})\,(\xi+\sqrt{\eta^2+\xi^2})} + \sqrt{\eta'^2+L^2} - \sqrt{\eta'^2+\xi^2} - \sqrt{\eta^2+L^2} + \sqrt{\eta^2+\xi^2}\Big],$$

dessen Werth zwischen den Gränzen von $x=\xi=9{,}56$ bis $L=801{,}38$, und von $y=\eta=460{,}33$ bis $\eta'=1445$ beträgt

680,6,

während er für die andern beiden Stäbe zwischen denselben Gränzen von $\xi$ und $L$, aber von $\eta=460{,}33$ bis $\eta'=1560$ auf

707,5

steigt. Im Mittel erzeugt also ein Stab das Drehungsmoment

694,1.

Nach dem Vorhergehenden würde also das Drehungsmoment eines seitlichen Stabes mit seiner Kugel auf die ihm zugewandte Hälfte des Wagebalkens der Drehwage im Mittel

975,3

betragen.

5) Indess ist bei den in der Drehwage in Anwendung gebrachten Dimensionen auch die Wirkung eines seitlichen Stabes mit seiner Kugel auf die andere Hälfte des Wagebalkens nicht unbedeutend; sie muss also noch besonders berechnet und das aus ihr hervorgehende Drehungsmoment von dem soeben angeführten abgezogen werden. Das aus der Abstossung einer feststehenden Kugel auf die Kugel am entgegengesetzten Ende des Balkens hervorgehende Drehungsmoment ist sehr unbedeutend, und beträgt nur 0,57. Das Drehungsmoment der feststehenden Kugel auf den entgegengesetzten Arm des Balkens (ohne Kugel) wird 6,5; das Drehungsmoment eines seitlichen Stabes auf die Kugel am entgegengesetzten Ende des Balkens beläuft sich auf 13,3; und das Drehungsmoment eines solchen Stabes auf den entgegengesetzten Arm des Balkens (ohne Kugel) steigt im Mittel auf 130,45. Wird die Summe dieser vier Drehungsmomente von dem vorhergehenden Drehungsmomente abgezogen, so bleibt das Drehungsmoment 824,4 übrig. Von allen vier Stäben mit ihren Kugeln erfolgt also das Drehungsmoment

3297,6.

6) Die vorstehende Zahl 3297,6 würde das Drehungsmoment angeben, wenn Kugeln, Stäbe und Balken der Drehwage in angemessener Weise mit den Polen einer Säule verbunden wären, welche den Kugeln in ihren vordern Punkten eine elektrische Schicht von der Dicke 1 ertheilten, und wenn die Kugeln ausserordentlich weit von einander entfernt stünden. Falls aber die Entfernung einer feststehenden Kugel von der gegenüber befindlichen, wie bei der obigen Drehwage nur $900{,}88^{mm}$ beträgt, so ist dieselbe, wie schon S. 562 bemerkt, noch nicht gross genug, um den vertheilenden Einfluss einer Kugel auf die andere unmerklich zu machen. Specielle Versuche haben gezeigt, dass unter den vorliegenden Umständen eine feststehende Kugel, deren Elektricität im vordersten Punkte die Dicke 1 hat, auf der gegenüber befindlichen eine elektrische Vertheilung hervorruft, deren Dicke im vordersten Punkte 0,021 beträgt. Was die weitere Vertheilung über die Oberfläche der zweiten Kugel betrifft, so wird es, da es sich nur um eine geringe Correction handelt, hinreichen, dieselbe in ähnlicher Weise anzunehmen, wie solche S. 518 für die grosse Kugel gefunden wurde. Die daselbst angegebene Vertheilung wird, die Dicke der elektrischen Schicht auf dem vordersten Punkte dieser Kugel = 1 gesetzt, angenähert ausgedrückt durch

$$y = 0{,}57 + 0{,}054\,\frac{1}{t} + 1{,}25 \log t\,(t+1).$$

Berechnet man nun mittelst des S. 525 aufgestellten Ausdruckes die auf einer Kugel von $20{,}12^{mm}$ Durchmesser verbreitete Elektricitätsmenge, so wird dieselbe 68,4; sie verwandelt sich aber in 1,4, wenn die Dicke im vordersten Punkte der Kugel nicht 1, sondern nur 0,021 beträgt. Auf dem Stabe, welcher die Kugel trägt, wird es den erwähnten Messungen zufolge genügen, eine constante Dicke 0,006 anzunehmen.

Wenn nun diese Elektricitäten auf den elektrischen Balken wirken, so entsteht aus der Wirkung einer feststehenden Kugel auf die Kugel des Balkens ein Drehungsmoment 0,5; aus der Wirkung eines Stabes auf die Kugel des Balkens ein Drehungsmoment 1,0; aus der Wirkung einer feststehenden Kugel auf die Röhre des Balkens ein Drehungsmoment 2,0; und aus der Wirkung eines Stabes auf die Röhre ein Drehungsmoment 7,1. Alle vier Wirkungen zusammen betragen 10,6; folglich üben alle vier Kugeln mit ihren Stäben das Drehungsmoment 42,4 aus, wodurch das früher gefundene 3297,6 sich auf 3340 erhöht.

Nicht unerwähnt will ich hier lassen, dass bei der vorstehenden

Berechnung des Drehungsmomentes noch ein Einfluss vernachlässigt ist, der indess bei der getroffenen Einrichtung in keinem Falle sehr merklich sein kann. Es ist diess die auf den hintern Enden der Stäbe durch die Nähe der Wand hervorgerufene Vermehrung der Elektricität. Die ebengenannte Vermehrung entsteht aber nur dadurch, dass die Wand durch den Stab selbst in den entgegengesetzten elektrischen Zustand versetzt wird; es muss also diese auf der Fläche der Wand erzeugte entgegengesetzte Elektricität stärker sein als die durch sie auf dem Stabe erzeugte Vermehrung der ursprünglich auf demselben vorhandenen. Da nun die Elektricität der Wand aus etwas grösserer Entfernung wirkt als die durch sie auf dem Stabe hervorgerufene, so ist bei dem grossen Abstande der Wand von der Drehwage wohl die Annahme gestattet, dass beide in entgegengesetzter Weise auf die Drehwage wirkenden Elektricitäten sich nahezu aufheben werden. Will man diese Voraussetzung nicht gelten lassen, so muss man eine ähnliche Einrichtung treffen, wie oben S. 543 bei der kleinen Drehwage beschrieben worden, wo die Leitungsdrähte hinter Metallblechen bis zu den Stäben laufen, welche durch kleine in denselben befindliche Oeffnungen hindurchgehen. Experimentelle Untersuchungen, wie die S. 514 u. 515 angeführten, werden die Mittel zur Auswerthung der nöthigen Correctionen liefern.

Mittelst der vorstehenden Angaben lässt sich nun die Dicke der elektrischen Schicht auf den Kugeln, Röhren und Stäben der Drehwage, wenn sie in der oben S. 564 angegebenen Weise mit der Säule aus 782 Elementen verbunden sind, berechnen. Der doppelte Ausschlag bei der Elektrisirung durch diese Säule beträgt nach S. 565 23,17 Millimeter, also der einfache 12,58$^{mm}$. Da nun der Spiegel um 5322$^{mm}$ von der Skale absteht, so beträgt der einfache Ausschlag 0,0624$^{0}$ oder 0,001089 des dem Radius gleichen Bogens. Nach S. 562 ist das Drehungsmoment 66049000, das Milligramm und das Millimeter als Einheit genommen; einer Drehung von 0,001089 entspricht also ein Drehungsmoment 71931. Nehmen wir eine solche Dicke der elektrischen Schicht auf den Kugeln, Stäben und Röhren der Drehwage an, dass sie im vordersten Punkte der Kugeln nach dem S. 442 festgesetzten Maasse gleich 1 ist, so geht daraus, wie wir kurz vorher sahen, ein Drehungsmoment 3340 hervor; nun wächst aber dies Drehungsmoment mit dem Quadrate der Dicke der elektrischen Schicht an diesem Punkte. Soll daher das aus den elektrischen Abstossungen und Anziehungen resultirende

Drehungsmoment dem aus der Torsion des Drahtes hervorgehenden das Gleichgewicht halten, so muss, wenn man mit $x$ die noch unbekannte Dicke der elektrischen Schicht in den vordersten Punkten der Kugeln bezeichnet,

$$71931 = x^2 \,.\, 3340$$

sein; woraus folgt

$$x = 4{,}641.$$

Diess ist also in vorliegendem Falle die Dicke der elektrischen Schicht an den vordersten Punkten der Kugeln gewesen. Diese Dicke der elektrischen Schicht ist hervorgerufen durch Verbindung mit dem einen Pole einer Säule von $\frac{782}{2} = 391$ Elementen, deren anderer Pol zur Erde abgeleitet ist. Setzen wir alle diese Elemente als gleichstark voraus, so beträgt die Dicke der durch Verbindung mit einem Elemente, dessen anderer Pol abgeleitet ist, den Kugeln an ihrem vordern Punkte mitgetheilten Elektricität 0,01187, also, wie es sein muss, bedeutend weniger als oben S. 550 bei der kleinen Drehwage, wo die ganze Wirkung als von den Kugeln ausgehend angenommen wurde, und die Berechnung für ein Element im Mittel die Dicke 0,05621 ergab.

Der eigentliche Zweck, zu welchem die Drehwage construirt wurde, war aber nicht die Ausmittelung der Dicke der elektrischen Schicht auf ihren Kugeln, Stäben und Röhren, sondern die Berechnung dieser Dicke auf einer Kugel von 117,91$^{mm}$ Durchmesser, welche mit derselben Säule, die zur Ablenkung des Balkens der Drehwage diente, in angemessener Weise verbunden war. Die Kugel, auf welcher die Dicke der elektrischen Schicht bestimmt werden sollte, hing an einem 0,125$^{mm}$ im Durchmesser haltenden Messingdrahte mehr als 1400$^{mm}$ von dem Fussboden und den Wänden des Zimmers entfernt. Es muss nun zunächst das Verhältniss gefunden werden, in welchem die Dicke der elektrischen Schicht an ihrem untersten Punkte zu der auf dem vordersten Punkte einer Kugel der Drehwage steht. Zur experimentellen Bestimmung dieses Verhältnisses wurde der feine Messingdraht, nachdem er über eine isolirte Rolle an der Decke des Zimmers gezogen und an der einen Seitenwand wieder herabgeleitet war, mit dem innern Belege einer schwach geladenen elektrischen Batterie verbunden; mit demselben Belege hing aber auch der in einem andern Zimmer befindliche Balken der Drehwage, an seinem vordersten Ende die Kugel von 20,12$^{mm}$ Durchmesser tragend, zusammen. Auch diese letzte Kugel war möglichst von allen Leitern entfernt.

Mittelst der schon früher S. 487 gebrauchten Prüfungskugel von

3,47$^{mm}$ Durchmesser wurde das Verhältniss der Dicke der elektrischen Schicht an dem vordersten Punkte der kleinen, und dem untersten Punkte der grossen Kugel auf die im 7ten Abschnitte erläuterte Weise bestimmt. Die unmittelbare Messung gab diess Verhältniss wie 1:0,249, d. h. wenn die Dicke an dem vordersten Punkte der kleinen Kugel = 1 gesetzt wird, so beträgt dieselbe am untersten Punkte der grossen Kugel nur 0,249.

Nach speciell für diesen Fall ermittelter Correction wegen des Einflusses des Beobachters geht obiges Verhältniss in 1:0,247 über.

Zweitens bedarf aber dieses Verhältniss noch einer Correction, weil das Prüfungskügelchen Kugeln von verschiedenen Krümmungen berührte; wie diese Correction auszuführen, ist im siebenten Abschnitte (S. 506) gezeigt worden. Im vorliegenden Falle muss anstatt der Zahl 0.247 gesetzt werden

$$\frac{1,388}{1,585}\,0,247 = 0,216.$$

Als vorhin die grosse und kleine Drehwage mit den Polen derselben Säule verbunden waren, erhielten wir einen Ausschlag an der grossen Drehwage von 11,58 Skalentheilen, während der entsprechende Ausschlag der kleinen 112,8 Skalentheile betrug; bei der zu dieser Zeit vorhandenen Stärke der Säulenpole stieg die Dicke der elektrischen Schicht auf den vordersten Punkten der Kugeln in der grossen Drehwage nach S. 572 auf 4,641. Als später die grosse Kugel von 117,91$^{mm}$ Durchmesser an dem Drahte von 0,125$^{mm}$ Durchmesser mit der Säule verbunden wurde, ergab sich in der kleinen Drehwage nur ein Ausschlag von 105,9 Skalentheilen. Weil die Dicken der elektrischen Schicht proportional mit der Quadratwurzel aus den Ablenkungen wachsen, so folgt für diesen letztern Versuch eine Dicke der elektrischen Schicht auf den vordersten Punkten der kleinen von ihren Stäben und Röhren getragenen Kugeln, die gleich 4,497 ist. Da die Dicke der elektrischen Schicht auf dem tiefsten Punkte der am dünnen Drahte hängenden grossen Kugel 0,216 von der eben bezeichneten Dicke beträgt, so wird sie 0,9712. Nun stand aber die grosse Kugel nicht mit dem einen Pole der in der Mitte abgeleiteten Säule von 182 Elementen, sondern mit dem einen Pole dieser Säule in Verbindung, während ihre Mitte isolirt und ihr anderer Pol abgeleitet war. Der Ausschlag der Drehwage gibt das Mittel der elektrischen Spannung beider Hälften der in der Mitte abgeleiteten Säule; man erhält folglich durch Verdoppelung dieses Werthes die

Spannung des einen Poles der ganzen Säule, während der andere zur Erde geleitet ist; die hieraus sich ergebende Dicke der elektrischen Schicht ist also 1,9424.
Beträgt die Dicke der elektrischen Schicht an dem genannten Punkte der grossen Kugel 1, so ist nach S. 537 auf ihrer Oberfläche die Elektricitätsmenge 3289 verbreitet; steigt die Dicke an diesem Punkte auf 1,9424, so muss sie folglich die Elektricitätsmenge 6389 enthalten. Nach S. 538 liegt der Schwerpunkt der auf der grossen Kugel ausgebreiteten Elektricität $0,7^{mm}$ unterhalb des Mittelpunktes. Anstatt der auf der Oberfläche dieser Kugel vertheilten Elektricität dürfen wir also, wo es sich um Wirkungen in grössere Entfernungen handelt, unbedenklich die Elektricitätsmenge 6389 in einem $0,7^{mm}$ unterhalb des Mittelpunktes der Kugel liegenden Punkte concentrirt annehmen.

## XII. Bestimmung der Vertheilungswirkung, welche eine gegebene Elektricitätsmenge aus einer bestimmten Entfernung auf einen Conductor ausübt.

Da die Reduction der atmosphärischen Elektricität auf ein absolutes Maass den Zweck hat, anzugeben, welche Elektricitätsmenge aus einer bestimmten Entfernung wirkend eine gleich grosse elektrische Vertheilung wie die atmosphärische Elektricität auf einem gegebenen Conductor erregt, so wird zunächst die Kenntniss der Vertheilungswirkung einer abgemessenen Elektricitätsmenge auf einen solchen Conductor erforderlich. Zur Erlangung derselben habe ich folgenden Weg eingeschlagen.

Von der Mitte der Decke einer Stube von ungefähr 5 Meter Höhe, welche neben dem Zimmer, in welchem die kleine Drehwage aufgestellt war, lag, wurde die Kugel von $117,91^{mm}$ Durchmesser an einem sehr dünnen Messingdrahte (von $0,125^{mm}$ Durchmesser), der über eine durch Schellack gut isolirte Rolle ging, aufgehangen; die verlängerte Richtung des Drahtes traf den Mittelpunkt der an ihm hängenden Kugel. Der Draht lief von der Rolle in der Nähe der Decke des Zimmers etwas abwärts steigend bis zu einer Seitenwand, von dort über eine isolirte Rolle abwärts und dann vorwärts nach einem Tische, der hinter dem vor dem Elektrometer sitzenden Beobachter stand; von da ging der Draht nach dem Zimmer, wo die Drehwage sich befand, und war daselbst mit dem Drahte, welcher zum Balken der Drehwage führte, verbunden. Mit der

Drehwage stand ferner die kleine Säule aus 782 Elementen in der weiter oben angeführten Weise in Verbindung. Mittelst des Drahtes konnte die Kugel bequem in jeder Höhe aufgehangen werden, indem das Ende derselben auf eine an der Axe eines Rades befestigte gut gefirnisste Glasröhre aufgewunden wurde.

Als Conductoren, auf welchen die auf der Kugel angehäufte Elektricität wirken sollte, benutzte ich Cylinder, welche unmittelbar auf dem Elektrometer befestigt waren. Ich stellte nämlich unterhalb der Kugel auf einem dem bei der Beobachtung der atmosphärischen Elektricität angewandten ähnlichen Dreifusse das oben beschriebene Elektrometer *B* auf, eingeschlossen in seine Blechhülle, und anfangs nur versehen mit einem etwas über 100$^{mm}$ langen Conductor *AA'* Fig. 1. Auf diesen kleinen Conductor konnten fünf andere cylindrische Conductoren von gleichem Querschnitte (4,1$^{mm}$), von denen jeder genau 100$^{mm}$ Länge hatte, aufgeschraubt werden. Um dem obern Ende des Cylinders stets genau dieselbe Form zu geben, war die Einrichtung getroffen, dass das obere abgerundete Ende des anfangs allein vorhandenen Conductors *AA'* abgeschraubt, und nach dem Aufschrauben des ersten Verlängerungsstückes auf letzteres wieder aufgeschraubt werden konnte; dasselbe liess sich nach dem Ansetzen jedes der folgenden Stücke ausführen. Der Conductor oberhalb des kleinen Daches *H* bildete also stets einen Cylinder von 4,1$^{mm}$ Durchmesser, der oben durch dieselbe Halbkugel geschlossen war.

Der Commutator am Elektrometer *B* wurde in einer bestimmten Lage festgestellt. Anstatt nun aber die einfache Vertheilung von Seiten der oberhalb in der Kugel befindlichen Elektricität auf diese Conductoren durch Uebersetzen und Abheben einer Blechhaube, wie bei der Beobachtung der atmosphärischen Elektricität zu messen, zog ich es bei den nachstehenden Versuchen vor, die doppelte Vertheilung von Seiten der in der Kugel und Röhre vorhandenen Elektricität zu messen. Mittelst eines Commutators wurde nämlich abwechselnd der positive oder negative Pol jener Säule aus 782 Elementen, deren anderer Pol mit der Erde in vollkommener Verbindung stand, mit dem zur Kugel führenden Drahte verbunden; die Elektricität auf der Kugel entsprach also jedes Mal der Spannung an dem einen Pole einer Säule aus 782 Elementen, deren anderer Pol zur Erde abgeleitet war. Durch Umlegen des Commutators änderte sich der elektrische Zustand der Kugel und der Röhre um den doppelten Betrag dieser Grösse, und damit auch die vertheilende Wir-

kung auf den Conductor des Elektrometers, dessen unteres Ende das Goldblättchen bildete. Die Ablenkungen dieses Goldblättchens können als Maass für die Stärke der Vertheilung betrachtet werden, weshalb die Stellungen desselben in den beiden verschiedenen Lagen des mit der Säule von 782 Elementen verbundenen Commutators abgelesen wurden. Solche Messungen wurden für jede Verlängerung des Conductors am Elektrometer ausgeführt.

Das angegebene Verfahren wählte ich, weil es 1) kein Umlegen des Commutators am Elektrometer erfordert, wodurch bei der nicht ganz festen Stellung des Instrumentes auf einem mitten in der Stube auf den Dielen befindlichen Dreifusse möglicherweise kleine Aenderungen in der Ruhelage des Goldblättchens eintreten können, 2) weil es einen doppelt so grossen Ausschlag gibt, als wenn, ohne den Commutator des Elektrometers umzulegen, nur eine Blechhaube über den Conductor gedeckt und wieder abgehoben wird, und 3) weil es die Messungen von der in der Luft des Zimmers vorhandenen Elektricität ganz unabhängig macht. Es ist nämlich nicht zu vermeiden, dass eine mit Elektricität von einiger Spannung geladene Kugel die sie umgebende Luft in einem gewissen Grade elektrisch macht. Liesse man nun eine positiv elektrische Kugel längere Zeit oberhalb des Elektrometers, so würde ausser der Kugel auch die elektrische Luft auf den Conductor des Elektrometers wirken. Man wird leicht einsehen, dass, wenn die Umlegungen des Commutators, welcher die Elektricität des einen oder andern Poles nach der Kugel leitet, in sehr kurzen Zeiträumen auf einander folgen, alle etwa vorhandenen fremdartigen Einflüsse bei dem oben beschriebenen Verfahren ausgeschieden werden. Die Hälften der auf solche Weise erhaltenen Ausschläge des Goldblättchens geben die Ablenkungen, wie sie bei dem Aufsetzen und Abheben einer Metellhaube über den Conductor entstehen würden. Uebrigens habe ich mich durch eigends zu diesem Zwecke angestellte Versuche von der strengen Richtigkeit des letzten Ausspruches überzeugt; da dieselbe aber auch von selbst einleuchtet, so ist die Mittheilung von speciellen Versuchen überflüssig. Diess will ich aber noch hinzufügen, dass auch der anfängliche Zustand des Conductors, ob letzterer zuvor unelektrisch ist oder schon eine geringe Menge der einen oder andern Elektricität enthält, im Allgemeinen ohne Einfluss auf die Grösse des Ausschlages ist; er kann nur insofern Aenderungen in dem Ausschlage erzeugen, als eine vorhergehende Ladung Vertheilungen hervor-

ruft oder die Stellung des Goldblättchens gegen die Scheiben verändert, so dass je nach dieser Lage eine besondere Correction der Ausschläge wegen zu grosser Annäherung an die Scheiben erforderlich wird. Ich habe es desshalb vorgezogen, den Conductor stets unelektrisch zu machen, und dann erst die über ihm befindliche Kugel mit den Polen der Säule zu verbinden. Um den Conductor unelektrisch zu machen, wurden einige Zoll weite blecherne, an einem Ende geschlossene Cylinder mit ihrem offenen Ende über die kleinern Conductoren gesetzt, und letztere dann während dieser Bedeckung durch geringes Neigen der Blechcylinder ableitend berührt, wodurch sie, weil sie rings von Leitern eingeschlossen waren, aller etwa vorhandenen freien Elektricität beraubt werden mussten. Bei Conductoren von grösserer Länge als 300$^{mm}$, wo das Aufsetzen und Abheben solcher Blechcylinder sehr unbequem geworden wäre, diente zu gleichem Zwecke ein der Länge nach aus zwei Hälften zusammengesetzter parallelepipedischer Kasten aus mässig starkem Messingblech. Die beiden Hälften desselben waren an den Aussenseiten mit Handgriffen versehen, und die Ränder der einen liessen sich zwischen die der andern einschieben, so dass nach dem Ineinanderfügen der Conductor des Elektrometers ringsum eingeschlossen war.

Um den Einfluss des Abstandes der elektrischen Kugel von dem Conductor, und ebenso der Länge dieses letztern auf die Ausschläge des Elektrometers zu erfahren, wurden bei verschiedenem Abstande der Kugel und bei abgeänderter Länge der Cylinder Messungen ausgeführt.

Der kleine Conductor (*AA'* Fig. 1 u. 2) von 105$^{mm}$ Länge ward ein für alle Mal auf dem Elektrometer befestigt, und von seinem obern abgerundeten Ende aus die Entfernung bis zu dem untersten Punkte der Kugel gemessen; diese Entfernungen finden sich in der ersten verticalen Spalte der nachstehenden Tabelle verzeichnet. Dieser kleine Conductor soll mit 0 bezeichnet werden. Auf ihn wurden dann, ohne die Stellung der Kugel zu ändern, die schon oben erwähnten gleich dicken Cylinder von genau 100$^{mm}$ Länge (sie mögen durch die Zahlen 1 bis 5 bezeichnet werden) aufgeschraubt; die Entfernungen des obern Endes der so verlängerten Conductoren von dem untersten Punkte der Kugel sind also um soviel mal 100$^{mm}$ kleiner als die in der ersten Spalte der nachstehenden Tabelle stehende Zahl als Conductoren von 100$^{mm}$ Länge aufgeschraubt worden sind. Die verticalen Spalten dieser Tabelle von der zweiten bis zur siebenten enthalten die Ausschläge, wie sie nach

dem zuvor beschriebenen Verfahren bei den aus der ersten Spalte bestimmbaren Entfernungen und bei der in der obersten Horizontalreihe verzeichneten Länge des ganzen Conductors beobachtet wurden.

| Entfernungen. | 0. | 0+1. | 0+1+2. | 0+1+2 +3. | 0+1+2 +3+4. | 0+1+2 +3+4+5. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 500mm | 3,50 | 9,10 | | | | |
| 1000 | 1,70 | 4,02 | 6,57 | 9,65 | | |
| 1500 | 1,05 | 2,60 | 4,20 | 5,80 | 7,60 | 9,57 |
| 2000 | 0,75 | 1,95 | 3,15 | 4,40 | 5,55 | 6,82 |

Die angeführten Ausschläge, mit Ausnahme der beiden zu 500mm gehörigen, sind Mittelwerthe aus zwei sehr nahe übereinstimmenden an zwei auf einander folgenden Tagen ausgeführten Versuchsreihen; die grössten Abweichungen erreichten nur bei zwei Messungen 0,1. Die Messungen bei 500mm Entfernungen sind nur an dem ersten Tage ausgeführt worden. Die grössern Ausschläge bedürfen, um mit den kleinern vergleichbar zu sein, noch einer geringen Correction, so dass die vorstehende Tabelle dann in die folgende übergeht:

| Entfernungen. | 0. | 0+1. | 0+1+2. | 0+1+2 +3. | 0+1+2 +3+4. | 0+1+2 +3+4+5. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 500mm | 3,50 | 9,04 | | | | |
| 1000 | 1,70 | 4,02 | 6,55 | 9,59 | | |
| 1500 | 1,05 | 2,60 | 4,20 | 5,80 | 7,58 | 9,51 |
| 2000 | 0,75 | 1,95 | 3,15 | 4,40 | 5,55 | 6,80 |

Zieht man die in der mit 0 überschriebenen Spalte befindlichen Zahlen von den Zahlen in derselben Horizontalreihe ab, d. h. sucht, um wie viel die Spannung im untern Ende des Goldblättchens durch Verlängerung des Conductors um 100, 200, 300mm u. s. w. vermehrt worden ist, so erhält man für die in der obersten horizontalen Reihe angegebenen Verlängerungen die darunter stehenden Zunahmen der elektrischen Ausschläge.

| Entfernungen. | 100. | 200. | 300. | 400. | 500. |
|---|---|---|---|---|---|
| 500mm | 5,54 | | | | |
| 1000 | 2,32 | 4,85 | 7,89 | | |
| 1500 | 1,55 | 3,15 | 4,75 | 6,53 | 8,46 |
| 2000 | 1,20 | 2,40 | 3,65 | 4,80 | 6,07 |

Dividirt man die Zahlen der dritten verticalen Spalte (unter 200) durch 2, die der vierten durch 3 u. s. w., d. h. berechnet man, wie viel im Mittel eine Verlängerung des Conductors um 100$^{mm}$ die elektrische Spannung im Goldblättchen vermehrt, so findet man folgende Werthe:

| Entfernungen. | 100. | 200. | 300. | 400. | 500. |
|---|---|---|---|---|---|
| 500$^{mm}$ | 5,54 | | | | |
| 1000 | 2,32 | 2,42 | 2,63 | | |
| 1500 | 1,55 | 1,57 | 1,58 | 1,63 | 1,69 |
| 2000 | 1,20 | 1,20 | 1,21 | 1,20 | 1,21 |

Bei grössern Entfernungen der Kugel vom Conductor erscheinen also, wie aus dieser Zusammenstellung hervorgeht, die Zunahmen der elektrischen Spannungen für jedes 100$^{mm}$ gleich gross. Bei etwas geringern Entfernungen gilt dies noch angenähert für hinzugefügte 100 oder 200$^{mm}$, während es bei kleinen Entfernungen selbst nicht mehr für das erste Hundert statt hat.

Die in der ersten Tabelle S. 579 aufgeführten Ausschläge sind aber nicht bloss das Resultat der Vertheilungswirkungen von Seiten der Kugel und des von ihr vertical zu der isolirten Rolle aufsteigenden Drahtes, sondern hängen auch noch von den Wirkungen des von der isolirten Rolle unter der Decke der Stube (wie zuvor S. 575 beschrieben) hinlaufenden, und dann nach seinem Herabsteigen in das Nebenzimmer eintretenden Drahtes ab. Obwohl ich nach Möglichkeit mich bestrebt habe, diesen Draht von dem Conductor entfernt zu halten, so ist dessenungeachtet sein Einfluss doch so beträchtlich geblieben, dass ich ihn durch specielle Messungen bestimmen musste. Ich entfernte die Kugel und den von ihr bis zur Rolle vertical aufsteigenden Theil des Drahtes, und bestimmte dann die vertheilende Wirkung der übrig gebliebenen Drahtleitung auf die Conductoren des an seinem Platze unverrückt erhaltenen Elektrometers. Man hat dabei besonders darauf zu achten, dass an den in der Stube befindlichen Apparaten und Mobilien, namentlich wenn solche in der Nähe der Conductoren stehen, keine Ortsveränderungen vorgenommen werden, weil sonst die zweiten Messungen mit den ersten nicht vergleichbar sein würden. Handelt es sich übrigens um die Gewinnung absoluter Maasse, so müssen alle höhern Gegenstände aus der Nähe der Conductoren entfernt werden.

Durch diese Drahtleitung allein wurden folgende Ausschläge erhalten:

| 0. | 0+1. | 0+1+2. | 0+1+2+3. | 0+1+2+3+4. | 0+1+2+3+4+5. |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,60 | 1,45 | 2,20 | 3,00 | 3,70 | 4,55 |

Diese Resultate wurden an dem ersten Tage, wo ich die S. 579 mitgetheilten Versuchsreihen angestellt hatte, nach Beendigung derselben erhalten. Ziehen wir den ersten Werth von den übrigen ab, so kommt

| 100. | 200. | 300. | 400. | 500. |
|---|---|---|---|---|
| 0,85 | 1,60 | 2,40 | 3,10 | 3,95 |

und wenn die Zahlen der zweiten Spalte mit 2, die der dritten mit 3 u. s. w. dividirt werden

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0,85 | 0,80 | 0,80 | 0,77 | 0,79 |

Die Zuwachse für gleiche Verlängerungen sind also auch hier nahe gleich.

Um nun zu erfahren, nach welchem Gesetze die von der Kugel und dem vertical von ihr aufsteigenden Drahte auf die Conductoren des Elektrometers ausgeübte Einwirkung sich mit der Entfernung der Kugel und der dadurch eingetretenen Verkürzung des Drahtes ändert, müssen die durch die Drahtleitung allein erhaltenen Ausschläge von den früheren Ausschlägen, wo auch die Kugel und der verticale Draht vorhanden war, abgezogen werden. Die folgende Tabelle enthält die bloss durch die Kugel und den verticalen Draht erzeugten Ausschläge:

| Entfernungen. | 0. | 0+1. | 0+1+2. | 0+1+2+3. | 0+1+2+3+4. | 0+1+2+3+4+5. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 500mm | 2,9 | 7,59 | | | | |
| 1000 | 1,1 | 2,57 | 4,35 | 6,59 | | |
| 1500 | 0,45 | 1,15 | 2,00 | 2,80 | 3,88 | 4,96 |
| 2000 | 0,15*) | 0,50 | 0,95 | 1,40 | 1,85 | 2,25 |

Berechnet man die Vergrösserungen der Ausschläge durch Zusatz von 100, 200 u. s. w. Millimeter langen Conductoren, so kommt

*) Ist, wie die übrigen Versuche zeigen, etwas zu klein.

| Entfernungen. | 100. | 200. | 300. | 400. | 500. |
|---|---|---|---|---|---|
| 500mm | 4,69 | | | | |
| 1000 | 1,47 | 3,25 | 5,49 | | |
| 1500 | 0,70 | 1,55 | 2,35 | 3,43 | 4,51 |
| 2000 | 0,35 | 0,80 | 1,25 | 1,70 | 2,10 |

Daraus ergeben sich die Zuwachse für 100mm im Mittel

| Entfernungen. | 100. | 200. | 300. | 400. | 500. |
|---|---|---|---|---|---|
| 500mm | 4,69 | | | | |
| 1000 | 1,47 | 1,62 | 1,83 | | |
| 1500 | 0,70 | 0,77 | 0,78 | 0,88 | 0,90 |
| 2000 | 0,35 | 0,40 | 0,41 | 0,42 | 0,42 |

Da die Ausschläge bei Verlängerung des Conductors unter der Einwirkung des Zuleitungsdrahtes allein für jede 100mm um gleiche Grösse zunehmen, so müssen die Zahlen jeder horizontalen Reihe der letzten Tabelle grössere Unterschiede zeigen als in der frühern Tabelle auf S. 580, weil jetzt die Abweichungen der Ausschläge von der Proportionalität mit den zugesetzten Längen der Conductoren in unveränderter Grösse auf kleinere Zahlen fallen; wie diess auch bei der grössern Nähe der Kugel nicht anders zu erwarten war.

Nähme man die in der ersten Spalte beschriebenen Entfernungen, so würden, mit Ausschluss des zu 500mm gehörigen Werthes, die Zahlen der drei folgenden horizontalen Reihen der letzten Tabelle auf ein nahe umgekehrt quadratisches Verhältniss zwischen diesen Entfernungen und den mittleren Zuwachsen hinweisen. Diese Entfernungen sind aber nur die Abstände der Spitze des Conductors vom untersten Punkte der Kugel, und können daher zu einer genauern Berechnung der in der vorhergehenden Tabelle verzeichneten Beobachtungsresultate nicht dienen.

Da die Vertheilung der Elektricität auf der Kugel und dem Drahte bekannt ist, so unterliegt der Ort und die Menge der vertheilend wirkenden Elektricität keinen weiteren Bedenken. Anders ist diess jedoch mit dem Conductor, auf welchen die Vertheilung ausgeübt wird. Es entsteht hier vor Allem die Frage, welche Länge dem mit 0 bezeichneten Conductor zuzuschreiben ist. Wenn der isolirte Conductor überall cylindrisch und ringsum frei wäre, so liesse sich die Vertheilungswir-

kung, welche eine entfernte Elektricitätsmenge auf ihn ausübte, in angenäherter Weise berechnen, indem man den Conductor als ein sehr verlängertes Umdrehungsellipsoid betrachtete. Der Conductor des Elektrometers hat aber weder überall eine cylindrische Form, noch ist er von Leitern hinreichend entfernt. Die Länge, welche diesem Conductor beizulegen ist, lässt sich also nicht durch Rechnung allein finden; zu einer angenäherten experimentellen Bestimmung aber gewähren die obigen Beobachtungsreihen die nöthigen Data.

Als die Kugel in einer Entfernung von 1000$^{mm}$ über dem Ende des Conductors hing, nahmen die Ausschläge des Goldblättchens, wenn der ursprüngliche Conductor um 100$^{mm}$ verlängert wurde, im Verhältniss von 1 : 2,37 zu. Bei der Entfernung von 1500$^{mm}$ findet sich diess Verhältniss aus den obigen Versuchen wie 1 : 2,48. Das Mittel aus beiden ist 1 : 2,43, ein Werth, der mit dem Mittel vieler anderer Versuchsreihen, die ich hier nicht mittheile, sehr nahe übereinstimmt. Bei der Kleinheit der anfänglichen Ausschläge ist eine völlige Uebereinstimmung der erhaltenen Resultate nicht zu erwarten. Mit diesem Verhältnisse lässt sich angeben, welcher Länge der ursprüngliche Conductor gleich zu achten ist unter der Voraussetzung, dass die Kugel in gleicher Weise auf jeden seiner Punkte vertheilend wirkt, wie auf jeden Punkt der angesetzten Verlängerung von 100$^{mm}$. Man erhält diese Länge zu 70$^{mm}$.

Bei cylindrischen Conductoren, die im Verhältniss zur Entfernung der vertheilenden Elektricität klein sind, wird die Vertheilungswirkung auf alle Punkte sehr nahe gleich der auf die Mitte des Conductors ausgeübten sein; man wird daher annähernd die Entfernung des Cylinders von der vertheilenden Elektricität durch die Entfernung seiner Mitte von derselben ausdrücken können. Zu der oben angegebenen Entfernung des obern Endes des Conductors 0 wäre also 35$^{mm}$ zu addiren, um so zu sagen die mittlere Entfernung desselben zu erhalten. Und auf gleiche Weise müsste für jeden verlängerten Conductor sein Anfang 70$^{mm}$ unterhalb der Spitze des Conductors 0 gesetzt werden.

Nach Ausmittelung der betreffenden Entfernungen erübrigt nur noch die Festsetzung des Gesetzes, nach welchem sich die vertheilende Einwirkung einer elektrischen Masse mit der Entfernung ändert. Das von Coulomb aufgestellte Gesetz, dass die Dicke der elektrischen Schicht an dem abgerundeten Ende eines Cylinders, womit er gegen eine von Elektricität bedeckte Kugel hingewendet ist, im umgekehrten

Verhältnisse mit der $\frac{1}{3}$ Potenz der Entfernung steht, wenn das andere Ende des Cylinders leitend mit der Erde verbunden ist, kann, wenn es auch allgemein richtig wäre, und möglicherweise nicht etwa bloss unter gewissen Bedingungen Geltung hätte, in dem vorliegenden Falle nicht ohne Weiteres Anwendung finden, weil der Conductor des Elektrometers isolirt ist und die Messungen an dem von der vertheilenden Elektricität abgewandten Ende desselben, das noch dazu durch den Ausschlag des an ihm hängenden Goldblättchens seine Form etwas ändert, geschehen.

Ich habe mich bemüht, Versuche in der Weise anzustellen, dass sich das Gesetz jener Abnahme, wenigstens in angenäherter Weise sogleich herausstellen musste.

Eine messingene Kugel von nahe 117$^{mm}$ Durchmesser wurde der vollständigen Isolirung wegen mittelst eines Schellackstäbchens und einer Siegellackstange an einer über die obenerwähnte an der Decke des Zimmers befindliche Rolle gehenden seidenen Schnur aufgehangen, und konnte durch letztere in verschiedene Höhen über dem Conductor eines darunter stehenden Elektrometers gebracht werden. Dieser Kugel wurde eine schwache Elektricität mitgetheilt, und durch Ueberdecken und Abheben eines blechernen hohlen Cylinders der Conductor des Elektrometers bald gegen die vertheilende Einwirkung dieser Elektricität geschützt, bald ihr ausgesetzt, wodurch das an ihm hängende Goldblättchen seine Stellung änderte. Es war natürlich nicht zu vermeiden, dass die der Kugel mitgetheilte Elektricitätsmenge nach und nach abnahm, desshalb wurden die Versuche in der Weise angestellt, dass z. B. erst bei der Entfernung 1000$^{mm}$, dann bei 2000, darauf wieder bei 1000, und so abwechselnd in möglichst gleichen Zeitintervallen weiter die elektrische Vertheilung in dem Conductor gemessen wurde. Es wurde dann das Mittel zweier bei 1000$^{mm}$ Entfernung erhaltenen zunächst auf einander folgenden Ausschläge mit dem zwischenliegenden Werthe bei 2000$^{mm}$ verglichen. Um bei grössern Entfernungen nicht allzu geringe Ausschläge zu beobachten, mussten die Ausschläge bei den kleinern Entfernungen etwas grösser als sonst genommen werden; diese grössern Ausschläge bedurften dann einer Correction, welche durch die S. 422 u. 423 angeführten Versuche ganz speciell für diesen Zweck ausgemittelt worden war.

Um eine Vorstellung davon zu geben, in welcher Weise die Elek-

tricität der Kugel von einer Messung zur andern abnahm, will ich zwei Versuchsreihen, die bald nacheinander angestellt wurden, mittheilen, aber der Kürze wegen gleich die corrigirten Werthe der Ausschläge angeben.

Auf dem Elektrometer befanden sich die Conductoren 0 und 1. Bei den in der ersten Spalte angegebenen Entfernungen wurden durch Abheben des etwa 1 Fuss langen Blechcylinders die in der zweiten Spalte befindlichen Ausschläge erhalten:

| Entfernungen. | Ausschläge. |
|---|---|
| 1000 | 15,30 |
| 2000 | 2,95 |
| 1000 | 14,60 |
| 2000 | 2,85 |
| 1000 | 13,85 |
| 2000 | 2,80 |
| 1000 | 13.0 |

In dieser Versuchsreihe nahm die Elektricität von einem Versuche zum folgenden im Mittel noch nicht ganz um 0,4 Skalentheile, also ungefähr um $\frac{1}{35}$ ab.

In der gleich darauf folgenden Versuchsreihe, wo die Conductoren 0, 1, 2 aufgesetzt waren, musste wegen der Länge dieses zusammengesetzten Conductors der S. 578 beschriebene messingene Kasten mit scharfen Kanten genommen werden. Obwohl die Elektricität auf der Kugel eine geringere Spannung hatte als zuvor, ist doch der Verlust durch die Anwendung des genannten Kastens etwas grösser geworden.

| Entfernungen. | Ausschläge. |
|---|---|
| 1000 | 15,0 |
| 2000 | 2,8 |
| 1000 | 13,85 |
| 2000 | 2,65 |
| 1000 | 12,75 |
| 2000 | 2,4 |
| 1000 | 11,5 |

Hier beträgt der Verlust während einer Messung im Mittel nicht ganz 0,6 Skalentheile oder $\frac{1}{22}$, ist also $1\frac{1}{2}$mal so gross als zuvor.

Auf die bezeichnete Weise wurden nun die Versuche zunächst angestellt, indem die Spitze des Conductors 0 zuerst 1000$^{mm}$ und dann 2000$^{mm}$ von dem tiefsten Punkte der Kugel entfernt war. Wird die Länge dieses Conductor zu 70$^{mm}$ von der Spitze abwärts gerechnet, so beträgt der Abstand der Mitte desselben von dem Mittelpunkte der Kugel in den beiden soeben angegebenen Lagen 1094$^{mm}$ und 2094$^{mm}$. Die Versuche ergaben nun in diesen Abständen der Kugel Ausschläge des Goldblättchens, die sich wie 1:0,212 verhielten.

Als dem Conductor 0 noch der Conductor 1 hinzugefügt, und die Kugel wieder auf dieselben Punkte als zuvor gestellt wurde, wobei die Abstände des Mittelpunktes des Conductors 0+1 von dem Mittelpunkte der Kugel 1044 und 2044 betrugen, so ergab sich das Verhältniss der Ausschläge in diesen Abständen wie 1:0,202.

Als noch der Conductor 2 hinzugefügt, so fand sich bei den Abständen der Mitte des Conductors 0+1+2 um 994$^{mm}$ und 1994$^{mm}$ von dem Mittelpunkte der Kugel das Verhältniss 1:0,197.

Nach Ansetzung des Conductors 3, wo die Abstände der Mitte des Conductors 0+1+2+3 vom Mittelpunkte der Kugel 944$^{mm}$ und 1944$^{mm}$ betrugen, war das Verhältniss 1:0,177.

Nach Hinzufügung von 4 und 5, wo die Abstände der Mitte des Conductors 0+1+2+3+4+5 vom Mittelpunkte der Kugel sich auf 844$^{mm}$ und 1844$^{mm}$ vermindert hatten, erhielt ich das Verhältniss der Ausschläge wie 1:0,169.

Macht man die Annahme, dass die Ausschläge im umgekehrten Verhältnisse einer Potenz der Entfernung stehen sollen, so erhält man aus den vorstehenden Verhältnissen und den dazugehörigen Entfernungen durch die Versuche mit

| | | | |
|---|---|---|---|
| dem | Conductor | 0 den Exponent dieser Potenz | 2,39 |
| „ | „ | 0+1 . . . . . . . . . . | 2,44 |
| „ | „ | 0+1+2 . . . . . . . . | 2,33 |
| „ | „ | 0+1+2+3 . . . . . . . | 2,40 |
| „ | „ | 0+1+2+3+4+5 . . . | 2,28. |

Schliessen wir den letzten Versuch, bei welchem die Spitze des Conductors nur noch 500$^{mm}$ von dem untersten Punkte der Kugel abstand, aus, so ist das Mittel aus den vier ersten Versuchsreihen 2,39.

Als die Abstände so gewählt wurden, dass die Spitze des Conductors 0 von dem untersten Punkte der Kugel abwechselnd 1000$^{mm}$ und

2500$^{mm}$ entfernt war, so ergaben sich für den Conductor 0 die Verhältnisse 1:0,103, woraus der Exponent 2,61 folgt. An einem andern Tage erhielt ich diess Verhältniss 1:0.098, und hieraus den Exponenten 2,67. Bei Anwendung des Conductors 0+1+2+3+4+5 erhielt ich, als die Kugel die soeben bezeichneten Stellen einnahm, das Verhältniss 1:0,070, und den Exponenten 2,58, also ebenfalls grösser als bei den Entfernungen von 1000$^{mm}$ und 2000$^{mm}$.

Wurden die Abstände der Spitze des Conductors 0 von dem untersten Punkte der Kugel zu 1000$^{mm}$ und 1500$^{mm}$ genommen, so ergab sich für den Conductor 0 das Verhältniss 1:0,427, was den Exponent 2,23 ergibt.

Aus dem Vorhergehenden folgt also, dass die elektrische Einwirkung der Kugel auf dem Conductor des Elektrometers nicht im umgekehrten Verhältnisse einer einzelnen bestimmten Potenz der Entfernungen zunimmt.

Dagegen lassen sich die Ausschläge des Elektrometers bei den verschiedenen Entfernungen in angenäherter Weise durch die Formel

$$\frac{B}{e^2} - \frac{A}{e}$$

darstellen, wo $e$ die Entfernung des Mittelpunktes der Kugel von der elektrischen Mitte des Conductors auf dem Elektrometer, und $B$ und $A$ zwei Constanten bedeuten, deren Werthe aus den oben mitgetheilten vier Messungen bei Anwendung des Conductors 0 sich ergaben:

$$B = 1518000 \qquad \log B = 6{,}1813.$$
$$A = 289{,}4 \qquad \log A = 2{,}4616.$$

Wird der Ausschlag bei der Entfernung 1094$^{mm}$ gleich 1 gesetzt, so gibt die obige Formel folgende Werthe:

| Entfernungen. | Ausschläge | | Unterschiede. |
|---|---|---|---|
| | berechnet. | beobachtet. | |
| 1094$^{mm}$ | 1,004 | 1,000 | — 0,004 |
| 1594 | 0,416 | 0,427 | + 0,011 |
| 2094 | 0,208 | 0,212 | + 0,004 |
| 2594 | 0,114 | 0,100 | — 0,014 |

Wendet man die obige Formel unter Beibehaltung der angegebenen Constanten auf den Fall an, wo anstatt des Conductors 0 der Conductor 0 + 1 auf das Elektrometer aufgeschraubt war, so erhält man für die

Entfernungen der Mitte des neuen Conductors 1044$^{mm}$ und 2044$^{mm}$ vom Mittelpunkte der Kugel die Werthe 1,116 und 0,221, deren Verhältniss 1:0,198 ist, während die Beobachtung 1:0,202 ergeben hat.

Auf den Fall angewandt, wo der Conductor 0+1+2 auf dem Elektrometer sich befindet, und die Entfernungen der Mitte dieses Conductors vom Mittelpunkte der Kugel 994$^{mm}$ und 1994$^{mm}$ betragen, gibt die obige Formel die Werthe 1,246 und 0,237, deren Verhältniss 1:0,190 ist, während die Beobachtung 1:0,197 ergeben hat.

Für den Fall, wo der Conductor des Elektrometers die Länge 0+1+2+3 besitzt und die Entfernungen seiner Mitte vom Mittelpunkte der Kugel 944$^{mm}$ und 1944$^{mm}$ betragen, erhält man durch obige Formel die Werthe 1,437 und 0,252, deren Verhältniss 1:0,175 ist, während die Beobachtung 1:0,177 ergeben hat.

Für den letzten der oben angeführten Fälle, wo die Länge des Conductors 0+1+2+3+4+5 und die Entfernungen seiner Mitte vom Mittelpunkte der Kugel 844$^{mm}$ und 1844$^{mm}$ waren, liefert die obige Formel die Werthe 1,789 und 0,289, deren Verhältniss 1:0,162 ist, während die Beobachtung 1:0,169 ergeben hat.

Die Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtungen betragen in diesen letzten vier Fällen der Reihe nach

$$+0{,}004,\quad +0{,}007,\quad +0{,}002,\quad +0{,}007.$$

Mit Hülfe der soeben aufgestellten Beziehung zwischen der Entfernung der Elektricität, von welcher die Vertheilung ausgeht, von dem Conductor und dem Ausschlage des Elektrometers lässt sich nun auch die Vertheilungswirkung der an einem dünnen Drahte hängenden Kugel auf den Conductor des Elektrometers berechnen. Bei der grossen Entfernung der Kugel vom Conductor kann man die auf ihrer Oberfläche vorhandene Elektricität im Schwerpunkte der elektrischen Masse vereinigt annehmen. Ist die Dicke der elektrischen Schicht auf dem untersten Punkte der Kugel = 1, so enthält die Kugel nach S. 537 die elektrische Menge 3289, und der Schwerpunkt dieser Masse liegt nach S. 538 0,73$^{mm}$ unterhalb des Kugelmittelpunktes.

Die Vertheilung der Elektricität auf dem Drahte ist nach S. 541 gegeben durch den Ausdruck

$$\frac{ax}{a+x} = \frac{104{,}8x}{0{,}7965+x},$$

wenn der Radius der Kugel als Längeneinheit genommen wird; be-

trachtet man dagegen als solche das Millimeter, so wird der Ausdruck für diese Vertheilung

$$\frac{\alpha x}{\alpha + x} = \frac{104,3x}{46,96 + x}.$$

Hiernach ist auf einem Querschnitte des Drahtes von der Länge $dx$ die Elektricitätsmenge

$$q = \frac{\varrho a}{2}\frac{x\,dx}{\alpha + x} = \frac{0,0628 \,.\, 104,3}{2} \cdot \frac{x\,dx}{46,96 + x}$$

verbreitet, wobei $x$ vom Anfangspunkte des Drahtes gerechnet wird, oder

$$q = \frac{\varrho a}{2} \cdot \frac{(x-\xi)\,dx}{\alpha + x - \xi},$$

wenn $x$ von einem um $\xi$ von der Spitze des Drahtes abstehenden Punkte an gezählt wird. Zur Berechnung der Vertheilungswirkung, welche die Elektricitätsmenge $q$ auf den Conductor des Elektrometers ausübt, muss nun das zuvor gefundene Gesetz, wonach dieselbe von den umgekehrten Werthen der zweiten und ersten Potenz der Entfernung abhängt, auf jeden Querschnitt des Drahtes angewandt, d. h. das entsprechende Integral zwischen den gehörigen Gränzen genommen werden.

Es ist wohl nicht wahrscheinlich, dass der oben für die Abhängigkeit der Vertheilungswirkung von der Entfernung gefundene Ausdruck auch für kleinere Entfernungen richtig bleibt; diess hindert aber seine Benutzung im vorliegenden Falle nicht, da er nur auf solche Entfernungen, innerhalb welcher er Geltung besitzt, angewandt werden soll; es dürfen also die nöthigen Constanten aus den bei grössern Entfernungen ausgeführten Messungen immerhin so bestimmt werden, als ob sie auch z. B. für die Entfernung von $1^{mm}$ noch brauchbar wären.

Nehmen wir an, dass die Dicke der elektrischen Schicht am untersten Punkte der an dem feinen Drahte hängenden Kugel 1 sei; dann beträgt die Menge der auf ihr vorhandenen Elektricität 3289, die man in ihrem Schwerpunkte vereinigt nehmen kann. Nach S. 538 liegt dieser Schwerpunkt $0,73^{mm}$ unterhalb des Mittelpunktes der Kugel. Es werde diese Elektricitätsmenge mit $E$ bezeichnet; so wird ihre Vertheilungswirkung in der in Millimetern ausgedrückten Entfernung $e$ des Schwerpunktes der elektrischen Masse von dem Mittelpunkte des Conductors

$$fE\left(\frac{B}{e^2} - \frac{A}{e}\right),$$

wo $f$ einen constanten Factor bezeichnet, um die Constanten $A$ und $B$ den vorliegenden Verhältnissen anzupassen.

Auf gleiche Weise ergibt sich die Vertheilungswirkung der auf einem Querschnitte des Drahtes enthaltenen Elektricitätsmenge zu

$$fq\left(\frac{B}{x^2}-\frac{A}{x}\right)=\frac{f\varrho a}{2}\,\frac{x-\xi}{\alpha+x-\xi}\left(\frac{B}{x^2}-\frac{A}{x}\right)dx,$$

wo $f$ denselben constanten Factor und $x$ den Abstand von der Mitte des Conductors bezeichnet. Die Vertheilungswirkung des ganzen Drahtes von $x=\xi$ bis $x=N=3545^{mm}$ wird dann gefunden durch das Integral

$$\frac{f\varrho a}{2}\int\left\{\frac{B}{x^2}-\frac{A}{x}\right\}\frac{x-\xi}{\alpha+x-\xi}\,dx.$$

Die Gesammtwirkung der auf Kugel und Draht vorhandenen Elektricität ist also

$$f\left[E\left(\frac{B}{e^2}-\frac{A}{e}\right)+\frac{\varrho a}{2}\int_{\xi}^{N}\left\{\frac{B}{x^2}-\frac{A}{x}\right\}\frac{x-\xi}{\alpha+x-\xi}\,dx\right]=$$

$$f\left[E\left(\frac{B}{e^2}-\frac{A}{e}\right)+\frac{\varrho a}{2}\left\{\left(\frac{B}{\xi-\alpha}\left(1-\frac{\xi}{N}\right)-A\ \text{log nat.}\ \frac{N}{\xi}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\alpha}{\xi-\alpha}\left(\frac{B}{\xi-\alpha}-A\right)\ \text{log nat.}\ \frac{(N-\xi+\alpha)\,\xi}{N\alpha}\right\}\right].$$

Das mit $\alpha$ als Factor multiplicirte Glied ist nur klein.

Ich will zunächst diese Formel auf eine Beobachtungsreihe anwenden. Als die Kugel mit ihrem Mittelpunkte $1044^{mm}$ von der elektrischen Mitte des Conductors 0 + 1 abstand, so betrug bei einer gewissen Empfindlichkeit des Elektrometers der Ausschlag, welchen die über Kugel und Draht verbreitete Elektricität im Elektrometer erzeugte, nach S. 581 2,57. Wurde die Kugel $500^{mm}$ weiter entfernt, so verringerte er sich auf 1,15, und als die Kugel nochmals $500^{mm}$ weiter entfernt wurde, auf 0,50. Die Abstände des Schwerpunktes der auf der Kugel vorhandenen Elektricität waren also in diesen drei Versuchen 1043, 1543 und 2043. Der Anfangspunkt des Drahtes, also $\xi$, hatte in denselben von der elektrischen Mitte des Conductors 0+1 die Abstände 1102, 1602 und 2102, während der Abstand seines oberen Endes von derselben Mitte $N$ stets 3545 betrug. Berechnet man nun unter Fortlassung des Coefficienten $f$ den Werth des vorstehenden Ausdrucks für diese drei Fälle mit den obigen Werthen für $A$ und $B$, so gibt im

| | ersten Falle | zweiten Falle | dritten Falle |
|---|---|---|---|
| die Kugel | 3675 | 1480 | 730 |
| der Draht | 1663 | 796 | 389 |
| zusammen also | 5338 | 2276 | 1119. |

Es verhält sich aber

$$5338:2276:1119=1:0{,}4262:0{,}2096=2{,}57:1{,}10:0{,}54$$

was sehr nahe mit den zuvor angegebenen, der Beobachtung entnommenen Werthen 2,57, 1,15 und 0,50 übereinstimmt.

Ich will hier nicht dabei verweilen, den noch vorhandenen sehr kleinen rückwirkenden elektrischen Einfluss des Elektrometers auf die Kugel zu untersuchen, der bei weiten Entfernungen ganz zu vernachlässigen ist. Jedenfalls lässt er sich, wenn er in Rechnung gezogen werden soll, ähnlich wie früher auf empirische Weise ermitteln, indem man erst die Kugel aufhängt, und die Dicke der auf ihr vorhandenen elektrischen Schicht mittelst eines Probekügelchens misst, dann das Elektrometer darunter stellt, und die elektrische Dicke auf der Kugel von Neuem bestimmt.

Nach dem Vorhergehenden ist es nun leicht, zu berechnen, welchen Ausschlag eine bestimmte $1000^{mm}$ oberhalb der elektrischen Mitte des Conductors befindliche Elektricitätsmenge in dem unterhalb befindlichen Elektrometer bei einer gegebenen Empfindlichkeit desselben bewirkt; oder ebenso umgekehrt, welche Elektricitätsmenge aus dieser Entfernung wirken muss, um einen gegebenen Ausschlag im Elektrometer hervorzurufen.

Bezeichnen wir mit $\vartheta$ den Ausschlag des Elektrometers, so lässt sich $\vartheta$ durch den obigen Ausdruck

$$\vartheta = f\Big[E\Big(\frac{B}{e^2}-\frac{A}{e}\Big)+\frac{\varrho a}{2}\Big\{\frac{B}{\xi-\alpha}\Big(1-\frac{\xi}{N}\Big)-A\log\text{nat.}\frac{N}{\xi} - \frac{\alpha}{\xi-\alpha}\Big(\frac{B}{\xi-\alpha}-A\Big)\log\text{nat.}\frac{(N-\xi+\alpha)\xi}{N\alpha}\Big\}\Big]$$

finden, sobald der Coefficient $f$, oder die Constanten $fB$, $fA$ auf angemessene Weise bestimmt, und dann für $E$ und $a$ die gegebenen Werthe gesetzt werden. In dem kurz zuvor behandelten Falle, wo die Kugel sammt ihrem Drahte auf den Conductor 0+1 vertheilend wirkte, betrug nach S. 575 die Dicke der elektrischen Schicht am tiefsten Punkte der Kugel 1,9424; so dass die Menge $E$ der auf der Kugel vorhandenen Elektricität $1{,}9424 \,.\, 3289 = 6388$ wird. Die Dicke $a$ der elektrischen Schicht auf dem Drahte beträgt $1{,}9424 \,.\, 104{,}3 = 202{,}6$.

Da vorhin, wo es sich bloss um Verhältnisse handelte, nur die relativen Mengen der auf Kugel und Draht in den verschiedenen Fällen zur Wirkung gelangenden Elektricität in Betracht kamen, so waren die absoluten Werthe von $E$ und $a$ gleichgültig; es war daher für $E$ 3289 und für $a$ 104,3 gesetzt, d. h. die Dicke der elektrischen Schicht am tiefsten Punkte der Kugel gleich 1 genommen worden. Handelt es sich

aber um die absoluten Ausschläge, so müssen statt $E$ und $a$ ihre wirklichen Werthe in die Formel, also $E = 6388$ und $a = 202{,}6$, aufgenommen werden. Werden für $E$ und $a$ nur die obigen relativen Werthe gesetzt, so beträgt nach S. 590 der Werth innerhalb der eckigen Klammer 5338; mit den absoluten Werthen von $E$ und $a$ wird derselbe also 1,9424mal grösser.

Um für die in den vorhergehend berechneten Versuchen vorhandene Empfindlichkeit des Elektrometers den Werth von $f$, oder von $fB$ und $fA$ zu bestimmen, hat man also das Product

$$f.\,1{,}9424\,.\,5338$$

dem für $e = 1043^{mm}$ gemessenen Ausschlage $\frac{1}{2}\,.\,2{,}57 = 1{,}285$ gleich zu setzen, woraus sich ergibt

$$f = 0{,}00001239$$
$$fB = 188{,}2 = m$$
$$fA = 0{,}03589 = n.$$

Werden also für $fB$ und $fA$ diese mit $m$ und $n$ bezeichneten Constanten, und für $E$ und $a$ ihre absoluten Werthe gesetzt, so gibt die Formel

$$\delta = \left[E\left(\frac{m}{e^2} - \frac{n}{e}\right) + \frac{ea}{2}\left\{\frac{m}{\xi-\alpha}\left(1 - \frac{\xi}{N}\right) - n \log \text{nat.} \frac{N}{\xi} \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\alpha}{\xi-\alpha}\left(\frac{m}{\xi-\alpha} - n\right) \log \text{nat.} \frac{(N-\xi-\alpha)\,\xi}{N\alpha}\right\}\right]$$

den absoluten Werth des Ausschlags $\delta$. Soll also z. B. derselbe Ausschlag $\delta = 1{,}285$ durch eine auf derselben Kugel von $117{,}91^{mm}$ Durchmesser gleichmässig verbreitete Elektricitätsmenge erzeugt werden, wenn der Mittelpunkt der Kugel sich $1000^{mm}$ über der elektrischen Mitte des Conductors befindet, so hat man die Dicke $x$ der elektrischen Schicht so zu wählen, dass

$$1{,}285 = x\left(\frac{117{,}91}{2}\right)^2\left(\frac{188{,}2}{1000^2} - \frac{0{,}03589}{1000}\right),$$

weil nach S. 442 das Quadrat des Halbmessers die Menge der bei der constanten Dicke 1 auf einer Kugel vorhandenen Elektricität angibt. Hieraus erhält man

$$x = 2{,}428.$$

Die Menge der auf der Kugel von $117{,}91^{mm}$ Durchmesser bei dieser Dicke vorhandenen elektrischen Schicht beträgt

$$8439.$$

Diese Menge kann auch im Mittelpunkte der Kugel vereinigt gedacht werden. Die Einwirkung der über Kugel und Draht verbreiteten Elektricität bei der Entfernung des Schwerpunktes der Elektricität auf der

Kugel um 1043$^{mm}$ von der Mitte des Conductors beträgt also ebensoviel, als wenn die Elektricitätsmenge 8439 von einem 1000$^{mm}$ oberhalb der elektrischen Mitte des Conductors gelegenen Punkte aus auf den Conductor des Elektrometers gewirkt hätte.

Ein Blick auf die Tabelle (S. 581) zeigt, dass die Verhältnisse auch bei den übrigen Conductoren nahe dieselben sind, und dass also eine Berechnung der übrigen Reihen auch zu nahe denselben Zahlen führen muss. Ich habe die Berechnung der zweiten Versuchsreihe für den Conductor 0 + 1 vorgezogen, weil für sie bei der Entfernung 1000$^{mm}$ über der Spitze des Conductors 0 der Abstand der Spitze des Conductors noch hinlänglich gross, der Conductor selbst aber noch klein war, und dieser Conductor 0 + 1 auch sehr bequem im Freien bei der Beobachtung der atmosphärischen Elektricität gebraucht werden konnte.

## XIII. Die Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse.

Die vorhergehenden Abschnitte gewähren uns die Mittel, jetzt unmittelbar zur Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse überzugehen. Mit Bezugnahme auf dieselben setze ich demnach voraus, dass man durch specielle Versuche die für die verschiedenen Ausschläge des Goldblättchens etwa erforderlichen Correctionen aufgesucht, so wie auch ausgemittelt habe, welche Elektricitätsmenge aus einer gegebenen Entfernung z. B. von 1000$^{mm}$ wirkend, bei einer bestimmten Empfindlichkeit des Elektrometers einen gewissen Ausschlag bewirkt.

Soll nun die atmosphärische Elektricität durch ihre Vertheilungswirkung an einem Punkte der Erdoberfläche gemessen werden, so stelle man das in Fig. 1 u. 2 abgebildete Elektrometer an diesem Punkte auf demselben Gestelle (Dreifusse) auf, der es trug, als die auf der Kugel und ihrem Drahte vorhandene Elektricität auf seinen Conductor vertheilend wirkte (S. 576), und schraube auch denselben Conductor auf, der bei den eben erwähnten Versuchen angewandt worden. Darauf bedecke man den Conductor durch den S. 578 beschriebenen blechernen Cylinder oder den aus zwei Theilen bestehenden parallelepipedischen Kasten (die beide am obern Ende geschlossen sind), verbinde nach einander, durch Niederdrücken der Hebelarme *TT'* (Fig. 1 u. 2) unter die Knöpfe *mm*, die Pole der in der Mitte abgeleiteten kleinen Säule des

Elektrometers mit dem Goldblättchen, und messe durch Umlegen des Commutators *gh* die Ausschläge desselben. Nach S. 428 liefern die so erhaltenen Ausschläge die nöthigen Grundlagen zur Reduction der unmittelbar nachher gemachten Messungen auf eine willkührlich angenommene Empfindlichkeit des Instrumentes. Wenn die Messungen der atmosphärischen Elektricität längere Zeit hindurch fortgesetzt werden sollen, so ist es namentlich bei starken Aenderungen der Temperatur zweckmässig, von Zeit zu Zeit die Bestimmung der Empfindlichkeit des Instrumentes zu wiederholen. Dabei ist aber sorgfältig jedes Schliessen der Kette zu vermeiden.

Nach Ausmittelung der gerade stattfindenden Empfindlichkeit steht der Messung der atmosphärischen Elektricität Nichts weiter entgegen. Man stellt den Commutator in die eine oder andere Lage; am besten wählt man jedes Mal dieselbe wieder, um aus der Richtung des Ausschlages sogleich die Art der Elektricität zu erkennen. Sodann befreit man den Conductor von aller Elektricität. Um diess zu erlangen, neigt man die Blechhülle etwas, oder verschiebt sie ein wenig zur Seite, bis der Conductor an ihre innere Wand anstösst. Da der Conductor bei dieser Berührung sich noch in einem vollständig von Leitern umhüllten Raume befindet, so muss er dadurch gänzlich unelektrisch werden. Diess Verfahren wird jedes Mal wiederholt, sobald man den Conductor, der auf irgend eine Weise Elektricität aufgenommen hat, (was man augenblicklich an der Stellung des Goldblättchens während der Bedeckung mit dem Cylinder erkennt,) in nichtelektrischen Zustand versetzen will. Eine vorherige Ladung des Conductors hindert zwar, wie schon erwähnt, die Einwirkung der atmosphärischen Elektricität auf den von der Blechhülle befreiten Conductor nicht, macht aber bei stärkern Ausschlägen grössere Correctionen nöthig, und kann auch zu Fehlern Veranlassung geben, weil die im Conductor vorhandene Elektricität während der Bedeckung mit der Blechhülle eine andere Vertheilung hat als nach Abhebung derselben. Darauf hebt man die Blechhülle ein wenig (1 bis 2 Linien) in die Höhe, so dass sie nirgends das Gehäuse des Elektrometers mehr berührt, aber doch den Conductor noch vollständig einhüllt, und liest den Stand des Goldblättchens ab. Zuletzt nimmt man die Blechhülle ganz hinweg, senkt sie möglichst tief zur Erde nieder, und beobachtet den Stand des Goldblättchens von Neuem. Da die Blechhülle schon vor der ersten Ablesung von dem Gehäuse abgelöst war, so kann das blosse

Hinwegnehmen derselben im Stande des Goldblättchens keine Störung bewirken; die ganze Aenderung in der Lage des Goldblättchens, welche nach der Abhebung eintritt, ist daher eine Wirkung der atmosphärischen Elektricität und kann als Maass für dieselbe dienen. Eine Vergleichung dieses Ausschlages mit denjenigen, welche früher bei den im vorhergehenden Abschnitte beschriebenen Versuchen unterhalb der elektrischen Kugel beobachtetet wurden, dient dann schliesslich zur Reduction der gemachten Messung auf ein absolutes Maass.

Ich will das angegebene Verfahren auf einen speciellen Fall anwenden.

An dem Nachmittage eines ziemlich heitern Septembertages wurde das in Fig. 1 u. 2 abgebildete Elektrometer im freien Felde zwischen Leipzig und dem nahen Dorfe Schönefeld aufgestellt. Als der eine Pol seiner Säule mit dem Goldblättchen verbunden war, erhielt ich den Ausschlag 10,0; der andere Pol gab 9,75. Das Mittel aus beiden ist 9,87, und die Quadratwurzel aus dieser Zahl, 3,14 kann als Maass für die damals stattfindende Empfindlichkeit des Instrumentes betrachtet werden.

Als der Conductor 0+1 auf das Instrument aufgeschraubt war, erhielt ich durch Abheben im Laufe einer Viertelstunde Ausschläge, deren Grösse sich von 8 bis zu 15 Skalentheilen änderte. Gesetzt nun, es solle die Einwirkung der atmosphärischen Elektricität für denjenigen Zeitpunkt nach absolutem Maasse gemessen werden, wo der Ausschlag des Goldblättchens gerade 12 Skalentheile betrug.

Als später dasselbe Elektrometer, bei derselben Entfernung der Scheiben *C,C* (Fig. 1) vom Goldblättchen, und mit demselben Conductor 0+1 versehen, sich unterhalb der elektrischen Kugel befand, erhielt ich als mittleren Ausschlag bei Verbindung beider Säulenpole mit dem Blättchen 7,95; die jetzige Empfindlichkeit wird also gemessen durch $\sqrt{7{,}95}$ oder 2,82. Bei dieser Empfindlichkeit des Instrumentes war nach S. 592 eine Elektricitätsmenge von 8439 der oben S. 441 festgesetzten Einheiten nöthig, um aus einer Entfernung von 1000$^{mm}$ einen Ausschlag von $\frac{2{,}75}{2} = 1{,}285$ Skalentheilen zu erzeugen. Wäre das Elektrometer in unverändertem Zustande jetzt ins Freie gebracht, und derselben Vertheilungswirkung von Seiten der atmosphärischen Elektricität, wie an dem erwähnten Septembertage in dem Augenblicke, wo ein Ausschlag von 12 Skalentheilen beobachtet wurde, ausgesetzt worden, so hätte nicht

ein Ausschlag von 12 Skalentheilen, sondern ein im Verhältniss von 3,14 : 2,82 geringerer, also nur von 10,8 Skalentheilen entstehen können. Um aber einen Ausschlag von 10,8 Skalentheilen zu erzeugen, bedarf es nach dem Vorherigen der Elektricitätsmenge 70930, die sich zu 8439 verhält wie 10,8 : 1,285.

Die Zahl 70930 gibt uns also ein Maass für die in dem bezeichneten Zeitpunkte jenes Nachmittages durch die atmosphärische Elektricität ausgeübte Vertheilungswirkung, das von jeder speciell elektrischen Einheit unabhängig nur auf die gewöhnlichen in der Mechanik bisher schon gebräuchlichen Einheiten der Länge, der Masse und der Zeit gegründet ist.

## XIV. Einige Bemerkungen über die Messung der atmosphärischen Elektricität.

Die grossen Schwankungen, welchen die Stärke der atmosphärischen Elektricität infolge von Veränderungen in der Beschaffenheit der Atmosphäre unterworfen ist, machen es wünschenswerth, die Empfindlichkeit des Elektrometers beliebig und auf eine bequeme Weise abändern zu können. Allerdings sind schon früher S. 426 zwei Wege angegeben, wie diess geschehen kann; die Eigenthümlichkeit der Wirkung der atmosphärischen Elektricität gestattet aber noch die Anwendung eines dritten Verfahrens, das sogar in den meisten Fällen bei den Beobachtungen im Freien wegen der Schnelligkeit seiner Ausführung den Vorzug verdient.

Gesetzt man habe frühern Erfahrungen gemäss den Scheiben *C,C* (Fig. 1 u. 2) eine solche Entfernung, und den Polen der Säule im Elektrometer eine solche Stärke gegeben, dass die atmosphärische Elektricität des heitern Himmels bei mittlerer Stärke, wenn der Conductor 0+1 auf das Instrument aufgeschraubt ist, einen starken, aber doch nicht übermässigen Ausschlag gibt. Nimmt dann die atmosphärische Elektricität infolge einer Bedeckung des Himmels bedeutend ab, oder infolge der Auflösung eines vielleicht vorhandenen Wolkenschleiers noch stark zu, so werden die Ausschläge des Goldblättchens bei Anwendung des Conductors 0 + 1 im ersten Falle zu klein, im zweiten dagegen zu gross werden, um mit Bequemlichkeit beobachtet und zur Gewinnung genauer Resultate verwendet werden zu können. Unter solchen Umständen erhält man am einfachsten wieder Ausschläge von wünschenswerther Grösse, indem man im ersten Falle dem Conductor 0 + 1 noch

je nach dem Bedürfniss das Stück 2, oder auch die Stücke 2 und 3 u. s. w. zusetzt, oder im zweiten Falle den Conductor 0 + 1 auf den Conductor 0 allein reducirt.

Um nun die mit diesen Conductoren erhaltenen Ausschläge auf ein absolutes Maass zurückzuführen, kann man entweder Beobachtungen über die Vertheilungswirkung einer mit bekannter Elektricitätsmenge bedeckten Kugel, falls solche zuvor angestellt sind, benutzen, oder auch, falls solche Beobachtungen nicht vorliegen, die mit den neuen Conductoren erhaltenen Ausschläge so reduciren, wie sie mit dem Conductor 0 + 1 beobachtet sein würden. Zur Ausführung dieser letzten Reduction muss man aber wissen, in welchem Grade sich bei Voraussetzung unveränderter Stärke der atmosphärischen Elektricität durch Verkürzung oder Verlängerung des Conductors um eine gegebene Grösse die Ausschläge ändern.

Dürfte man voraussetzen, dass der elektrische Zustand der Atmosphäre einige Zeit hindurch unverändert bliebe, so könnte man durch Beobachtungen mit einem einzigen Elektrometer das Verhältniss bestimmen, in welchem die Ausschläge durch Aenderung der Länge des Conductors abgeändert werden, indem man erst Beobachtungen mit dem einen und dann mit dem andern Conductor ausführte. Indess ist die elektrische Einwirkung der Atmosphäre auf den Conductor des Elektrometers im Allgemeinen gewissen Schwankungen unterworfen, und selbst bei scheinbar heiterm Himmel treten dieselben infolge von nicht sichtbaren Vorgängen in der Atmosphäre ein. Sehr auffallend werden solche, wenn in einiger Entfernung Rauchsäulen aus Fabrikschornsteinen aufsteigen, die je nach dem Schwanken des Windes ihre Lage etwas ändern. Als Beweis mögen z. B. folgende Beobachtungen auf dem freien Felde zwischen der Stadt Leipzig und dem Dorfe Schönefeld dienen. Die in jeder verticalen Reihe stehenden Beobachtungen wurden unmittelbar nacheinander gemacht; jede einzelne Messung nahm ungefähr die Zeit einer halben Minute in Anspruch; zwischen zwei aufeinander folgenden verticalen Reihen liegt 1 oder 2 Minuten Zwischenzeit:

| I. | II. | III. | IV. | V. | VI. |
|---|---|---|---|---|---|
| 7,05 | 5,25 | 3,80 | 4,80 | 5,90 | 5,45 |
| 7,20 | 4,85 | 3,65 | 5,00 | 5,70 | 5,40 |
| 7,45 | 4,75 | 4,05 | 5,05 | 5,70 | 5,00 |
| 7,00 | ... | 3,85 | 5,30 | 5,70 | 4,80 |
| 6,80 | ... | 3,80 | 5,45 | 6,00 | 4,70. |

So gross und unregelmässig sind nun allerdings die Schwankungen in Gegenden, wo solche Schornsteine fehlen, nicht; im Allgemeinen ändert sich daselbst bei heiterm Himmel die Stärke der Elektricität allmählig, indem sie etwas auf und abschwankt; indess kommen doch auch öfters stärkere Störungen vor. Ich will hier als Beispiel aus einer langen auf einem Berge in der Nähe von Arnstadt gemachten Beobachtungsreihe einige Angaben herausheben. Am 1. September 1852 änderten sich bei blauem Himmel mit einzelnen Wolken und starkem Winde die Ausschläge von 2 Uhr Nachmittags an innerhalb einer halben Stunde unter kleinen Schwankungen von 4,6 bis 3,6; im Laufe der nächsten halben Stunde schwankten die Werthe anfangs um 3,5, und begannen dann zu steigen, so dass in der dritten halben Stunde, um auch einzelne Messungen mitzutheilen, folgende Ausschläge beobachtet wurden:

| I. | II. | III. | IV. | V. | VI. |
|---|---|---|---|---|---|
| 4,4 | 4,8 | 4,7 | 5,7 | 4,7 | 4,7 |
| 4,4 | 4,9 | 4,5 | 5,4 | 4,8 | 4,5 |
| 4,8 | 4,9 | 4,5 | 4,7 | 4,9 | 4,4 |
| 4,8 | 4,2 | 4,7 | 4,6 | 5,0 | 4,8 |
| 4,3 | 4,8 | 5,5 | 5,0 | 4,9 | 4,7. |

Die Zwischenzeit zwischen den einzelnen Beobachtungen war hier fast 1 Minute, also grösser als vorhin. In der folgenden halben Stunde stiegen die Ausschläge bis zu 6 und darüber, und (der Wind war schwächer geworden) nahmen dann wieder ab, so dass sie bei untergehender Sonne (der Wind hatte sich gelegt) 3,8 Skalentheile betrugen.

Man sieht, dass es unter solchen Umständen nicht wohl möglich ist, aus nacheinander mit Conductoren von verschiedener Länge angestellten Beobachtungen genaue Verhältnisszahlen zur Reduction der Ausschläge aufeinander abzuleiten. Dagegen lassen sich diese Zahlen mit Leichtigkeit und jeder gewünschten Genauigkeit durch streng gleichzeitige Beobachtungen zweier 15 bis 20 Schritte von einander entfernten Elektrometer finden. Das eine Elektrometer bleibt fortwährend in unverändertem Zustande; auf das andere schraubt man erst den Conductor 0 auf, und bestimmt das Verhältniss zwischen den Ausschlägen der beiden Instrumente durch Mittelwerthe aus beliebig vielen Beobachtungen; fügt dann dem Conductor 0 noch das Stück 1 hinzu, und bestimmt wieder das Verhältniss der Ausschläge. Um zugleich mögliche Aenderungen in der Stärke der Säulen zu erkennen und auszuscheiden, ist es zweckmässig, nach den Messungen mit dem Conductor 0 + 1

die Messungen mit dem Conductor 0 zu wiederholen. Verfährt man auf gleiche Weise mit den übrigen Verlängerungsstücken, so geben die erhaltenen Resultate ein Mittel, um die gewünschten Reductionscoefficienten für die verschiedenen Conductoren zu berechnen. Rücksichtlich der gleichzeitigen Beobachtungen will ich noch bemerken, dass dieselben nach abgehobener Blechhülle streng gleichzeitig, am besten auf ein von dem einen Beobachter gegebenes Zeichen gemacht werden müssen; während der Bedeckung des Conductors, also im nichtelektrischen Zustande, brauchen die Beobachtungen zur Bestimmung der Ruhelage natürlich nicht streng gleichzeitig zu geschehen.

Jeder etwas hohe in der Nähe des Elektrometers befindliche Gegenstand ändert durch seine Annäherung oder Entfernung, durch seine Hebung oder Senkung die Vertheilungswirkung der atmosphärischen Elektricität auf den von seiner Hülle befreiten Conductor etwas ab. Da der Kopf des Beobachters dem Conductor ziemlich nahe ist, so muss der Beobachter denselben stets genau in dieselbe Stellung bringen, damit sein Einfluss derselbe bleibt; auch ist, um diesen Einfluss zu schwächen, die Kopfbedeckung so niedrig als möglich zu wählen, am besten ganz anschliessend. Uebrigens habe ich an dem blechernen Gehäuse, womit das Elektrometer *B* bedeckt wird, eine Vorrichtung anbringen lassen, um ein angemessen geformtes Blech zu befestigen, das den Conductor gegen die Einwirkung des Kopfes des Beobachters schützt. Man übt sich aber auch leicht so ein, dass man diese Vorrichtung entbehren kann, indem das deutliche Erkennen der Theilstriche des Ocularmikrometers und des gewählten Punktes am untern Ende des Goldblättchens stets eine bestimmte Entfernung des Auges vom Instrumente erfordert.

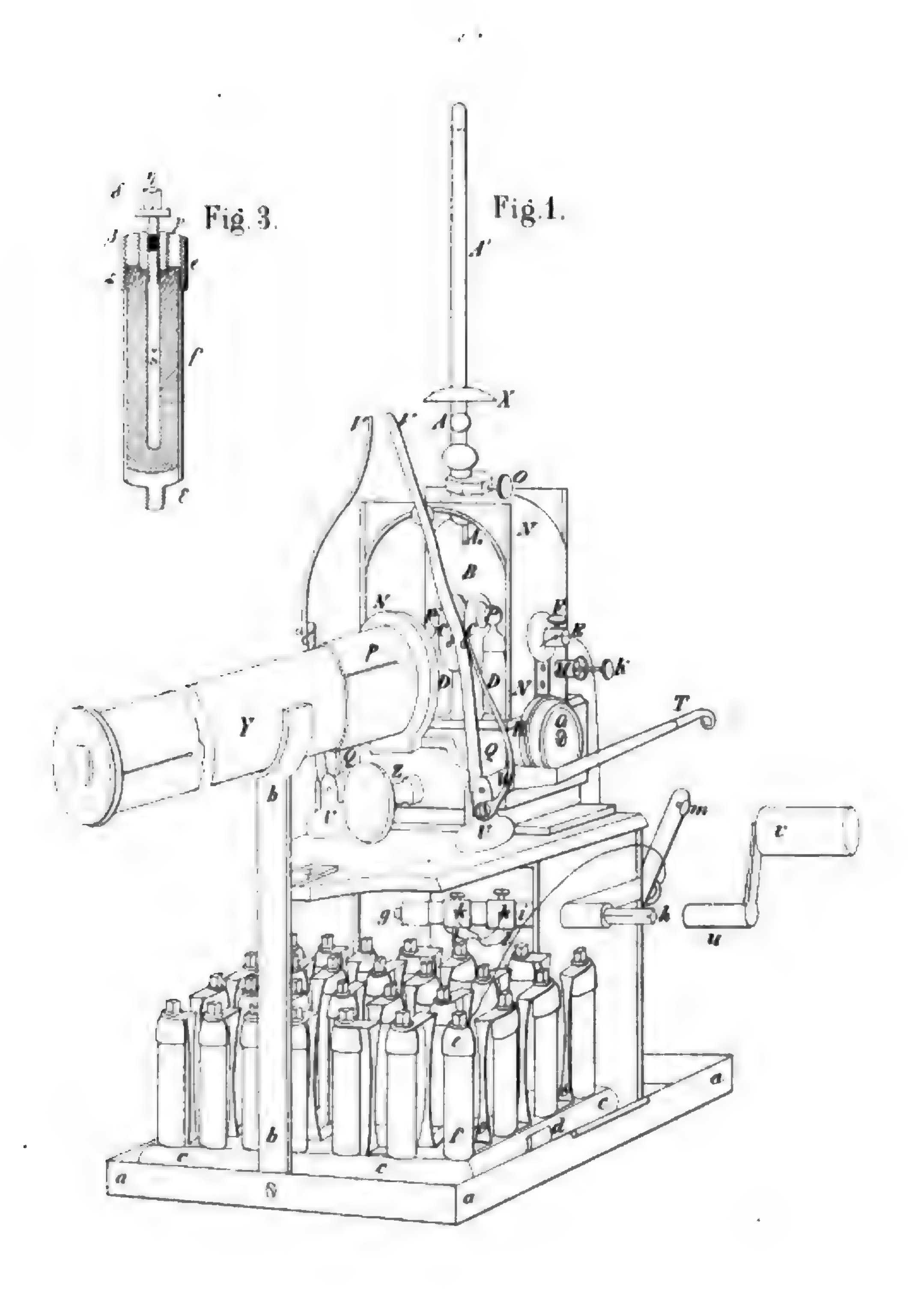
---

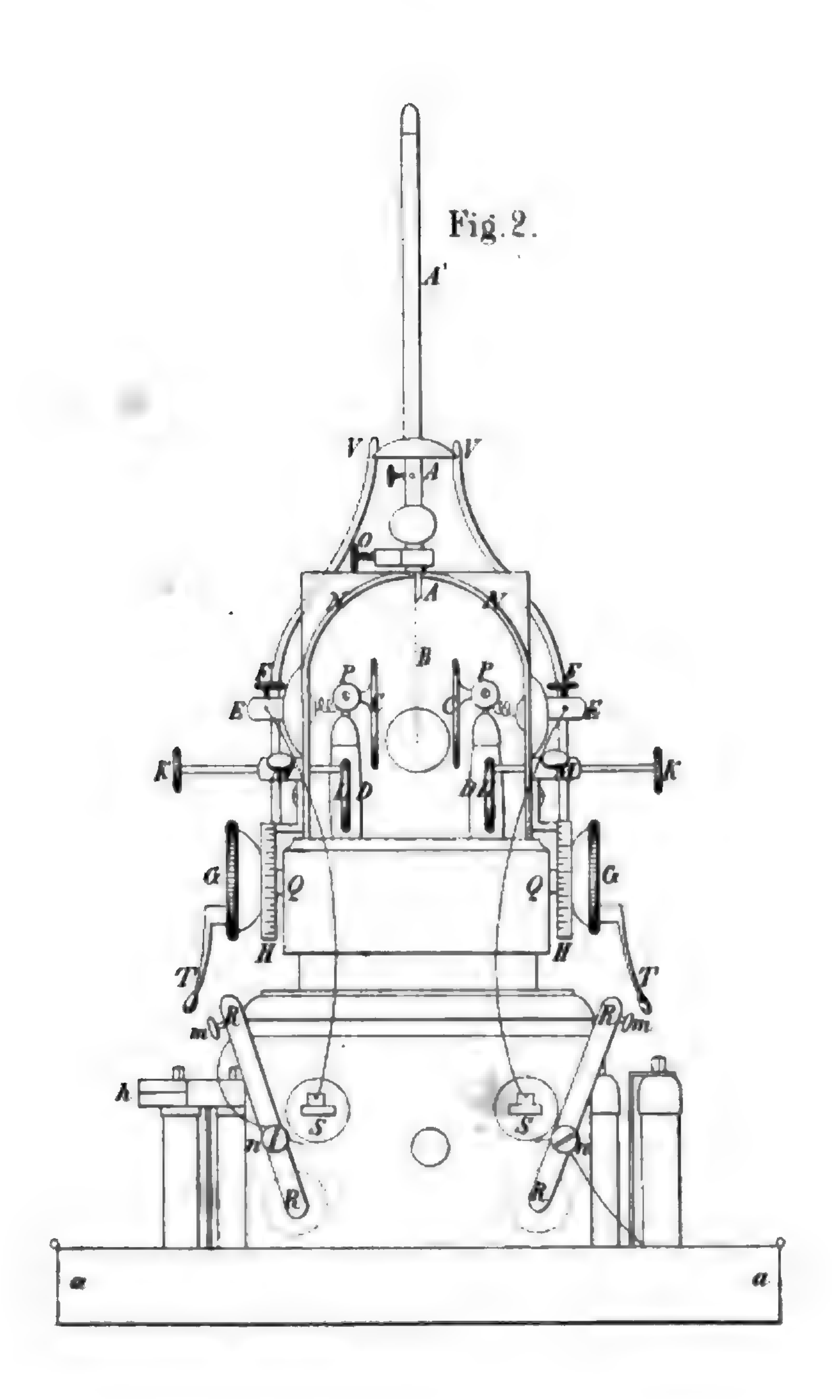
Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

# Inhalt.



Taf. I.






Leyser. del.

**VIERTER BAND:** Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe.
Zweiter Band. Mit 19 Tafeln. 1855. Preis 6 Thlr. 20 Ngr.

Inhalt:

M. W. DROBISCH, über musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 1 Thlr.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit XVIII Tafeln. 1852. 1 Thlr. 10 Ngr.

P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 1 Thlr.

—— —— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2 + r'^2 - 2rr'$ (cos $U$ cos $U'$ + sin $U$ sin $U'$ cos $J$). 1854. 1 Thlr.

O. SCHLÖMILCH, über die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 8 Ngr.

—————— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 16 Ngr.

P. A. HANSEN, die Theorie des Aequatoreals. 1855. 24 Ngr.

C. F. NAUMANN, über die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 10 Ngr.

A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. 1855. 20 Ngr.

**FÜNFTER BAND:** Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe.
Dritter Band.

Hiervon ist bis jetzt erschienen:

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 12 Ngr.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 1 Thlr. 20 Ngr.

R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 16 Ngr.

H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 24 Ngr.

W. G. HANKEL, Electrische Untersuchungen. Erste Abhandlung über die Messung der atmosphärischen Electricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 2 Thlr.

---

# SITZUNGSBERICHTE.

## KLEINERE ABHANDLUNGEN.

**BERICHTE** über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Erster Band. Aus den Jahren 1846 und 1847. Mit Kupfern. gr. 8. 12 Hefte.

—— Zweiter Band. Aus dem Jahre 1848. Mit Kupfern. gr. 8. 6 Hefte.

Vom Jahre 1849 an sind die Berichte der beiden Classen getrennt erschienen.

—— Mathematisch-physische Classe. 1849, 3 Hfte. 1850, 3 Hfte. 1851, 2 Hfte. 1852, 2 Hfte. 1853, 3 Hfte. 1854, 3 Hfte. 1855, 2 Hfte. 1856, 1 Heft.

—— Philologisch-historische Classe. 1849, 5 Hfte. 1850, 4 Hfte. 1851, 5 Hfte. 1852, 4 Hfte. 1853, 5 Hfte. 1854, 6 Hfte. 1855, 4 Hefte. 1856, 1. 2. Heft.

Jedes Heft der Berichte ist einzeln zu dem Preise von 10 Ngr. zu haben.

Aus den Berichten besonders abgedruckt:

Das Edict Diocletians de pretiis rerum venalium. Herausgegeben von *Th. Mommsen*. Mit Nachträgen. 1852. 14 Ngr.

M. Valerius Probus de notis antiquis. Herausgegeben von *Th. Mommsen*. 1853. 10 Ngr.

*Leipzig*, *October* 1856.

S. Hirzel.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

# BEITRÄGE

ZUR

# KENNTNISS DER GEFÄSSKRYPTOGAMEN

VON

WILHELM HOFMEISTER.

## II.

# III.

## UEBER ENTWICKELUNG UND BAU DER VEGETATIONSORGANE DER FARRNKRAEUTER.

Die zwei gemeinsten Farrn der deutschen Wälder vertreten die Endpunkte der langen Reihe mannichfaltiger Formen der umfangreichsten Familie der Gefässkryptogamen. Pteris aquilina bietet eines der reinsten Beispiele eines Farrnkrauts mit kriechendem Stamme, zweizeiliger Wedelstellung und entschiedenster Neigung zur Gabeltheilung der Endknospe. Ihr ähnlich verhält sich die grosse Mehrzahl baumbewohnender Farrn der heissen Zone. Aspidium filix mas dagegen bildet einen (der Anlage nach) senkrecht aufstrebenden Stamm, in Tracht, Wedelstellung und Gefässbündelvertheilung wesentlich übereinstimmend mit den Baumfarrn der Tropen. — Die nachstehenden Erörterungen werden von der Entwickelungsgeschichte der beiden Genannten ausgehen.

### 1. Die Keimung.

Die erste Stufe dieser Entwickelung, die Entstehung des Embryo, unterscheidet sich bei beiden in keinem irgend erheblichen Punkte, wie sie denn überhaupt, soweit die zahlreichen Beobachtungen reichen, bei allen Polypodiaceen in jedem irgend wesentlichen Stücke übereinstimmt: bei Pteris, Polypodium und Platycerium wie bei Aspidium, Asplenium und Ceratopteris. Der Bau des reifen, zur Empfängniss bereiten Archegonium ist überall der gleiche; eine minder wichtige Verschiedenheit des Entwickelungsganges waltet darin ob, dass[1]) der den Hals des Archegonium durchziehende Kanal bei Pteris aquilina, Ceratopteris thalictroïdes z. B. durch Auseinandertreten der vier den Hals

1) Wie ich schon früher besprach: Vergleichende Untersuchungen, S. 81.

zusammen setzenden Zellreihen, bei Aspidium filix mas dagegen durch Verflüssigung eines axilen, fünften Stranges von Zellen gebildet zu werden pflegt (T. XXIV f. 2); Ausnahmen von der häufigeren beider Entwickelungsweisen finden sich bei jeder dieser Arten. Der wichtigste Vorgang im Leben des Archegonium, die Bildung des Keimbläschens, erfolgt durchweges auf gleiche Weise. Bei der ersten Anlegung des Archegonium theilt sich eine der Zellen des Prothallium durch eine ihrer freien Aussenfläche parallele Wand. (In der grossen Mehrzahl der Fälle gehört diese Zelle der unteren Fläche des Prothallium an, und liegt hinter der Einbuchtung des Vorderrands desselben auf dem dort massig entwickelten Parenchympolster. In dicht gedrängten Rasen aufgerichtet wachsende Prothallien der verschiedensten Arten entwickeln auf beiden Flächen Archegonien. Bei Ceratopteris thalictroïdes entstehen, analog der ungewöhnlichen Stellung der sonderbaren Antheridien[1]), am nämlichen Prothallium mehrere Archegonien hervorbringende Gewebepolster hinter Einbuchtungen des Prothallienrandes.) Die innere beider Zellen wird zur Centralzelle des Archegonium; aus den Theilungen der äusseren entwickelt sich dessen Halstheil (T. V f. 1)[2]). In diesem Grundzuge

1) Vgl. Mercklin, Beobachtungen am Prothallium der Farrnkr. Petersburg 1850.

2) Henfrey hat mich missverstanden, indem er es für meine Ansicht hält (Transact. Linn. Soc. V. XXI, p. 134), die Centralzelle des Archegonium differenzire sich erst nach Ausbildung des Halstheils. Meine Abbildung des Längsdurchschnitts eines noch in der Entwickelung begriffenen Archegonium (Vergleichende Unters. T. XVII f. 6) widerspricht dem entschieden. Dagegen war meine damals ausgesprochene Angabe irrig, die erste Theilung der Mutterzelle des Archegonium sei die durch eine schräge, die freie Aussenfläche schneidende Wand. Diese Auffassung beruhte auf der Betrachtung junger Archegonien ausschliesslich von der Fläche, welche Art des Beobachtens die erste Theilung der Mutterzelle des Halstheils für die erste Vermehrung der Anfangszelle des Archegonium selbst mich nehmen liess. — In Betreff der von Henfrey gegebenen Darstellung des Baues der Antheridienwand aus einer hohlcylindrischen und einer Deckelzelle (a. a. O. p. 121), eine Ansicht, die weit von der der deutschen Botaniker abweicht, ist unbedingt zuzugeben, dass sowohl der Reife nahe, als entleerte Antheridien die Berührungsflächen der mehreren Zellen, welche nach Schachts und meiner Ansicht den die centrale Zelle umhüllenden Cylindermantel zusammen setzen, in den meisten Fällen nicht erkennen lassen. An sehr jungen Antheridien dagegen glaube ich mich wiederholt von der Richtigkeit meiner früheren Angaben überzeugt zu haben. Nach so beschaffenen Antheridien muss man lange suchen; offenbar werden die ersten Entwickelungsstufen des Organs sehr rasch zurückgelegt, während die Ausbildung der Samenfäden verhältnissmässig langsam vor sich geht. Dass die bis zum Verschwinden des Lumens gehende Zusammendrückung der Hüllzellen die seitlichen Gränzen derselben für immer verwische, ist wohl denkbar.

der Archegonienentwickelung stimmen sämmtliche Gefässkryptogamen überein. Ueberall ist es die Nachkommenschaft der äusseren Theilhälfte einer der Oberflächezellen des jungen Prothallium, welche den auf die Schwesterzelle jener, die Centralzelle des Archegonium, zuführenden Kanal begränzt. — Schon frühe, noch vor vollendeter Ausbildung des Archegonienhalses, tritt in der oberen Wölbung der Centralzelle ein freier Kern auf, um welchen sehr bald eine sphärische, der Scheitelwölbung angeschmiegte, freie Zelle sich bildet (T. V f. 2). Sie ist das Keimbläschen. Während seines Auftretens, und noch einige Zeit nachher, bleibt der primäre Kern der Centralzelle (die ich fortan als Embryosack bezeichnen werde) unverändert. Während des (durch Auseinandertreten der Scheitelzellen erfolgenden) Aufbrechens des Archegonienhalses verschwindet er (T. V f. 3). Jetzt wird die Membran der Scheitelwölbung des Embryosacks erweicht. Gelinder Druck treibt nicht nur den Schleim, welcher den Halskanal erfüllt, aus dessen Mündung als wurmförmige, schnell aufquellende Masse hervor (ein Theil dieses Schleims tritt beim Aufbrechen des Archegonium freiwillig aus; die Scheitelzellen desselben werden sichtlich durch den Druck des anschwellenden Inhalts des Kanals aus einander gedrängt), sondern auch ein Theil des Inhalts des Embryosacks lässt sich allmälig in und durch den Halskanal treiben, ohne dass diese Wanderung so plötzlich erfolgte, als der Austritt des Zelleninhalts durch den Riss einer auf Druck nach Widerstand geborstenen Wand es bedingen würde.

Die Samenfäden gelangen in den Kanal des Archegonienhalses, durchlaufen denselben und treten endlich ins Innere des Embryosacks, die erweichte Membran der Scheitelregion desselben durchbohrend. Hier bewegen sie sich noch einige Zeit, das nahe ihrer Eintrittsstelle der Innenwand des Embryosacks angeschmiegte Keimbläschen munter umspielend (T. V f. 4)[1]. Unmittelbar nach Ankunft von Samenfäden

1) Eine in den Sitzungsberichten der k. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. gegebene Mittheilung mit einigen Zusätzen wiederholend, erwähne ich hier des Ganges der Untersuchungen, auf welchen obige Angaben beruhen. — Bei dichter Aussaat von Farrnsporen entwickeln sich die aufkeimenden Prothallien sehr ungleichzeitig. Die zuerst sich entfaltenden, zuerst nur Antheridien, später solche und Archegonien neben einander, in vorgerücktem Alter endlich nur noch Archegonien entwickelnd, sind unter beträchtlichem Wachsthum schon auf dieser letzten Stufe angelangt, wenn die später hervorgesprossten Prothallien, von der Beschattung durch die vorausgeeilten in der Entwickelung noch aufgehaltenen, dicht mit Antheridien bedeckt sind. Hält man jetzt

im Embryosacke schliesst sich die Innenmündung des Halskanals durch quere Streckung der sie begränzenden Zellen. Dieser Vorgang ist die erste sichtbare Folge der Befruchtung; an fehlschlagenden Archegonien bleibt der Halskanal offen. Hier nehmen seine Wände durchweges, und auch die des Embryosacks tiefbraune Farbe an. Bei befruchteten Archegonien erstreckt diese Färbung sich im Halskanal nur soweit abwärts, als dieser sich nicht schliesst. Gleich nach dem Verschluss des unteren Endes des Halskanals, während lebhafte Vermehrung der dem Embryosack angränzenden Zellen eintritt, wächst das befruchtete Keimbläschen

die Aussaat einige Tage lang ziemlich trocken, und giebt dann plötzlich reichlich Wasser (nicht nöthig, dass dies durch Aufgiessen von oben geschehe — ein Verfahren, welches die Farrnzüchter bekanntlich streng vermeiden; — es genügt, den Topf mit der Aussaat einige Zeit lang in ein grösseres Gefäss mit Wasser einzutauchen, dessen Spiegel nicht ganz an die Oberfläche der Erde im Scherben reicht. Die Haarröhrenanziehung und Thaubildung führen dann den Prothallien hinreichend Feuchtigkeit zu), so werden gleichzeitig Massen von Antheridien zur Entleerung von Samenfäden, eine grosse Zahl von Archegonien zum Aufbrechen gebracht. Nach einer oder zwei Stunden findet man die Flächen der grösseren, Archegonien tragenden Prothallien fast bedeckt mit theils sich bewegenden, theils zur Ruhe gelangten Samenfäden. Bei rascher Untersuchung zarter Längsschnitte durch den parenchymatischen Theil solcher Prothallien unter 200- bis 300facher scharfer Vergrösserung erblickt man bisweilen in den ihrer ganzen Länge nach blos gelegten Archegonien Samenfäden. So fand ich, wie die Abbildung zeigt, ihrer drei in lebhafter Bewegung im Embryosack eines Archegonium von Aspidium filix mas; hier trat das Aufhören ihrer Bewegungen erst sieben Minuten nach Beginn der Beobachtung ein, und war begleitet (vermuthlich bedingt) vom Gerinnen der eiweissartigen Stoffe des Zelleninhalts. Bei dem nämlichen Farrn noch zweimal, ferner bei Gymnogramme calamelanos, Pteris aquilina habe ich einen in Bewegung begriffenen Samenfaden im Embryosacke erblickt; bei den genannten Arten, ferner bei Asplenium septentrionale und filix femina, neben dem bereits etwas herangewachsenen Keimbläschen bewegungslose Körper beobachtet, deren Form der von Samenfäden entsprach; endlich bei Aspidium filix mas und bei Pteris aquilina wiederholt schwärmende Samenfäden im Halskanal geöffneter Archegonien angetroffen, wo ihre Bewegungen während der Beobachtung endeten. — Ich habe noch hinzuzufügen, dass diese meine Untersuchungen, ursprünglich und zunächst auf Ermittelung der Zellenfolge der Embryonen gerichtet, ungemein zahlreich waren. An einem in Längsschnitte zerlegten Prothallium, cultivirt wie vorstehend berichtet, wird man höchstens drei oder vier oben aufgebrochene Archegonien finden; je im dreissigsten vielleicht nur Samenfäden, oft auch ganz vergebens nach solchen suchen. — Die Einwürfe, welche Wigand (Botanische Unters. S. 61) auch nach vorläufiger Veröffentlichung dieser meiner Beobachtungen gegen die Ansicht noch erhoben hat, dass Samenfäden der Farrn vor Entstehung eines Embryo in das zu befruchtende Archegonium dringen, glaube ich mit Schweigen übergehen zu können.

bis zur Grösse des Sackes heran. Noch ehe es diese erreicht, pflegen in seinem Innern zwei secundäre Kerne an der Stelle des verschwundenen primären aufzutreten (T. V f. 5). Die erste das Keimbläschen theilende Scheidewand aber wird erst dann gebildet, wenn jenes den Embryosack völlig ausgefüllt hat. Diese Wand steht zur Längslinie des Prothallium rechtwinklig, zur Fläche desselben fast senkrecht, von einem auf derselben errichteten Perpendikel divergirt sie nach unten und vorn, der Einbuchtung des Prothallium zu (*a. b* in T. I f. 1ᵇ, 3ᵇ; T. V f. 6ᵇ, 7ᵇ). Bald nachher entsteht eine schräge Scheidewand in jeder der zwei Zellen, in welche das Keimbläschen sich theilte; in der hinteren eine ab- und rückwärts, in der vorderen eine auf- und vorwärts geneigte. Der junge Embryo besteht jetzt aus vier Zellen von Form von Kugelausschnitten, die in eine durch die Längslinie des Prothallium gelegte Vertikalebene fallen (T. I f. 1). In den Neigungswinkeln der neu gebildeten Wände zeigen unsere beiden Arten eine specifische Differenz. Der obere Winkel, unter welchem die in der vorderen Zelle neu entstandene Wand mit der älteren zusammen trifft (T. V f. 6ᵇ, 7ᵇ, *b. c*), ist bei Aspidium filix mas weit geöffnet; fast ein rechter; der untere Winkel der Theilungswand in der hinteren Zelle ist sehr spitz (T. V f. 6ᵇ, 7ᵇ, *a. d*). Bei Pteris aquilina ist dies Verhältniss gerade umgekehrt (T. I f. 1ᵇ u. 3ᵇ *a. d* u. *b. c*). Damit steht ein Unterschied der weiteren Entwickelung im Zusammenhange. Beiden Arten ist gemeinsam, dass aus einer der vier Zellen — der unteren der vorderen zwei — die Stammknospe und der erste Wedel sich bilden (T. I f. 1, 3, *a. c*; T. V f. 6, 7 *a. c*); dass aus der Vermehrung einer zweiten jener vier Zellen die erste Wurzel hervor geht. Aber bei Aspidium filix mas liegt die Mutterzelle der Wurzel (*b. d* der Figuren T. V f. 6, 7) der des Stammes gegenüber, bei Pteris aquilina zur Seite (*a. d* der Figuren T. I f. 1, 3). Aus fortgesetzten Theilungen der der Archegonienmündung fernsten der vier Zellen entwickelt sich bei Aspidium die primäre, abortirende Achse des Embryo fast ausschliesslich: der fussförmige Anhang, mittelst dessen die junge Farrnpflanze im Prothallium fest sitzt (nur einige wenige Zellen der Wurzelanlage nehmen Theil am Aufbau dieses „Fusses", T. V f. 7). Bei Pteris ist es die Nachkommenschaft der beiden der Archegonienöffnung fernsten Zellen, welche dieses, hier weit umfangreichere Organ zusammen setzt (T. I f. 3). Die vierte, unter der Einmündung des Archegonium gelegene Zelle des jungen

Embryo vermehrt auch bei Aspidium sich noch ferner, doch nur schwach. Ihre Nachkommenschaft tritt nicht als gesonderter Theil der Keimpflanze hervor, sondern geht ein in die Bildung der Rindenstelle zwischen der Rückseite des ersten Wedels und der ersten Wurzel (T. V f. 8).

Die nämliche Anordnung der ersten vier Zellen des Embryo kommt allen in der Keimung beobachteten Gefässkryptogamen zu. Sie findet sich in gleicher Weise bei den Rhizocarpeen[1], den Equisetaceen[2], bei Isoëtes[3]; auch die Stellung der ersten Zellen des am unteren Ende des Embryoträgers von Selaginella auftretenden Rudiments der Keimpflanze stimmt mit ihr überein[4]. In allen diesen Fällen hat die Vermehrung der untersten, der Archegonienmündung abgewendeten der vier Zellen den Hauptantheil an der Bildung der primären, blattlosen Achse; eine der seitlichen Zellen entwickelt die unbegränzt sich entfaltende Hauptachse der Pflanze[5]; eine dritte die erste Wurzel, wenn überhaupt eine solche am Embryo auftritt (bekanntlich ist Salvinia überhaupt wurzellos; Selaginella entsendet nicht früher als nach der ersten Gabelung des Stängels aus dieser die erste Wurzel). Es spricht in diesem durchgreifenden Verhältniss eine so tiefe Verschiedenheit der Gefässkryptogamen von den Monokotyledonen sich aus, dass ihm gegenüber die auffallenden Aehnlichkeiten der Keimpflanzen der Najadeen und Gräser mit denen der Gefässkryptogamen, besonders derer mit chlorophylllosem Prothallium, Aehnlichkeiten, auf welche ich früher eine Vergleichung der Organe beider zu gründen suchte[6], als unwesentliche Aeusserlichkeiten erscheinen.

1) So bei Pilularia globulifera, T. XXI f. 11, 12 meiner vergleichenden Untersuchungen. Auch bei Salvinia natans werden wir im Laufe dieser Mittheilungen der nämlichen Erscheinung begegnen.

2) T. XVIII f. 1, 4ᵃ des vorhergehenden Bandes dieser Abhandlungen.

3) T. II f. 21 desselben Bandes.

4) Vergleichende Untersuchungen T. XXIV f. 18.

5) Namentlich bei Salvinia und Selaginella ist dieses Verhältniss ungemein klar.

6) Berliner botanische Zeitung X. Jahrg. (1852), Sp. 144. Dass das Scutellum der Gräser und der Zostera kein Blatt, sondern eine Wucherung der Achse sei, dafür ist die Beschaffenheit des Embryo von Ruppia und die Verwandtschaft zwischen dieser Pflanze und Potamogeton einerseits, Zostera und Najas andererseits maassgebend. Bei Ruppia, wie auch bei Gräsern (Hordeum, Bromus mollis) habe ich seither davon mich überzeugt, dass die Zellengruppe, welche später die von der Coleoptile umscheidete Terminalknospe darstellt, von der Terminalzelle des wenigzelligen Embryokügelchens

Die Vermehrung der Anfangszelle des seitlichen Hauptsprosses eilt derjenigen der Mutterzelle der primären Achse zunächst beträchtlich voraus. Das Gleiche gilt, wenn auch in minderem Grade, von der Anfangszelle der ersten Wurzel. Beide theilen sich durch wechselnd nach verschiedenen Richtungen geneigte Scheidewände und zwar — wie es

abstammt, dass sie nur in Folge einseitiger Entwickelung des Scutellum später mehr oder weniger seitenständig erscheint. Bei Zostera dürfte die sonderbare Art der Entwickelung des Mantels (Cotyledon der Autoren) die Feststellung der gleichen Entwickelungsgeschichte bis zur Unmöglichkeit erschweren. — Ich vergewisserte mich ebenfalls durch Reihen directer Beobachtungen, dass auch die scheinbar laterale Stellung der Stammknospe am Embryo (beziehendlich an der Keimpflanze) von Aroïdeen, Orchideen (besonders klares Beispiel, vergleiche die in Irmisch's Biologie der Orchideen S. 82 mitgetheilten Beobachtungen), Liliaceen, Juncaceen und Alismaceen ihren Grund nur in der seitlichen Ablenkung durch die rasche Entwickelung des Cotyledon hat. Untersuchungen der Keimung vieler Pflanzen aus den verschiedensten Familien der Monokotyledonen, deren Veröffentlichung mein Freund Irmisch vorbereitet, werden zeigen, wie überraschend weit verbreitet auch in dieser Klasse des Gewächsreichs die Entwickelung des Radicularendes des Embryo zur ächten, der Nahrungsaufnahme dienenden Wurzel ist: eine zweite Thatsache, welche dem Vergleiche der Keimung der Gefässkryptogamen mit der der Monokotyledonen den Halt raubt.

Wigand's Angaben über Anordnung der ersten Zellen des Embryokügelchens der Farrn (dessen botanische Untersuchungen S. 53) widersprechen entschieden meiner früheren Darstellung (meine vergleichende Unters. S. 82) und der im Obigen gegebenen weiteren Ausführung derselben. Er giebt an, das befruchtete Keimbläschen theile sich zuerst durch eine der Fläche des Prothallium parallele Wand. Aber seine Abbildungen (a. a. O. T. II f. 11, 12, 17) zeigen Archegonien mit geschlossenem Scheitel, also nothwendig unbefruchtet. Die vermeintliche eine (untere) Zelle des Embryo ist der Embryosack, die zweite vermuthlich die erweiterte unterste Zelle des den Hals durchziehenden Stranges. Fehlt somit jenem Widerspruche auch die thatsächliche Grundlage, so will ich doch nicht die Möglichkeit in Abrede stellen, dass bei bisher noch nicht darauf untersuchten Arten die erste Theilungswand des befruchteten Keimbläschens dem Parallelismus mit der Fläche des Prothallium sich sehr nähern könne. Dieser Punkt ist ein sehr unwesentlicher; die nächste Theilung der beiden Schwesterzellen würde doch das von mir als durchgreifendes betrachtete Verhältniss herbeiführen. Wenn aber Wigand ferner behauptet: das scheine allgemein, dass auf späterer Entwickelungsstufe des Embryokügelchens die meisten Zellen desselben um eine (oder mehrere) Zellen in der Mitte concentrisch geordnet seien, so ist dem gegenüber sehr zu betonen, dass die erste dieser Alternativen, die Lagerung um eine centrale Zelle, eben nur scheinbar ist. Vielmehr muss es als allgemeinste Regel ausgesprochen werden, dass bei höheren Gewächsen (Muscineen, Gefässkryptogamen und Phanerogamen) nirgends in dem Bau vegetativer Organe die concentrische Anordnung von Zellen um eine centrale Zelle oder eine axile Zellenreihe vorkommt, sondern dass das ideale Centrum, die ideale Längsachse vegetativer Theile solcher Pflanzen allerwärts in die Berührungskanten von Zellen fällt.

scheint — in der beide Arten scharf unterscheidenden Weise, nach welcher an der weiter heran gewachsenen Pflanze die Vermehrung der Zellen ersten Grades vor sich geht. (Ich erkannte bei Aspidium filix mas die in der Scheitelansicht dreiseitige, bei Pteris aquilina die zweischneidige Form der Gipfelzelle des Hauptsprosses nach etwa ihrer dritten Theilung.) Schon nach dem ersten Umgange von Theilungen (die bei Pteris beide, bei Aspidium nur die eine der drei mit ihren Längswänden im Profil sichtbar sind: vergleiche die Erklärung zu T. I f. 3ᵇ, T. V f. 6ᵇ, 7ᵇ) hält die Zelle ersten Grades des Stammes in weiterer Vermehrung inne; eine um so rascher verlaufende Folge von Theilungen beginnt in ihrer, nach der Archegonienmündung hin angränzenden, abgetrennten Theilhälfte (Zelle zweiten Grades). Diese ist die Anfangszelle des Wedels.

Die Deutung derjenigen Theilhälfte der Anfangszelle des Hauptsprosses, welche der Anfangszelle der primären, fehlschlagenden Achse angränzt, als Zelle I. Grades beruht wesentlich darauf, dass diese Zelle späterhin, bei weiterer Entwickelung der Keimpflanze, als Scheitelzelle des Stammes sich erweist. Würde man den näher liegenden Weg der Bestimmung der Dignität der Zellen einschlagen: diejenige als Zelle I. Grades zu betrachten, deren successive Theilungen nicht nur zunächst, sondern auch in der ursprünglichen Richtung sich fortsetzen, so müsste zweifellos die Anfangszelle des Stamms in Bezug auf die des Wedels für secundär erachtet werden, eine Ansicht, die als Begründung der Theorie von Entstehung des Farrnstamms aus verwachsenden Wedelstrünken sich gelten zu machen versuchen könnte [1]. Da aber nur wenige Gewächse eine so deutliche Endknospe zeigen, um die und unter welcher die appendiculären Organe entstehen, wie die Farrn wenn erwachsen, so wird hier wie bei den ähnlichen Verhältnissen monokotyledoner Embryonen, unbedenklich der Rückschluss von später eintretenden Zuständen aus Platz zu greifen haben.

Die Zellenfolge des ersten Wedels stimmt im Wesentlichen mit der späterer überein, bei den beiden Arten, die wir zunächst im Auge haben, ist sie somit beträchtlich verschieden. Das aber ist ihnen, wie

1) Solche Betrachtungen mögen u. A. auch Nägeli bewogen haben, den Farrn den beblätterten Stamm abzusprechen (Zeitschrift für wissensch. Botanik, Heft 3 u. 4, S. 148); auch Hanstein's Auffassung des Farrnstamms (Linnaea 1848) ruht auf diesem Grunde.

allen bisher beobachteten Polypodiaceen überhaupt gemeinsam, dass die Fläche des ersten Wedels in der Anlage der des Prothallium parallel ist. — Die Anfangszelle der Wurzel theilt sich zuvörderst durch ihren Nachbarzellen zugekehrte Wandungen; zweimal durch gegenüberstehende, zu einander concave, bei Pteris aquilina, so dass die Zelle ihre ursprüngliche zweischneidige Form behält; dreimal durch von einander um 60° divergirende ebene Wände, so dass die Zelle die Gestalt einer dreiseitigen Pyramide mit gewölbter Grundfläche erhält (T. V f. 6). Jetzt tritt in beiden Fällen eine der Sehne der Aussenwölbung parallele Wand auf (T. I f. 1. T. V f. 7). Die durch sie abgetrennte flache Zelle ist die erste Anlage der Wurzelhaube, deren äusserste kappenförmige Zellschicht durch die Vermehrung dieser Zelle gebildet werden wird. Fortan liegt die Zelle ersten Grades der Wurzel rings von Zellgewebe umschlossen. Ihre fernere Vermehrung geschieht durch in der nämlichen Reihenfolge sich wiederholende Theilungen.

Ihrer Stellung nach ist die erste Wurzel der Farrnkeimpflanze eine adventive, in nichts von den späteren Beiwurzeln der erwachsenen Pflanze unterschieden. — Gegen diese, schon vor längerer Zeit [1]) von mir ausgesprochene Deutung der ersten Wurzel der Gefässkryptogamen überhaupt trat neuerdings Wigand auf. Der erste Theil seiner Einwendungen besteht hauptsächlich in der, durch Gründe nicht belegten Vermuthung: der fussförmige Theil der Keimpflanze (nach meiner Bezeichnung deren primäre Achse) verwachse nicht allein mit dem Prothallium, sondern wachse „vielleicht" nach hinten zu zur Wurzel aus. Wigand meint ferner, „ich verkenne die Natur der nach unten und hinten gerichteten Anschwellung der Keimanlage, welche als unzweifelhafte Anlage der ersten Wedelwurzel, meiner eigenen Darstellung gemäss, nicht in Folge einer Durchbrechung nach Art der Adventivwurzeln entstehe." Diese Aeusserung fordert einige Worte über die Unterscheidung von Haupt- und Nebenwurzeln im Allgemeinen. Unsere Vorstellungen von Hauptwurzeln ruhen lediglich auf der Beobachtung, dass der Theil des Embryo der Dikotyledonen unterhalb der Ansatzstelle der Keimblätter, abwärts sich verlängernd zur Wurzel wird; und zwar in der Mehrzahl der Fälle dieser Theil der Pflanze allein, — dass im normalen Verlaufe des Lebens hier kein oberhalb der Kotyledonen gele-

1) Berliner botanische Zeitung 1849, Sp. 797.

gener Theil Wurzeln entsendet. Genau genommen beginnt die Wurzel nun keineswegs dicht unter der Einfügung der Kotyledonen, sondern zwischen dieser Stelle und ihr ist das, durch sein eigenthümliches Verhalten beim Perenniren nicht weniger Gewächse merkwürdige, kotyledonare Stengelglied zu unterscheiden, das Stämmchen des Embryo im reinsten Sinne, la tigelle, nach der Keimung als hypokotylische Achse von Irmisch, als collet von Glos bezeichnet. Der Ursprungsort der Wurzel, das untere Ende des Stämmchens ist durch directe Beobachtung zwar mühsam, aber sicher zu bestimmen als der Punkt, an welchem im Hinterende des sehr jungen Embryo die eigenthümliche Zellenvermehrungsweise der Wurzel beginnt. Ob nun das Würzelchen des Keimpflänzchens als unmittelbare Fortsetzung des Stämmchens nach unten erscheint, wie bei der Mehrzahl der Dikotyledonen, der Minderzahl der Monokotyledonen (Juncus, Allium, Paris, z. B.); — oder ob es aus dem Innern des unteren Endes des Embryo hervorbricht, wie bei Palmen und Loranthaceen, — dies hängt lediglich davon ab, ob die Ursprungsstätte, der Zellbildungsheerd der Wurzel dem Hinterende des Embryo näher oder ferner liegt. In beiden Fällen ist die Wurzel Hauptwurzel. Von ihr unterscheidet sich eine Adventivwurzel nur dadurch, dass ihre Längsachse nicht in die Verlängerung derjenigen des Embryo fällt, sondern mit dieser einen weit geöffneten Winkel bildet. So haben z. B. die Orchideen, die Fluvialen, namentlich auch (wie Irmisch treffend bemerkt) die Gräser keine Radicula, sondern durchweges nur Nebenwurzeln. Es beruht hier ebenfalls nur auf der mehr oder minder oberflächlichen Lage des Entstehungsortes der Nebenwurzeln, ob ihre Aussenfläche in die Rindenschicht des Pflanzentheils, welchem sie abstammen, so allmälig übergehen, wie etwa die Wurzel einer keimenden Erbse in deren Stämmchen; oder ob sie, die äusseren Zellenlagen der Rinde durchbohrend, diese als Ringwall ihrer Durchbruchsstelle aufwerfen. Das Fehlen dieser die Basis der Adventivwurzeln umscheidenden Ringsäume, der Coleorhizen, ist durchaus nicht selten: man vergleiche Irmisch's Bemerkungen über die Wurzeln von Neotta nidus avis[1]). Die Farrn mit kriechendem Stamme zeigen fast sämmtlich, die mit aufrechtem häufig die gleiche Erscheinung. — Dass alle Wurzeläste, die von Hauptwurzeln ebensogut als die von Nebenwurzeln, von der Aus-

1) Biologie der Orchideen, S. 43.

senfläche von Gefässbündeln aus sich bilden, ausnahmslos also Rinde zu durchbrechen haben, ist allbekannt. Nur deshalb werden hier in der Regel keine Coleorhizen sichtbar, weil (ähnlich wie in den Fällen oberflächlicher Adventivwurzelbildung an Achsentheilen) die Anlegung des Wurzelastes meist in der frühen Jugend der Wurzelachse erfolgt. Die Rinde dieser wird von jenem noch während des Jugendzustandes ihrer Zellen, noch vor Beendigung ihres Dickewachsthums durchbohrt; die sofortige Verwachsung der in Berührung kommenden Zellen von Wurzel und Wurzelast verwischt jede Spur des allmäligen Hindurchdrängens.

Bei Vergleich der Theile von Embryonen der Gefässkryptogamen mit den Organen phanerogamer Embryonen muss nothwendig die Lage der ersteren in Archegonium, als gleichbedeutend mit der Richtung der letzteren im Embryosack, zur Richtschnur genommen werden: es ist vorauszusetzen, dass die Längsachse des Embryo mit der des Archegonium zusammen falle. Deutlicher noch als bei Farrn und Schafthalmen ist die Analogie des der Archegonienmündung zugewendeten Endes des Embryo mit dem Radicularende des phanerogamen bei Salvinia und Pilularia, vor allem aber bei der einen Embryoträger entwickelnden Selaginella. Dies zugegeben ist die Deutung der Anlagen zum beblätterten Stamm und zur Wurzel als in Bezug auf die Längsachse des Embryo seitliche Sprossungen die einzig mögliche. — Beschaffenheit und Entwickelungsgeschichte der an Farrnkräutern später auftretenden Nebenwurzeln stimmte in allen Punkten mit denen der ersten überein.

Während der ersten Theilungen der Anfangszellen von Stamm, Wedel und Wurzel vermehrten sich auch die beiden anderen der ursprünglichen vier Zellen des Embryo durch das Auftreten schräge gestellter Längs- und Querwände (T. I f. 3, T. V f. 6), so dass der Embryo im Ganzen Kugelform behält. Nur die Anlage des ersten Wedels erscheint schon früh als vorgezogene Spitze.

Von der Zeit an, da die Anfangszelle der Wurzel durch Bildung der ersten Zelle der Wurzelhaube nach aussen hin sich abgränzt, treten die Zellen der Oberfläche der primären Achse, und auch die nächstbenachbarten der in Entwickelung begriffenen Wurzel in einigen Zusammenhang mit den angränzenden Zellen des Prothallium [1]). Es er-

1) Vergleiche Mohl, in Wagner's Handwörterbuch der Physiol. Bd. IV, S. 279.

folgt eine vollständige Verwachsung der einander zugewendeten Aussenflächen von Zellen, welche auf blos mechanischem Wege nicht mehr aufzuheben ist. Fortan haftet der bisher freie, leicht aus der zur Höhlung der erweiterten Centralzelle des Archegonium herausfallende Embryo fest im Prothallium. Die sich berührenden Zellen beider bleiben ziemlich eben; das Haften des Embryo wird nicht gefördert durch Einrichtungen, wie sie bei dem analogen Vorgange der Einpfropfung der Moosfrucht in die Achse der Mutterpflanze sich finden: das Auswachsen der Basilarzelle der Fruchtanlage zu einem wurzelhaar-ähnlichen Schlauche, der beim Eindringen in das Gewebe des Stängels sich krümmt (so bei vielen Jungermannieen); oder die Entwickelung ähnlicher Gebilde aus sämmtlichen Zellen der breiten schwach convexen unteren Fläche der jungen Frucht von Anthoceros [1]). Vom Zeitpunkte eingetretener Verwachsung an theilen sich die dem Prothallium anhaftenden Zellen des Embryo, durch wiederholtes Auftreten querer Wände, in Gruppen fast tafelförmiger Tochterzellen. So wird die spätere (auf Zellendehnung beruhende) nicht unbeträchtliche Längsstreckung der primären Achse des Embryo vorbereitet.

Kurze Einwirkung concentrirter Schwefelsäure lockert die Verbindung zwischen Prothallium und Embryo. Löset man jetzt den letzteren heraus, so erscheint die Aussenfläche seiner primären Achse von einer Gallerthülle umgeben, welche radiale Streifung erkennen lässt: der aufgelockerte Kitt, welcher Embryo und Prothallium verklebte. Die Umrisse der Zellen des Letzteren sind auf ihm durch ein Netz leistenartiger Erhabenheiten aufs Schärfste ausgeprägt.

Das Wachsthum des Embryo wird begleitet von einer lebhaften Vermehrung der dem befruchteten Archegonium angränzenden Zellen des Prothallium, die — nicht allein auf die unmittelbaren Nachbarinnen der Archegonien-Centralzelle sich beschränkend — zur Entstehung eines der Unterseite des Prothallium angesetzten, weit vorspringenden zelligen Höckers führt, welcher den Embryo einschliesst. Der Umfang dieses Auswuchses pflegt bei Pteris aquilina besonders beträchtlich zu sein. Die Massenzunahme dieses Zellgewebes hält in der Regel so voll-

1) Dieses Verhältniss tritt hier erst spät ein, nach dem Hervorbrechen der Frucht aus der Frons, und nach dem, T. II f. 4 meiner vergleichenden Untersuchungen abgebildeten Zustande.

ständig Schritt mit der des Embryo, dass der sich erweiternde Hohlraum von diesem fortwährend aufs Genaueste ausgefüllt wird. Dass aber nicht etwa der durch den schwellenden Embryo auf die Seitenwände der Archegonien-Centralzelle ausgeübte Druck es ist, welcher die Vermehrung der benachbarten Zellen des Prothallium hervorruft und bedingt; — dies wird augenscheinlich durch Ausnahmefälle kümmerlichen Wachsthums des Embryo, wie sie nicht allein bei vielen Gefässkryptogamen, sondern auch bei Moosen beobachtet sind [1]. Der Embryo, wahrscheinlich in Folge schwächlicher Befruchtung langsam sich entwickelnd, füllt die zur weiten Höhle erweiterte Centralzelle des Archegonium nur zum kleinen Theile aus; — beobachtet bei Befruchtung zweier Archegonien desselben Prothallium von Pteris aquilina und Aspidium filix mas am minder entwickelten der beiden Archegonien (T. I f. 2); ferner bei Salvinia natans und bei Pilularia globulifera.

Mit der Anlegung des ersten Wedels und der ersten Wurzel endet die Uebereinstimmung in der Entwickelung verschiedener Farrnkraut-Arten. Fassen wir zunächst die Weiterentfaltung der Pteris aquilina ins Auge.

### Pteris aquilina, L.

Die in der Zelle ersten Grades des ersten Wedels des Adlerfarrn auftretenden Theilungswände sind mit ihren Flächen dem Scheitelpunkte des Stammes zugekehrt [2]. Eine durch die Längsachse des Stammes und des Wedels gelegte Ebene ist rechtwinklig zu den Seitenflächen der keilförmigen Scheitelzellen beider Organe (T. I f. 3 *b*). Schon sehr frühe, noch ehe das Längenwachsthum des ersten Wedels die den Embryo umhüllenden Zellschichten des Prothallium sprengt, treten in der Scheitelzelle des Wedels rechts und links von ihrer Mittellinie Wände auf, welche — zu ihrer Vorder- und Hinterwand rechtwinklig — die bis hieher keilför-

1) Von Gottsche bei Calypogeia Trichomanes, N. A. A. C. L. C. von mir bei Frullania dilatata, Targionia hypophylla, s. vergl. Unsers. S. 41, T. VII f. 26, T. XII f. 19, 20.

2) Dies gilt auch für alle folgenden Wedel nicht allein der Pteris aquilina, sondern auch anderer Arten derselben Gattung, auch solcher mit unvollständig dreizähliger Wedelstellung und dreiseitig „verkehrt“ pyramidaler Scheitelzelle der Endknospe, wie Pteris serrulata (vergl. Unters. T. XVII f. 20). Bei Polypodien und Aspidien dagegen ist das Verhältniss ein weit Anderes.

mig, einem Ausschnitte eines Ellipsoïds ähnlich gestaltete Zelle ersten Grades zu einem dreiseitigen, mit der Schneide nach unten gekehrten Prisma mit gewölbter Rückenfläche umformen. Das Längenwachsthum des Wedels wird auch fernerhin durch die Entstehung der Vorder- und Hinterwand der Zelle ersten Grades paralleler, gegen die Flächen des Wedels gekehrten Wände vermittelt. Ab und zu theilt sich aber die Scheitelzelle auch aufs Neue durch Längswände, welche auf den eben erwähnten senkrecht stehen, das Ende des jungen Wedels verbreiternd. Von da an setzen sich beide Formen der Theilung auch in die der Scheitelzelle benachbarten Randzellen des Wedels fort; aber mit in seitlicher Richtung abnehmender Intensität, weit oberhalb der Ansatzstelle des Wedels endend. Der Theil des Wedels oberhalb des Punktes, bis zu welchem hinab die Vermehrung der Randzellen sich erstreckt, wird zur Wedelspreite, der unterhalb desselben zum Wedelstiel. Die Zellenfolge der laubigen Theile der Farrnwedel hat somit viele Aehnlichkeit mit derjenigen der flachen Stängel der Marchantieen und Riccieen; doch ist stets nur eine Zelle ersten Grades vorhanden; nicht zwei.

Die Fiedertheilungen aller Grade der Wedelplatte der Pteris-Arten wie der übrigen Polypodiaceen beruhen auf ächter Gabelung des apicalen Vegetationspunktes. Bei Einleitung derselben theilt sich die Scheitelzelle durch eine mit der Mittellinie des Wedels zusammen fallende, auf dessen Flächen senkrechte Wand. Jede Tochterzelle wird, sofort oder nach vorherigem Auftreten gegen die Wedelflächen geneigter, zum Längenwachsthum des Wedels beitragender Wände durch eine der in die Längenlinie des Wedels fallende Wandung nahezu parallele getheilt (T. II f. 2). Die rechts, und die links gelegene dreiseitige Zelle jedes der beiden, die Mitte des Wedel-Vorderrandes einnehmenden Zellenpaare wird zum Heerde neuer Zellvermehrung, zur Zelle ersten Grades eines Fiederblatts des Wedels. Stets entwickelt eine um die andere der neuen Sprossungen sich kräftiger, abwechselnd also die nach rechts oder die nach links gerichtete Gabelung. Sie drängt die andere, schwächere zur Seite, so dass diese lateral erscheint. Aus dem steten Wechsel in der Richtung der minder kräftigen Gabelungen geht die fiederspaltige Gestalt des Farrnwedels hervor, dessen Abschnitte (wie bekannt) an keiner Art genau gegenüberstehen. Die Stellung der ersten seitlich abgedrängten Gabelung zur Mittelrippe scheint

bei keiner Art beständig, bei Pteris aquilina häufiger links, bei Aspidium filix mas häufiger rechts. Die Hauptabschnitte der Wedel aber sind in Bezug auf ihre ferneren Verzweigungen sehr regelmässig antidrom: an den Fiederabschnitten links der Wedelspindel steht der erste Abschnitt zweiten Grades, oder der erste Zahn des Bandes rechts; an den Fiederabschnitten an der rechten Seite des Wedels steht er links.

Von seiner Entstehung an wächst der Wedel auf seiner Rückseite stärker in die Dicke. Seine mathematische Längsachse fällt nicht zusammen mit der morphologischen, nicht in die Berührungsflächen der aus Vermehrung der Vorder- und der Rückenfläche des Wedels zugekehrter Zellen zweiten Grades entstandenen Zellencomplexe. Zu der Zeit, in welcher durch Verbreiterung der Wedelspitze dessen Platte angelegt wird, steigert sich auf der Rückenfläche des Wedels auch die Zellvermehrung in Richtung der Länge. Indem sie die auf der Vorderfläche stattfindende überwiegt, wird die Einrollung des Wedels vorbereitet und begonnen (T. II f. 1. — Zu vollständiger Ausführung gelangt sie durch die bald darauf eintretende Streckung der Zellen der Rückenfläche). — Gleichzeitig mit dem Beginn der Einrollung sondern sich durch Innehalten in der Quertheilung die axilen Längsreihen von Zellen aus, welche zum einfachen, Stiel und Mittelrippe der Spreite des Wedels durchziehenden Gefässbündel sich umbilden. Etwa vier Zellen des angränzenden Parenchyms kommen auf die Länge einer der Zellen der Gefässbündelanlage. Diese verläuft in der morphologischen Längsachse des jungen Wedels, dessen Vorderfläche nahe (T. II f. 1). Auf dem Querschnitt ist sie concav, nach vorn offen (T. II f. 18).

Während dieser Entwickelung des Wedels ist auch die erste Wurzel beträchtlich gewachsen. Ihre genau axile Gefässbündelanlage wird gleichzeitig mit der des Wedels sichtbar. Beide, in ihrer ganzen Breite unter der inzwischen zu einem Zellflügel entwickelten Endknospe zusammentreffend, stellen einen zusammenhängenden, wenig gebogenen Strang von Cambium dar, welchem jene scheinbar seitlich ansitzt.

Jetzt, während das Längenwachsthum von Wedel und Wurzel die den Embryo umschliessenden Zellschichten des Prothallium zerreisst, verlängern die Zellen auch der primären Achse sich nicht unbeträchtlich, so dass öfters die Keimpflanze wie auf einem kurzen Stiele getragen vom Prothallium entfernt wird — eine Erscheinung, die an den bei Salvinia normal eintretenden Vorgang erinnert. Die innersten, dem

Gefässbündel von Wedel und Wurzel benachbarten Zellen der primären Achse nehmen prosenchymatische Form an (T. II f. 1), und verholzen später zu Treppenzellen, so dass der Holzkörper des Keimpflänzchens einen in die primäre Achse reichenden, blind endenden kurzen Fortsatz erhält.

Das im Vergleich mit anderen Farrnkräutern rasche Wachsthum der Stammknospe, welches schon am umhüllten Embryo bemerklich war (T. I f. 4, 5), steigert sich noch nach dem Hervorbrechen desselben aus dem Prothallium; das Stammende wird zum ziemlich schlanken Kegel (T. II f. 1). Noch bevor in irgend einer Zelle der Gefässbündelanlagen der Keimpflanze Verdickungsschichten auftreten, wird der zweite Wedel angelegt. Er entspringt aus Vermehrung einer Zelle der Stammspitze, welche auf der dem Ansatzpunkte des ersten Wedels abgewendeten Seite derselben, um die Hälfte des Stängelumfangs von ihm entfernt, gelegen ist. Die Zellenvermehrung des zweiten und aller späteren Wedel folgt der nämlichen Regel wie die des ersten: sie beginnt durch die stetig sich wiederholende Theilung der Zelle ersten Grades mittelst dem Scheitelpunkte des Stammes wechselnd zu- und abgeneigter Wände. Nachdem der Stipes des Wedels vollständig angelegt ist, theilt sich die Scheitelzelle durch auf der Vorder- und Hinterfläche rechtwinklige Längswände; in allen Zellen des so verbreiterten Vorderrandes findet fortan Theilung durch abwechselnd gegen die obere und untere Wedelfläche geneigte Wände statt.

Ungefähr gleichzeitig mit dem zweiten Wedel erscheinen auf der Endknospe des Stamms zahlreiche zellige Haare, wie sie schon am ersten Wedel, wiewohl spärlicher auftraten. Ihrer Stellung und centripetalen Entwickelung nach — die Zellendehnung schreitet von der Spitze nach dem Grunde vor, dessen Zellen länger vermehrungsfähig bleiben — sind sie unzweifelhaft gleichbedeutend mit den Spreuschüppchen anderer Farrn, die ja auch anderwärts in Form einfacher Zellreihen ursprünglich auftreten [1]. Bei Pteris aquilina, Dicksonia rubiginosa, Balan-

1) Vergleichende Untersuchungen S. 87. Vielzellige Haare mit intercalarer Zellvermehrung, selbst in Richtung der Breite und Dicke, kommen hier und da auch an Blättern von Phanerogamen vor (z. B. Begonia, Kelch und Blumenkrone von Hibiscus Trionum). Die Ansicht Kunze's (vergl. Unters. S. 88), dass die, Wedeln von Trichomanes ähnlichen, Sprossungen am Grunde der Wedelstiele von Hemitelia capensis umgewandelte Spreuschuppen seien, finde ich bei eigener Untersuchung nicht begrün-

tium Karstenianum gelangen sie nicht über diesen ersten Entwickelungszustand hinaus.

Von Bildung des zweiten Wedels bis zur Anlegung des dritten nimmt das Längenwachsthum der Achse beträchtlich zu, wie es denn während der ganzen Lebensdauer der Pflanze, von Einflüssen äusserer Schädlichkeiten abgesehen, von Wedel zu Wedel sich steigert. Jetzt, wenn nicht schon vor Bildung des zweiten Wedels (ein ziemlich häufiger Fall, T. II f. 1), tritt eine Drehung des Stammes ein. Die Rückenfläche des ersten Wedels war (den jungen Stamm wagrecht gedacht) nach unten gekehrt; er war der Anlage nach parallel der Fläche des Prothallium [1]). Die Torsion der Achse lenkt die Richtung bisweilen schon des zweiten, jedenfalls des dritten Wedels um 90° von jener ab. Fortan stehen die Wedel den Seiten des kriechenden Stammes eingefügt, nach wie vor nach $^1/_2$ geordnet. Die Involutionsebene der knospenden Wedel (die Ebene, in welcher sämmtliche Windungen der eingerollten Blattfläche liegen; sie steht auf der Wedelspreite senkrecht) ist ursprünglich radial zur Stammachse. Bei dem raschen, der Entwickelung der Wedel weit voraus eilenden horizontalen Längenwachsthum des Stammes wird aber diese Ebene bald zur Achse rechtwinklig, so dass die Wedelflächen der Achse parallel stehen. Schon die Stiele der ersten Wedel zeigen die [2]), den Blattstielen ziemlich aller Farrnkräuter zukommende Erscheinung, dass den Seitenrändern des Wedelstiels entlang vorspringende Leisten lockeren Zellgewebes mit lufterfüllten Intercellularräumen verlaufen, die mit dem gleicher Art beschaffenen, im Uebrigen vom festen Rindengewebe umschlossenen Parenchym des Inneren zusammenhängen (T. III f. 10—12). Die nämliche Beschaffenheit zeigt auch der kriechende Stamm der Pteris aquilina (T. III f. 6, 7[b]), und die Stämme in ihrer Tracht ähnlicher ausländischer Farrn, namentlich der Dicksonien. Die seitlichen Leisten des Stammes gehen unmittelbar in die der Wedel über (T. III, f. 1).

Schon frühe zeigt sich an der Keimpflanze die vorzeitige starke

det. Somit fällt der Hauptgrund, der mich bestimmte, die Spreuschuppen für Blätter, in Folge davon die Wedel für blattähnliche Zweige zu halten. Die Spreuschuppen sind nur eine Form der Behaarung, freilich eine sehr entwickelte, da sie häufig (bei Platycerium z. B.) Chlorophyllkörper enthalten.

1) Selbstverständlich ist bei dieser Bezeichnung der Wedelrichtung auf die secundäre Aufwärtskrümmung des Wedelstiels zum Licht keine Beziehung genommen.

2) Von Karsten hervorgehobene: Vegetationsorgane der Palmen, S. 129.

Entwickelung der peripherischen Zellschichten des Stängels in der unmittelbaren Umgebung seiner Endknospe, welche später von bestimmendem Einflusse auf Gestalt und Lage der Stammspitze wird. Bereits nach Entwickelung des dritten Wedels erscheint sie dem im Dickenwachsthum voraus eilenden Rindengewebe des nächstjüngeren Stammtheiles eingesenkt (T. II f. 5).

Der innere Bau des jungen Stammes ist, gleich dem ersten des Wedels, sehr einfach. Von der Vereinigungsstelle des Gefässbündels des ersten Wedels und der ersten Wurzel aus entwickelt sich ein das Stämmchen durchziehendes centrales Gefässbündel (T. II f. 4, 5), auf dem Querschnitt von tief und eng seitlich eingebuchteter Halbmondform (T. III f. 6), von welchem aus die Umformung von in die neu gebildeten Wedel hinein sich ziehenden Stränge von Zellgewebe zu Gefässbündeln anhebt, und an dessen Aussenfläche die Entwickelung neuer Adventivwurzeln beginnt (T. II f. 5). Die Richtung der zweiten und der nächstfolgenden Wurzel divergirt um 90° von einer durch den ersten Wedel und die Längsachse des Stamms gelegten Ebene (T. II f. 5). Die späteren Wurzeln zeigen keine Spur dieser regelmässigen Anordnung.

Nach der Bildung von sieben bis neun Wedeln gabelt sich der Stängel durch Theilung seines Vegetationspunktes. Beide Gabeläste nehmen an Dicke rasch und bedeutend zu; beide ziemlich gleichmässig. Der erste Wedel jedes derselben pflegt rechts zu stehen (T. II f. 9, 10). Von jetzt ab wird der Gefässbündelverlauf des Stammes zusammengesetzter. Die seitliche Oeffnung des centralen Gefässbündels vergrössert sich (T. II f. 7). Bald wird die obere Hälfte desselben von der unteren getrennt, indem bei Verlängerung des Gefassbündels vor der convexen Stelle desselben das Gewebe der Stammknospe parenchymatisch bleibt. Der Stamm hat jetzt zwei, der Achse parallele flache Gefässbündel (T. II f. 8), die ab und zu in dünnere, bald wieder zusammentretende Gabeläste sich spalten (T. III f. 8*). Wenn die Länge der Gabelsprossen etwa 3 Zoll, ihr Querdurchmesser ungefähr 2 Linien erreicht hat, zweigen von den beiden grossen Gefässbündeln näher der Rinde verlaufende schwächere Bündel sich ab, deren oberstes über den axilen Bündeln verlaufendes sich etwas stärker, jenen fast gleich in die Breite entwickelt (T. II f. 11, 12). Die Rindengefässbündel anastomosiren in der Nähe der Einfügungsstelle jedes Wedels, und bilden so ein hohlcylindrisches Netz langgezogener Maschen. Aber nirgends im Stamme sind

Verbindungsäste zwischen ihnen und den axilen Bündeln vorhanden. Diese verlaufen im kriechenden Stängel völlig isolirt; nur ihre in die Wedel eingetretenen Abzweigungen werden innerhalb des Wedelstiels von Verästelungen der in denselben eingetretenen Rindengefässbündel erreicht. Wurzeln entspringen fortan nur von den Rindengefässbündeln aus.

Die Stämme völlig erwachsener Pflanzen zeigen im Wesentlichen die gleiche Vertheilung der Gefässbündel. Die Zahl der peripherischen steigt bis auf zwölf. Die beiden obersten derselben treten auf dem grössten Theile ihres Verlaufes zu einer fortgesetzten Verschmelzung zusammen, und stellen so ein breites Bündel dar, welches mit den beiden primären, axilen in der nämlichen Verticalebene liegt. Zwei diesen primären Gefässbündeln ungefähr parallele Zellenmassen, zwischen diesen und den peripherischen Gefässbündeln gelegen, verholzen stark nach Art von Bastzellen. Ihre sehr verdickten, von Tüpfelkanälen durchzogenen Wandungen färben sich durch und durch braun (auf dünnen Schnitten schön goldgelb, in Masse gesehen fast schwarz). So erscheint schon dem blossen Auge die axile Region des Stammes von der Rinde scharf getrennt durch eine dicke, harte Gefässbündelscheide, die nur zu jeder der beiden Seiten, den äusserlichen Längsleisten des Stammes parallel, eine spaltenähnliche Längsöffnung besitzt (T. III f. 6). Manchmal schliesst sich durch einseitige Verschmelzung der beiden Hälften der Gefässbündelscheide die eine dieser Spalten. Die obere Hälfte der Gefässbündelscheide ist ziemlich plan, die untere hat die Form einer Rinne. Während der Umformung der parenchymatischen Zellen des im Knospenzustande befindlichen Stammendes zu Bastzellen scheiden zwischen den Wänden derselben, in kleinen unregelmässig umgränzten Intercellularräumen, Luftblasen sich aus, die bei Beginn der Wandverdickung wieder verschwinden.

Die äussersten Zellschichten der Rinde färben sich ebenfalls tief braun, doch ohne prosenchymatisch zu werden, noch ihre Wände erheblich zu verdicken. Von dieser, bis zu $1/8$ Linie Tiefe reichenden dunkeln Färbung der Rindenschicht sind nur die zu den seitlichen Längsleisten gehenden Gewebspartieen ausgenommen. Sie bleiben, gleich dem Parenchym des Stamminneren, blendendweiss, stärkemehlhaltig, die Zwischezellräume mit Luft erfüllt. Hier und da in diesem Gewebe, bisweilen auch in der braun werdenden, äusseren Rindenschicht, for-

men in spindelförmige Gruppen vereinigte Zellen zu dickwandigen Bastzellen sich um, denen der Gefässbündelscheide in allen Stücken ähnlich [1]).

Mit der Complication des Gefässbündelverlaufs im heranwachsenden Stamme steigt auch die in den Stielen der Wedel. Bis zum zwölften Wedel der Keimpflanze vereinigen sich, wie im ersten, die in ihn tretenden Gefässbündel zu einem einzigen, im Querschnitt hufeisenförmigen, dessen Oeffnung ursprünglich dem Scheitel der Stammknospe zugewendet, in Folge der raschen Längsentwickelung dieser und der Aufwärtskrümmung des Wedels später der Längsachse des Stammes parallel erscheint. Nach der Spaltung des primären und dem Auftreten von Rindengefässbündeln im Stamme treten in jedem Wedel Abzweigungen der beiden axilen Bündel, des über ihnen liegenden breiten und der übrigen Rindengefässbündel der betreffenden Längshälfte des Stammes (T. III f. 2ᵃ bis 2ᶜ). Auch die Gefässbündelscheide entsendet Fortsätze in den Wedelstiel: sowohl von der oberen als von der unteren Gruppe gebräunter Bastzellen aus dringt die nämliche Umwandlung des Gewebes der Längsachse des Wedels parallel vor (T. III f. 5. 10). Eine kurze Strecke oberhalb der Einfügung des Wedels vereinigen sich beide Längsstränge verholzenden Gewebes zu einem einzigen, auf dem Querschnitte von Gestalt eines liegenden *T*, dessen Querbalken den seitlichen Längsleisten des Wedels zugewendet ist (T. III f. 11, 12). Der nach hinten geöffnete Winkel desselben nimmt die Abzweigungen der beiden axilen, primären Bündel des Stängels auf, der vordere die des breiten, in der Scheitellinie des horizontalen Stängels verlaufenden Rindengefässbündels sowie die Aeste der ihm nächstbenachbarten cylindrischen Rindengefässbündel. Vor dem Querbalken des *T*, von ihm nach aussen, verlaufen die Bündel, welche die Rindenbündel unter der Wedeleinfügung entsendeten. Im untersten Theile des Wedelstiels, unterhalb der Vereinigungsstelle der Fortsätze der Gefässbündelscheide, anastomosiren alle diese Gefässbündel, auch in radialer Richtung; oberhalb dieses Punktes nur in Richtung der Tangente. Jedes der primären

1) Mohl will diese Zellen, wie auch die der Gefässbündelscheiden, nicht Bastzellen genannt wissen (Vermischte Schriften, S. 116). Ihm ist für Bastzellen deren Stellung zum Gefässbündel maassgebend. Die Uebereinstimmung in Form und Entwickelung der in Rede stehenden Zellen mit den Bastzellen der Phanerogamen ist aber vollständig. —

Gefässbündel schickt in den Wedel zwei verhältnissmässig dünne cylindrische Aeste (T. III f. 2^d, *). Alle vier treten bald zu einem breiten, nach hinten concaven Gefässbündel zusammen (T. III f. 11, 12). Zu einem ebensolchen Bündel vereinigen sich die von der vorderen Einbuchtung der *T*förmigen Masse brauner Zellen umfassten. Dies die Vertheilung der den Wedelstiel zusammensetzenden Gewebtheile, auf welcher die bekannte Adlerzeichnung schräger Durchschnitte beruht.

Zarte Längsschnitte durch die Endknospe des Stamms von Pteris aquilina lassen mit grosser Schärfe die Umwandlung von Zellen des ursprünglich gleichartig-parenchymatischen Gewebes in Gefäss- und Bastzellen erkennen. Die Untersuchung wird besonders begünstigt durch den schnurgeraden, der Achse parallelen Verlauf des inneren der beiden primären Gefässbündel. Je nachdem der Schnitt parallel der Erdoberfläche, durch die Längsleisten des kriechenden Stammes, oder zu dieser Richtung rechtwinklig geführt wird, erscheint die keilförmige den Scheitel der flach konischen, tief eingesenkten Endknospe einnehmende Zelle entweder an ihrer dreiseitigen Front- (T. IV, f. 5) oder vierseitigen Seitenansicht (T. IV, f. 4). Die trichterartige Einsenkung, deren Grund die Endknospe einnimmt, ist von oben und unten her stark zusammengedrückt. Dichtgestellte Spreuhaare bekleiden die Wände der Vertiefung. Die aufgerichteten Enden der Haare, aufs Engste aneinander gedrängt und durch erhärteten, von der Knospe[1]) ausgesonderten Schleim verklebt, verstopfen vollständig die Mündung des Trichters und schliessen die zarten, jugendlichen Theile auf seinem Grunde von der äusseren Luft ab. Das im Längenwachsthum begriffene Stängelende bohrt seinen Weg durch den zähesten Thonboden — bei uns der Lieblingsstandort der Pflanze — ohne Beschädigung der zarten Knospe im eingesenkten Scheitelpunkte.

Die deutlich in die Augen fallende Anordnung der Zellen zweiten Grades und ihrer Nachkommenschaft lässt die Entstehung der tiefen Einsenkung der Endknospe sofort erkennen. Die Zelle ersten Grades hat, wie aus der Vergleichung ihrer Scheitel-, Vorder- und Seitenansicht hervorgeht (T. IV f. 1—3, 5, 4) keilähnliche Gestalt. Sie ist von drei ge-

1) Wie von allen jugendlichen Geweben: Vergleichende Untersuchungen, S. 82, Anmerkung.

krümmten Ebenen begränzt: einem von zwei flachen Bögen eingeschlossenen Stücke einer Kugelfläche (die obere, freie Wand der Zelle), und zweien Abschnitten von Kegelmänteln (die Seitenwände) (T. IV f. 1[b]). Die in der Zelle auftretenden Theilungswände, abwechselnd der einen und der anderen, einfach gekrümmten Seitenfläche parallel, bilden Zellen zweiten Grades von Form des Fünftheils eines schräg gestutzten Hohlkegels (T. IV f. 1[b]). Diese theilen sich durch je einer ihrer schmalen Seitenflächen parallele Längswände (die von den Radien des Stängels stark divergiren) successiv in drei bis fünf der Zelle ersten Grades angränzende Zellen (T. IV f. 2[b], 3); eine Form der Vermehrung, von der bisweilen Abweichungen durch Anticipation der nächsten Entwickelungsstufe vorkommen (T. IV, f. 1): — die neugebildeten Zellen dann durch der Seitenfläche der Scheitelzelle parallele Wände nach und nach in je zwei, die vor der Mitte der Seiten der Scheitelzelle gelegenen früher, als die ihren Seitenkanten anliegenden. Die so gebildeten Zellen, an denen die Ausdehnung in Höhe und auch Breite (der Seitenfläche der Scheitelzelle parallel) die in Dicke weit übertrifft, theilen sich durch Querwände in niedrige, nahezu würfelige innere, und langgestreckte äussere Zellen mit freier Aussenwand (T. IV f. 4, 5). Dehnung und Vermehrung der Zellen jeder, einer Zelle II. Grades abstammenden Gruppe wiegt zunächst im unteren Theile und in querer Richtung beträchtlich vor. So in der Nachkommenschaft der jüngsten vier Zellen zweiten Grades, deren freie Aussenwände den conischen, innersten Theil der Stammknospe zusammen setzen (T. IV f. 4. 5.) Die Gränzlinien, welche jede solche Zellengruppe umschliessen, zeigen auf dem Längsschnitte des Stängels an der dessen Scheitel abgewendeten Seite stark ausspringende Winkel; die Seitenwände der die Aussenfläche der Stammknospe zusammen setzenden Zellen sind gegen deren Gipfel einwärts geneigt. — In den nächstälteren Zellengruppen kehrt die Richtung der plötzlich gesteigerten Zellenvermehrung sich um. Hier theilen sich die Zellen des Umfangs oft wiederholt durch Wandungen, welche den Sehnen der gewölbten Aussenwände parallel, auf deren Seitenwänden senkrecht stehen. Es ist dies ein Dickenwachsthum, eine Zunahme des Rindengewebes in der Richtung rechtwinklig zur Achse, das aber, in Folge der ungewöhnlichen Richtung der Zellen, in welchen es statt findet, vorerst scheinbar aufwärts geschieht. Die Knospe umgiebt sich mit einem hohen, engen Ringwalle. Mit besonderer Lebhaftigkeit wächst derselbe in Richtung

einer zu den Seitenleisten des Stamms rechtwinkligen Durchschnittsebene; hier werden die Innenwände des Walles senkrecht, selbst überhängend. Die Zellen desselben erscheinen in concentrisch schalige Schichten um den Mittelpunkt der Stammknospe geordnet.

Die während der Anlegung des Walles zunehmende Intensität der Zellenvermehrung in Richtung der Länge (in Richtung vom Scheitel der Stammknospe ihren Seiten entlang strahlig gezogener Linien) verwischt die in der Scheitelansicht der jüngsten Knospentheile wahrnehmbare Anordnung der Zellen in den Mittelpunkt der Knospe umschliessende Systeme flacher Bögen. An ihrer Stelle tritt die Ordnung in (strahlig erscheinende) Längsreihen deutlicher hervor, welche beruht auf der wiederholten Theilung der Zellen durch zur Aussenfläche rechtwinklige Wände, welche auf, durch die Achse des Stammes gelegten radialen Ebenen senkrecht sind.

Sehr nahe unter der Endknospe, etwa in dem von der achtjüngsten Zelle zweiten Grades abstammenden Zellencomplexe beginnt die Fortsetzung der beiden primären, axilen Gefässbündel vom übrigen Gewebe sich zu differenziren. Die Aussonderung der peripherischen Gefässbündel hebt der Stammspitze etwas ferner an. Beider Auftreten wird dadurch bedingt, dass in den Strängen von Zellen, welche zu Gefässbündeln sich umbilden, die in den Nachbargeweben fortdauernde Quertheilung abnimmt und aufhört, während die Längstheilung beschleunigt wird. Die Gefässbündelanlagen erscheinen somit als Streifen aus engen und langen Zellen im übrigen Gewebe, an dessen Zellen keine der drei Dimensionen merklich vorwiegt (T. IV f. 4, 5). Einzelne in Längsreihen geordnete Gefässbündelzellen erweitern sich sehr zeitig, gleich nach ihrer Entstehung durch Theilung der Zelle nächstälterer Generation. Sie wandeln sich später um in die Treppengefäss-Zellen, welche die Hauptmasse des fertigen Gefässbündels bilden. Zu Anfang mit horizontalen Querwänden auf einander gestellt, nehmen sie die ihnen bleibende Spindelform an, noch ehe auf ihren Innenwänden die ersten Spuren von Verdickungsschichten sich zeigen (T. III f. 15). Dieses erste Auftreten von Verdickungen der Wandung, als zarte Querstreifung derselben erscheinend, erfolgt noch während des Vorhandensein des wandständigen Zellenkerns und der von seiner Umgebung ausgehenden Stränge körnigen Schleimes (T. III f. 16), lange bevor das Längenwachsthum der Zelle endet.

Um vieles früher, als die ersten Spuren von Wandverdickungen der Treppengefässe werden in, gruppenweis zu zweien oder dreien beisammen stehenden enger, sehr zeitig Spindelform annehmender Zellen desselben Bündels in Schraubenlinien verlaufende Verdickungsschichten sichtbar. Man erkennt sehr deutlich, dass die Anlagerung des Spiralbandes vom unteren Ende der Zelle nach dem oberen allmälig vorschreitet (T. III f. 15). In jedem Gefässbündel bilden sich solche kleine Gruppen von Spiralgefässen: eine axile in den auf dem Querschnitt kreisförmigen; meistens drei in den breitgezogenen, eines im Mittelpunkte, die anderen in den Brennpunkten der einer Ellipse entfernt ähnlichen Figur des Querschnitts.

Die bedeutende Erweiterung der zu Treppengefässen werdenden Zellen des Gefässbündels drückt die engen prosenchymatischen Zellen zwischen ihnen zusammen, zum Theil bis zum endlichen völligen Verschwinden ihres Lumens. Der jüngste Theil eines Gefässbündels, der Endknospe so nahe genommen, dass nur in den Spiralgefässen Verdickungsschichten sich finden, zeigt ohne Ausnahme auf dem Querschnitt bedeutend mehr Zellen, als das nämliche Gefässbündel, nachdem seine Treppengefässe ausgebildet sind, etwa 1½ Linie der Endknospe ferner (T. III f. 13, 13[b]). Aehnliche Verhältnisse finden in den Gefässbündeln der Wedelstiele statt. Die zusammen gedrückten Zellen, soweit ihr Innenraum nicht vollständig obliterirte, ähneln auf dem Querschnitte auffällig den linsenförmigen Höhlen zwischen zweien Tüpfeln des Coniferenholzes (T. III f. 14 zwischen den beiden weiten Gefässen).

Der Verlauf des dem Mittelpunkte des Stammes nächsten Gefässbündels (des oberen der beiden primären) ist dicht unter der Knospe der Längsachse des Stängels fast genau parallel. Aber schon das andere der axilen, und mehr noch die Rindengefässbündel sind, in Folge des späten Eintritts von Längen- und Dickenwachsthum im Stamm-Inneren, stark einwärts gegen die Längsachse des Stammes gebogen, soweit sie innerhalb des vorzeitig entwickelten peripherischen Gewebes verlaufen. Diese Beugung beträgt an den Rindenbündeln in der Regel 90° (T. IV f. 5, 6); — ein Querschnitt durch die, oder dicht über der, Knospenspitze lässt die fast horizontal zu ihr verlaufenden Bündel als sternförmig (zu sechs bis acht) vereinigte lichte Streifen erscheinen (T. IV f. 2).

Bald nach dem Sichtbarwerden von Verdickungsschichten in den zu Treppengefässen erweiterten Zellen der axilen Bündel erfolgt eine so

beträchtliche Streckung der Zellen des Stamm-Inneren, dass dessen Missverhältniss zu den peripherischen Zellschichten aufgehoben wird. Der gebogene Theil der Rindengefässbündel richtet sich gerade, die axilen Zellen werden in ungefähr gleiche Höhe mit den ihnen gleich alten der Rinde gerückt, welche in der Entwickelung, besonders in der Verdickung der Zellen, wie sie in den peripherischen Gefässbündeln erkennbar ist, ihnen weit vorausgeschritten waren. Da das Innere des Stammes durch Dehnung seiner Zellen die durch stärkere Zellenvermehrung vorzeitig gewachsene Rinde einholt, sind jene um drei- bis viermal länger, als die peripherischen. Der Vorgang kann eine Ausstülpung der trichterförmigen Einsenkung um die Endknospe genannt werden. In ähnlicher Weise kommt er bei Isoëtes, bei Cycas, bei Mamillaria und anderwärts vor; aber durch die dichte Zusammendrängung appendiculärer Organe weit minder scharf ausgeprägt und übersichtlich.

Die Bildung neuer Wedel erfolgt ausnahmslos oberhalb der Ursprungsstelle der jüngsten Spreuhaare. Erst in einiger Entfernung von der Scheitelzelle der Stammspitze, durch etwa drei bis sechs Zellen von ihr getrennt, wird die Mutterzelle des Wedels durch leichte Erhebung über die flache Kegelebene der Knospe kenntlich (T. IV f. 3). Der erste Schritt zur Bildung eines Wedels ist aber sehr wahrscheinlich die ab und zu vorkommende Theilung einer vor kurzem gebildeten Zelle zweiten Grades durch eine gegen die Zelle ersten Grades gekehrte, schwach convexe Längswand, welche von der Zelle zweiten Grades eine Tochterzelle abtrennt, deren Form mit der der Stammscheitelzelle übereinstimmt (T. IV f. 1). Vom Stammende, dem es in Anordnung seiner Zellen sehr ähnelt, unterscheidet sich das Rudiment des Wedels durch grössere Steilheit, und das sehr frühe, wiewohl zunächst nur spärliche, Auftreten von Chlorophyll in seinen Zellen. Das Wachsthum des Wedels in Länge und Dicke ist vorerst sehr langsam. Die sich fort verlängernde Stammspitze lässt ihn bald zurück. Indem die vorzeitige Entwickelung ihres Rindengewebes auch an ihrer dem jungen Wedel zugewendeten Seite eintritt, schiebt sich zeitig in den Raum zwischen beiden die wallartige Erhebung des Stammumfanges in Nachbarschaft der Endknospe. Wedel und Stammende, beim Auftreten jenes von derselben Einsenkung der Rinde umschlossen, stehen jetzt jedes auf dem Grunde einer besonderen trichterförmigen Vertiefung. Ueber beiden ragen die Spitzen der ihre Wände bekleidenden Spreuhaare pinselförmig vor (T. III f. 8).

Während die Keimpflanze im ersten Jahre bis zu zwölf schmächtige und niedrige Wedel hervorbringt, deren Entfaltung eine stetig fortschreitende ist, braucht die, von langen Pausen wiederholt unterbrochene Entwickelung der (unter günstigen Verhältnissen über mannshohen) Wedel älterer Pflanzen mehrere Jahre. Es ist eine Regel, die nur durch plötzliche Aenderungen der äusseren Vegetationsbedingungen (durch Umpflügen des Waldbodens z. B.) scheinbare Ausnahmen erleidet, dass jeder Spross der erwachsenen Pflanze jährlich nur einen Wedel ans Licht empor sendet[1]). Neue Wedel entstehen gegen das Ende der von Anfang April bis October dauernden Vegetationsperiode. Im ersten Jahre entwickelt der Wedel sich nicht weiter, als dass er als niedriges, seitlich abgeplattetes grünliches Wärzchen von Zellgewebe, im Grunde einer von der Stammspitze höchstens eine Linie entfernten Einsenkung der Stammrinde erscheint. Während im nächsten Frühling (bis Ende Mai) der Stamm rasch um etwa einen Zoll sich verlängert, bildet sich der später braune Farbe annehmende Theil des Stiels des jungen Wedels: ein bis zwei Zoll hoher, durch starke Krümmung dicht an seiner Einfügungsstelle senkrecht aufgerichteter walziger Körper, dicht mit gelbweissen Spreuhaaren bekleidet (T. III f. 1). Durch deren Entfernung wird am Scheitel des jungen Wedels, auf seiner dem Stamme zugewendeten Seite, eine flache Rinne sichtbar, in der scharf eingefaltet die Anlage der Lamina liegt: eine etwa $1/8$ Linie lange, flache zwei bis drei Gabeläste zeigende Zellenmasse (T. III f. 9, 9[b]), die gegen Ende der zweiten Vegetationsperiode bis eine Linie Länge erreicht, und zehn bis zwölf wechselnd rechts und links abgelenkte Gabelungen macht. Die weitere Entwickelung des Wedels geht erst im Frühlinge des dritten Jahres vor sich, zu Ende Mai dessen er, zierlich eingerollt (Bischofstäbe nennt die jungen Wedel unser Landvolk) in allen seinen Theilen vollendet über der Erdoberfläche erscheint.

Nur von den Rindengefässbündeln des Stammes erwachsener Pflanzen aus (und zwar von den Vereinigungsstellen ihrer Maschen) entwickeln sich Wurzeln. Ihre Anlegung erfolgt dicht unter der Endknospe, da wo der Verlauf der Rindengefässbündel die Beugung einwärts zeigt (T. IV f. 6). Hier hebt in einer der äusseren Zellen des durchweges noch cambialen Bündels eine Zellvermehrung an, der gleich durch welche

1) Siehe A. Braun, Verjüngung, S. 63.

die erste Wurzel der Keimpflanze sich bildet. Wie dort, stehen die dreierlei Theilungswände der Zelle ersten Grades rechtwinklig zu einer durch die Längsachse des Stammes radial gelegten Ebene. Auf die Bildung einer, dem Gefässbündel, von dem aus die Wurzel sich entwickelt, zugewendeten, mit der Wurzel einen Winkel von beiläufig 30° bildenden Wand von Form des Drittels des Mantels eines gestutzten Kegels, folgt die Bildung einer entgegen gesetzt geneigten und gekrümmten Wandung, dieser das Entstehen einer zur Längsachse der Wurzel rechtwinkligen ziemlich planen Querwand, welche von den beiden vorhergehenden um etwa 60° divergirt. Die Gestalt der primären Zelle der Wurzel stimmt mit der der Scheitelzelle des Stammes überein; nur sind die Seitenwände jener stärker gekrümmt (T. IV f. 6$^{b}$, 7). Aus den Zellen zweiten Grades, welche durch Entstehung der Grundfläche der primären Zelle paralleler, planer Wände gebildet werden, entwickeln sich die durch stärkere Zellenvermehrung im Mittelpunkte nach aussen convex werdenden Schichten der Wurzelhaube. Aus der fortgesetzten Theilung der Zellen von Form des Drittels eines Hohlkegels entsteht der bleibende Haupttheil der Wurzel. Ursprünglich sind diese Zellen in paraboloïdische Schichten geordnet, welche in der einen Längshälfte der Wurzel um eine halbe Zellenlänge über die Schichten der anderen Wurzelhälfte vorgreifen. Schon in der Nachkommenschaft der drittältesten Zelle zweiten Grades wird indess diese symmetrische Anordnung in eine gleichartige umgewandelt, indem in sämmtlichen Zellen der Schicht den ursprünglichen Theilungswänden parallele Querwände auftreten (T. IV, f. 6$^{b}$). Die Art der Differenzirung und Ausbildung ihres axilen Gefässbündels, das (später durch Streckung sich ausgleichende) anfängliche Zurückbleiben desselben in der Längsentwickelung hinter dem Rindengewebe hat die Wurzel mit dem Stängel gemein.

Vom Gefässbündel der Wurzeln aus entspringen Wurzeläste, genau in gleicher Weise wie die Wurzeln von den Rindengefässbündeln des Stammes. Die Wurzeln zweiten Grades, wie auch deren (nicht häufig vorkommende) Verzweigungen, stehen zweizeilig.

Je höheres Alter ein Spross des Adlerfarrn erlangt — stamme er nun unmittelbar von einem Prothallium ab, oder von einer der später zu erwähnenden Brutknospen, oder sei er der eine Ast eines gegabelten Stammes — um so mehr neigt er zur Gabelung seiner Endknospe. Endlich unterbleibt, bei recht alten Individuen, an dem stärkere Entwicke-

lung erreichenden Gabelaste die Wedelbildung ganz und gar. Nur die schwächeren, wechselnd rechts und links stehenden Gabelsprossen bringen Wedel hervor; den ersten stets im Innenwinkel. Solche Pflanzen, welche an dem als Hauptachse erscheinenden Sympodium gar keine Wedel tragen, zeigen eine überaus rasche Entwickelung und reiche Bewurzelung des nackten, noch nicht gegabelten Endsprosses. Derartige unverästelte Endstücken von 6 bis 10 Zoll Länge sind nicht selten. An solchen schiebt der untere Theil des die Endknospe umgebenden Ringwalles lippenförmig sich vor, so dass diese auf die obere Fläche des mehr und mehr sich abplattenden Sprosses zu liegen kommt (T. III f. 7). Auch in solchen, unverästelten und wedellosen Sprossenden ist die Gefässbündelvertheilung genau übereinstimmend mit der wedeltragender Stämme (T. III f. 7[b]). Ein schlagender Beweis dafür, dass die Anordnung der Gefässbündel im Stamm nicht abhängig ist von der Stellung der appendiculären Organe, und der Zahl und Form der in diese eintretenden Bündel.

Die beiden breiten axilen Gefässbündel sind in jedem Gliede des Sympodium völlig unverästelt, bei jeder Gabelung geben sie in den schwächeren Spross starke Aeste ab, die in diesem die axilen Gefässbündel darstellen. Bis vier Fuss lange wedellose Sympodien sind mir vorgekommen. Die Enfernungen zwischen zwei Gabelungen sind sehr ungleich, offenbar abhängig von mehr oder minder reichlicher Ernährung. Die Gesammtverzweigung der Pflanze, insofern sie auf Gabelungen der Endknospen beruht, und die Stellung der Wedel an diesen Verzweigungen entsprechen völlig den Fiedertheilungen der Wedelplatte. Nur durch die Wachsthumsrichtung der aufwärts sich wendenden Wedel unterscheiden sich diese in ihren ersten Anfängen von den Gabelungen der Endknospe, der Zellenfolge nach nicht.

Knospen, aus denen neue Sprossen sich entwickeln können und meist auch entwickeln, treten bei Pteris aquilina nur am unteren Theile der Wedelstiele auf, bald tiefer bald höher; bisweilen so zeitig und der Einfügungstelle des Wedels so nahe, dass sie bei oberflächlicher Betrachtung dem Stamme anzusitzen scheinen [1]). Sie entstehen aus Ver-

1) Axillarknospen fehlen den Farrnkräutern durchaus. Ueber das häufige Vorkommen von Knospen am Wedelstiel bei tropischen Farrn vergleiche Karsten, Vegetationsorgane der Palmen, S. 124; — bei einheimischen Farrn die nächsten Abschnitte dieser Abhandlung.

mehrung einer der Zellen der freien Aussenfläche des sehr jungen Wedels, auf seinem Rücken oder an den Seitenkanten gelegen [1]); lange bevor die erste Anlage der Gefässbündel vom übrigen Gewebe sich sondert (T. II f. 14). Die Theilungen der Ursprungszelle des neuen Sprosses folgen der nämlichen Regel, wie die der Scheitelzelle der Mutterachse. Wenn die Entwickelung der Knospe langsam vor sich geht, schliesst sich das Rindengewebe über ihr fast völlig zusammen (T. II f. 15); genauere Untersuchung lässt aber auch dann stets den auf den Vegetationspunkt zuführenden Gang erkennen, der lediglich von verfilzten und verklebten Spreuhaaren verstopft ist (T. II f. 15[b]); verklebt durch Eintrocknen eines Theils des Schleimes, welchen auch diese Knospen des Adlerfarrn reichlich aussondern.

### Aspidium filix mas.

Die Anfangs-, weiterhin die Scheitelzellen des ersten und aller folgenden Wedel des Wurmfarrn, theilen sich durch wechselnd nach links und rechts, den Kanten des Wedels zu geneigte Wände; die Linie, in welcher jede neu entstehende Wand die nächst ältere schneidet, ist radial zur Stammachse. Soweit die zahlreichen Beobachtungen reichen, ist die erste solche in der Zelle ersten Grades auftretende Wand nach links [2]) geneigt, dem nächstälteren Wedel zugekehrt (T. V f. 11, 24). Diese Form der Theilung dauert bis zur vollendeten Anlegung des Wedelstiels. Mit dem Beginn der Bildung der Wedelspreite treten in der Zelle ersten, und den ihr nächsten Zellen zweiten Grades auch Wandungen auf, welche alternirend gegen die vordere und die hintere Wedelfläche geneigt sind. Dadurch wird die Anordnung der Zellen in den fortwachsenden Theilen des Wedels übereinstimmend mit der bei

---

1) Den Begriff der Adventivknospe so gefasst, dass sie aus der Vermehrung einer Zelle im Innern des Gewebes, einer cambialen Zelle eines Gefässbündels z. B. entstehe, würden die Brutknospen der Farrn keine Adventivknospen sein. Aber diese Bestimmung ist unzulässig eng; würde auch auf mehrere an Phanerogamen vorkommende Fälle keine Anwendung finden können.

2) Der Braun'schen Regel folgend (N. A. A. C. L. XV, I, S. 220), die Bezeichnungen rechts und links mit Bezugnahme auf die Entwickelungsrichtung des betreffenden organischen Körpers anzuwenden, nenne ich den Wedelrand den rechten, welcher — den Beobachter in die Längslinie des Wedels, das Gesicht der oberen Fläche zugewendet gedacht — zur rechten Hand sein würde. Dieser Wedelrand ist der vordere, der aufsteigenden Blattspirale zugekehrte.

Pteris aquilina (S. 615) beschriebenen. Auch die Art der Verzweigung der Wedelspreite ist die nämliche, wie dort (T. V f. 8).

Die Keimpflanze von Aspidium filix mas entwickelt ihren zweiten Wedel um ein Drittel des Stammumfanges vom ersten entfernt. Von der Verbindungsstelle der Gefässbündel des ersten Wedels und der ersten Wurzel aus bildet sich ein Gefässbündel, das nach kurzem Verlaufe in der Achse in den zweiten Wedel einbiegt (T. V f. 9). Von seinem im Stamme gelegenen Theile aus, ziemlich weit unter der Einfügungsstelle des zweiten Wedels, entwickelt sich die zweite Wurzel. Der dritte Wedel divergirt vom zweiten, der vierte vom dritten wiederum um 120° rechts, so dass der vierte senkrecht über den ersten zu stehen kommt. Von der Beugungsstelle des aus der Längsachse des Stämmchens in den zweiten und die folgenden Wedel abgehenden Gefässbündels entspringt ein Gefässbündel, das nach kurzem Verlaufe in der Stammachse in den nächstjüngeren Wedel abbiegt. Querschnitte des Stämmchens zeigen nur ein axiles Gefässbündel (T. V f. 12). Zwischen je zweien der ersten vier bis sechs Wedel ist der Stamm weit stärker in die Länge gestreckt, als zwischen zweien der späteren.

Oberhalb des fünften oder sechsten Wedels nimmt plötzlich der Stamm an Dicke beträchtlich zu. Dieses rasche Dickenwachsthum findet statt, während die nächstjüngeren, der siebente bis zehnte Wedel, im Knospenzustande verharren. Die Scheitelgegend des Stammes wird durch die starke und schnelle peripherische Entwickelung zu einer fast ebenen Fläche, in deren Mitte die äusserste Spitze des Stammes hervorragt (T. V. f. 10). Um sie stehen, spiralig geordnet, die jüngsten Wedel. Fortan bleibt dem Stammende diese Gestalt (T. V f. 23. T. VI, f. 4, 5).

Es beruht das Flachwerden der Endknospe darauf, dass je die oberflächlichen Zellen der kegelförmigen Zellenmasse durch den Sehnen der gewölbten freien Aussenwände parallele Wände oft wiederholt sich theilen, — eine Zellvermehrung, die von der Spitze des Kegels nach seiner Basis hin (wo sie plötzlich erlischt) stetig zunimmt und von einer im Verhältniss zur Zunahme des Kegelumfangs stehenden Zahl von Theilungen durch zur Stammachse radiale Längswände begleitet wird, — während die Theilung durch zu jenen chordalen Längswänden rechtwinklige Querwände verhältnissmässig selten erfolgt. So wächst die kegelförmige Endknospe aufwärts, indem unter ihrer ganzen

Aussenfläche neue, eine Schicht von Form eines nach der Basis hin dickeren Kegelmantels darstellende Zellen gebildet werden, während der Neigungswinkel des Kegels immer geringer wird. Spät erst, nach Anlegung mehrerer Cyclen von Wedeln, wird durch starke Streckung der Zellen des axilen Gewebes (begleitet von der Bildung von Querwänden in den peripherischen Zellen) das Längenwachsthum des Stammes soweit beschleunigt, dass es die vorzeitige Dickenzunahme überwiegt. Die Rindengegend wird durch die Längsdehnung der Stammmitte ausgestülpt, aus der Form eines ganz stumpfen Kegels in die eines Cylinders übergeführt: eine völlige Umkehrung des Wachsthums, bewirkt durch die veränderte Richtung der Dehnung und Vermehrung der Zellen. Der Vorgang (ein den Stämmen mit flacher Endknospe allgemein zukommender: z. B. Polytrichum, Dracaena) ist leichter an den schlanken Stammenden der Keimpflanzen und Brutknospen (T. VI f. 8) des Asp. filix mas, wie an denen des Aspl. filix femina zu beobachten, als an den gar zu dick werdenden Stämmen alter Individuen des Ersteren.

Nach der Dickenzunahme des Stämmchens der Keimpflanze geht die Anordnung der neu entstehenden Wedel aus der $1/3$- in die $3/8$Stellung über. Gleichzeitig wird die Vertheilung der Gefässbündel im Stamme eine andere. Von der Stelle aus, an welcher das zum letzten der nach $1/3$ stehenden Wedel verlaufende Gefässbündel sich seitlich wendet, sondern nach jedem der drei nächsten Wedel hin Stränge von später zu Gefässbündeln werdendem Cambium sich aus, die getrennt, der Längsachse des Stammes parallel verlaufen (T. V f. 10). Ein Querdurchschnitt des Stammes an dieser Stelle zeigt drei im Kreise stehende Gefässbündel (T. V f. 13).

Die zu allen folgenden Wedeln verlaufenden Gefässbündel werden bereits während des frühesten Knospenzustands der Wedel angelegt, indem von da aus, wo die zu den nächstbenachbarten beiden älteren Wedeln gehenden Gefässbündel zum Austritte aus dem Stamme sich seitlich wenden, zu dem jüngeren Wedel hin die Zellen des Knospengewebes zu Cambiumsträngen sich umbilden. Beide Anlagen von Gefässbündeln vereinigen sich dicht unter der Einfügungsstelle des jungen Wedels zu einem einzigen (T. V f. 16), das nach kurzem Verlaufe im Wedelstiele wieder in zwei sich spaltet (T. V f. 17, 18). Zum ersten Wedel verläuft ein Gefässbündel vom fünften und sechsten, zum neunten vom sechsten und siebenten Wedel aus, und so fort. Die Gefäss-

bündel des jungen Stammes stellen so in ihrer Gesammtheit ein röhriges Netz mit ziemlich weiten Maschen dar[1], von deren Winkeln aus einfache Gefässbündel zu den Wedeln abgehen. Ein Querdurchschnitt des Stämmchens eines etwa einjährigen Sämlings zeigt fünf ein Mark einschliessende Gefässbündel (T. V f. 14).

Im zweiten Jahre entwickelt die Pflanze sich weit kräftiger. Ihre Wedel erreichen bereits Fusslänge; die Anordnung derselben schreitet in der Regel[2] zur $^5/_{13}$Stellung vor. Fortan treten in jeden Wedelstiel mehrere Gefässbündel ein. Bis zu fünfen gehen an alten, kräftigen Individuen von der Gefässbündelschleife des Stammes ab, welche der Einfügung je eines Wedels entspricht. Das unterste, stärkste dieser Bündel, durch seinen Ursprung aus dem unteren Winkel der Gefässbündelschleife mit dem einzigen der Wedel der einjährigen Pflanze übereinstimmend, verläuft nahe der Rückenfläche des Wedelstiels, und theilt sich dicht über dessen Ansatz am Stamme, da wo die für Aspid. filix mas bezeichnende bauchige Anschwellung des Wedelstiels (T. VI f. 6) anhebt, in zwei. Ausschliesslich von diesen beiden stärksten Bündeln des Wedelstiels aus entwickeln ausgewachsene Pflanzen Wurzeln. Der Stamm, der im ersten Jahre der Keimpflanze alle Wurzeln entsendet, bringt später deren durchaus keine mehr hervor. — Zwei dünne Gefässbündel zweigen sich von den Seitenwinkeln jeder Gefässbündelschlinge des Stammes zum Eintritt in den Wedel ab; zwei etwas kräftigere wenig höher (T. VI f. 2). Beide Paare verlaufen den vorspringenden Längsleisten des Wedels entlang; jenes hinter, diese vor denselben (T. VI f. 7b). Innerhalb des Wedelstiels anastomosiren die Gefässbündel nicht selten. Hierauf beruht es, dass Querschnitte desselben bisweilen mehr als fünf Gefässbündel zeigen.

Die Gefässbündelvertheilung im Stamme bleibt bei dem Fortschreiten der Wedelstellung wesentlich die nämliche, nur dass selbstverständlich die Zahl der Schlingen sich vermehrt. Der erste Wedel eines Umlaufs erhält seine Gefässbündel nicht mehr vom sechsten und siebenten, sondern vom neunten und elften des vorhergehenden Umlaufs; der sechste Wedel vom ersten und dritten, der achte vom dritten und fünf-

1) Mohl, vermischte Schriften, S. 115.

2) Ausnahmen sind nicht selten, s. A. Braun, Ordnung der Schuppen der Tannenzapfen. N. A. A. C. L. N. C. XV, I, S. 278.

ten des nämlichen Umlaufs aus, u. s. f. Um es kürzer zu bezeichnen: die von rechts her zu neuen Wedeln tretenden Gefässbündel folgen (bei der normalen Rechtswindung der Wedelspirale) den dreizähligen Wedeln; die von links her zu jenen gehenden den fünfzähligen. Acht Gefässbündelmaschen, acht Querschnitte von Gefässbündeln fallen in eine rechtwinklig zur Achse durch den Stamm gelegte Ebene.

An erwachsenen Pflanzen des Wurmfarrns tritt mit vieler Schärfe eine Periodicität in der Entwickelung der Wedel hervor, die an dem einjährigen Sämling nicht wahrzunehmen ist. Jene zieht im Winter ein, dieser nicht. Die Zahl der in einem Frühling zur Entfaltung kommenden, von Ende Mai bis October sämmtlich gleichzeitig vegetirenden Wedel ist gewöhnlich 13, übereinstimmend mit der Zahl der Glieder eines Abschnitts der Wedelstellungsspirale. Ein ähnliches Verhältniss zeigt sich auch bei einigen anderen Farrn: bei Aspl. filix femina (wo die Wedelzahl 8 oder 13 zu sein pflegt), bei Asp. spinulosum (meist 8 Wedel sind gleichzeitig entwickelt), bei Aspl. Trichomanes (wie bei Asp. spinulosum). — Aehnlich wie bei Pteris aquilina werden die Wedel zwei Jahre vor ihrer Entfaltung angelegt. Im ersten Jahre bildet sich nur der Wedelstiel, und an den äussersten Wedeln des Cyclus etwa drei oder fünf Abschnitte der Spreite. Im zweiten Jahre wird diese an den im Frühjahr zuerst sich ausbreitenden in allen Theilen ausgebildet, nach der zweiten Winterruhe lediglich aufgerollt und entfaltet. Die jüngeren Wedel des nämlichen Jahrgangs folgen bis zum Juni schrittweis in der gleichen Entwickelung.

Die Anlegung der Gefässbündel geschieht in der Knospe selbst sehr kräftiger Exemplare schon vom fünftjüngsten Wedel an rückwärts, also weit oberhalb des Punktes, an welchem das Längenwachsthum des Stammes dasjenige in die Dicke zu überwiegen beginnt. So liegt denn das ganze System von Gefässbündelmaschen zunächst in einer fast wagrechten, sehr flach paraboloïdischen Ebene, dicht unter der Scheitelfläche des Stammes dieser nahezu parallel. Das Gewebe des Stammes unter- und innerhalb des Gefässbündelnetzes vermehrt die Zahl seiner Zellen nur dicht unter der Stammspitze; weiter abwärts tritt eine Dehnung der Zellen dieses Markes ein, deren Längsdurchmesser um das vier- bis fünffache, der Querdurchmesser auf das zwei- bis dreifache sich vergrössert. Lediglich durch diese, auf Zellendehnung beruhende Massenzunahme des Markes wird das Gefässbündelnetz Schritt für Schritt

gehoben und auf eine Cylinderfläche projicirt. Man überzeugt sich leicht durch Zählung der Zellen während und nach dem Uebergange des Netzes der Gefässbündelanlagen aus der paraboloïdischen in die Cylinderform, dass weder innerhalb des Markes, noch neben und zwischen den Gefässbündelanlagen eine nachträgliche, zur weiteren Verdickung des Stammes führende Neubildung von Parenchymzellen stattfindet. Nur vor den jugendlichsten Gefässbündelanlagen findet noch eine schwache Vermehrung des Rindengewebes durch Theilung der peripherischen Zellen statt.

Jede, durch in beliebig radialer Richtung durch die Längsachse des Stammes geführte Schnitte erhaltene Seitenansicht der Scheitelzelle seiner Endknospe ist ohne Ausnahme dreiseitig. Die gleiche Gestalt zeigt die Scheitelfläche derselben Zelle bei Betrachtung von oben. Ihre Gestalt ist demnach die einer umgekehrten dreiseitigen Pyramide mit gewölbter Scheitelfläche. Der Augenschein zeigt (T. V f. 19—22. T. VI f. 3), dass diese Zelle in stetiger Wiederholung durch nach drei Richtungen gekehrte Wände sich theilt, welche successiv einer der Seitenflächen zugewendet sind. Die Aufeinanderfolge dieser Theilungswände ist (soweit die sehr zahlreichen Beobachtungen reichen) rechts, seltener links umläufig, stets übereinstimmend mit der Spirale der Wedelstellung.

Noch in einem zweiten Punkte kann das Verhältniss der Scheitelzelle zu ihren Tochterzellen auf die Blattspirale bezogen werden. Die Scheitelansicht der Gipfelzelle älterer Individuen des Asp. filix mas stellt höchst selten ein gleichseitiges Dreieck dar. Eine der Seiten ist meist auffällig kürzer, als die beiden anderen, ziemlich gleich langen. Der Umriss der Scheitelfläche ist in der Regel der eines gleichschenkeligen Dreiecks; Abweichungen von dieser Form lassen sich mit Sicherheit auf die Verschiebungen zurück führen, welche die älteren Seitenflächen der Scheitelzelle durch das Wachsthum der ihr angränzenden secundären Zellen erleiden (T. V f. 19—22. T. VI f. 3. T. VII f. 1). Der eine Schenkel des Dreiecks wird gebildet von der oberen Kante der jüngsten, der andere Schenkel von derjenigen der ältesten Seitenwand der Endzelle; die Basis von der im Alter zwischen beiden stehenden Seitenwand.

Das Verhältniss der Länge dieser Basis zum jüngeren der beiden Schenkel ist in der grossen Mehrzahl der Fälle ein bestimmtes. Die nachstehenden Reihen von Messungen werden dies zeigen. Stets ist die jüngere der längeren Seitenwände der Scheitelzelle gemessen. Die Mes-

sungen geschahen zum kleineren Theile an den Scheitelzellen von Knospen, welche durch einen Querschnitt vom älteren Theile des Stammes getrennt, und einfach von anhängendem Schleime und deckenden Spreublättchen gesäubert worden waren: zum grösseren Theile aber an der durchsichtigen Haut, welche die freien Aussenwände der Oberfläche-Zellen der Knospe bilden. Diese Wände haben ungleich grössere Consistenz, als die des inneren Gewebes der Knospe; bei einiger Uebung im Präpariren unter dem Mikroskop ist es nicht schwer, aus der abgetrennten Endknospe das gesammte Parenchym des Inneren, die halbweichen Zellwände und Zelleninhalt, herauszuschälen, so dass man die Aussenwände als zusammenhängende, sanft gewölbte Membran (die unpassend so genannte Hüllhaut junger Pflanzentheile) übrig behält. Auf ihr zeichnen sich mit grösster Schärfe die Berührungskanten von innen ihr angesetzt gewesener Zellwände als schwach vorspringende Leisten. Derartige Objecte gestatten die schärfsten Messungen. — Jede der folgenden Angaben ist das Mittel aus wenigstens fünf Messungen, die unter sich nicht über einen halben Mikromillimeter differirten (1 M. M. M. = 0,001 Millim.)

### Maasse der Scheitelzellen von Farrnkräutern mit $^5/_{13}$ Stellung der Wedel.

| | | | Basis. | | Schenkel. | Verhältniss beider. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Asp. filix mas, | Windung | rechts | 33,6476 | M.M.M. | 47,1618 | 1 : 1,401 |
| ,, | ,, | ,, | 39,912 | ,, | 56,542 | 1 : 1,416 |
| ,, | ,, | ,, | 43,3104 | ,, | 61,0986 | 1 : 1,401 |
| ,, | ,, | ,, | 45,2312 | ,, | 63,7098 | 1 : 1,408 |
| ,, | ,, | ,, | 46,564 | ,, | 66,52 | 1 : 1,41 |
| ,, | ,, | ,, | 49,89 | ,, | 70,6773 | 1 : 1,416 |
| ,, | ,, | ,, | 51,8504 | ,, | 73,6386 | 1 : 1,42 |
| ,, | ,, | ,, | 52,859 | ,, | 75,0198 | 1 : 1,419 |
| ,, | ,, | ,, | 55,7116 | ,, | 78,593 | 1 : 1,41 |
| ,, | ,, | ,, | 55,7116 | ,, | 79,5336 | 1 : 1,427 |
| ,, | ,, | ,, | 55,9874 | ,, | 78,593 | 1 : 1,403 |
| ,, | ,, | ,, | 56,542 | ,, | 79,824 | 1 : 1,411 |
| Asp. spinulosum, | ,, | links | 36,6076 | ,, | 51,3022 | 1 : 1,401 |
| ,, | ,, | ,, | 40,1194 | ,, | 56,4582 | 1 : 1,406 |
| ,, | ,, | rechts | 43,0526 | ,, | 60,3246 | 1 : 1,401 |
| ,, | ,, | ,, | 43,0526 | ,, | 60,8408 | 1 : 1,413 |
| ,, | ,, | ,, | 44,0838 | ,, | 61,7421 | 1 : 1,4 |
| ,, | ,, | links | 52,0756 | ,, | 73,2152 | 1 : 1,407 |
| ,, | ,, | rechts | 52,6778 | ,, | 74,5487 | 1 : 1,401 |
| ,, | ,, | ,, | 52,9536 | ,, | 75,5692 | 1 : 1,428 |
| Aspl. filix fem. | ,, | ,, | 33,26 | ,, | 46,564 | 1 : 1,4 |
| | | | | | Im Mittel: | 1 : 1,4094 |

Diese Proportion der Basis zu den Schenkeln ist die eines gleichschenkligen Dreiecks mit einem Scheitelwinkel von 69° 13′ 53,3″ und Scheitelwinkeln von 41° 32′ 13,4″, Winkeln, die sehr denen eines Dreiecks sich nähern, welches begränzt wird durch die Chorden zweier Bögen von 138° 27′ 41,53″ — zweier einander folgenden Schritte, der kleinen Divergenz der Wedelstellung $^{5}/_{13}$, — und der die freien Endpunkte dieser Sehnen verbindenden Linie (sie ist die Chorde eines Bogens von 83° 4′ 36,94″, der Differenz der grossen und kleinen Divergenz der $^{5}/_{13}$Stellung). Der Scheitelwinkel eines solchen Dreiecks beträgt 41° 32′ 18,47″; jeder der Seitenwinkel 69° 13′ 50,765″; — das Verhältniss der Basis zu einem der Schenkel ist 1 : 1,4067. Die Unterschiede dieser Zahlen von den beobachteten Maassen fallen innerhalb der Gränzen des wahrscheinlichen Messungsfehlers[1]).

Die Uebereinstimmung der Winkel der Scheitelzelle des Stammes mit der Divergenz der appendiculären Organe beschränkt sich nicht auf die $^{5}/_{13}$Stellung. Das durch die Rechnung geforderte Verhältniss der kürzeren Seite der dreieckigen Scheitelfläche der Endzelle zu einer der längeren ist:

| | |
|---|---|
| bei der $^{2}/_{5}$ Stellung | 1 : 1,618 |
| „ „ $^{3}/_{8}$ „ | 1 : 1,307 |
| „ „ $^{5}/_{13}$ „ | 1 : 1,4067 |
| „ „ $^{8}/_{21}$ „ | 1 : 1,3683 |
| „ „ $^{13}/_{34}$ „ | 1 : 1,3799 |
| „ „ $^{21}/_{55}$ „ | 1 : 1,3294 |

Beobachtet sind

| | Basis. M.M.M. | Schenkel. M.M.M. | Verhältniss beider. |
|---|---|---|---|
| Asp. filix mas $^{3}/_{8}$ Stellung, Windung rechts | 56,9738 | 74,2464 | 1 : 1,307 |
| „ „ „ „ (Sämling) | 27,8558 | 36,6814 | 1 : 1,316 |
| „ „ „ „ „ | 36,1298 | 47,7134 | 1 : 1,3216 |
| „ $^{8}/_{21}$ „ „ rechts | 63,161 | 86,1052 | 1 : 1,363 |
| „ $^{13}/_{34}$ „ „ „ | 63,4386 | 90,23 | 1 : 1,381 |

1) Ich zog die Berechnung der Winkel der Scheitelfläche aus der Länge ihrer Seiten der directen Messung dieser Winkel durch den Goniometer weit vor, da ersteres Verfahren ein ebenso sicheres Ergebniss liefert als dieses ein schwankendes. Die Zuverlässigkeit beider Methoden steht in ähnlichem Verhältniss, wie bei Bestimmung der Blattstellung die directe Messung des Divergenzwinkels zu dessen Berechnung aus der Zahl der Wendel. — Leicht hätte die Zahl der Messungen sich häufen lassen, doch schien es räthlich, alle die Fälle auszuschliessen, wo der Scheitelfläche des Stammes

Es liegt der Versuch nahe, diese Erscheinung durch die Vermuthung zu erklären, dass der Winkel, welchen eine in der Scheitelzelle neu auftretende Wand mit der nächstälteren Seitenwand derselben bildet, dem Divergenzwinkel der Blattstellung entspreche, indem er die Hälfte desselben betrage. Daraus würde bei jedem auf die $^2/_5$ Stellung folgenden Stellungsverhältnisse der Blätter, wie $^5/_{13}$, $^8/_{21}$ u. s. f., die gleichschenklig dreiseitige Form der Scheitelfläche der Zelle ersten Grades nothwendig hervorgehen. Jede Zelle zweiten Grades würde als Urmutterzelle auf ein Blatt sich beziehen lassen, das aus der weiteren Entwickelung der Nachkommenschaft der secundären Zelle hervorginge. Diese Voraussetzung würde aber auch bedingen, dass die vierseitige Scheitelfläche jeder Zelle zweiten Grades gleich bei ihrer Entstehung an der hinteren Kante erheblich breiter sei, als an der vorderen. Der Ueberschuss der Länge der hinteren Kante über die der vorderen würde bestimmt werden durch den Unterschied der Oeffnung des Scheitel- und eines der Seitenwinkel der oberen Fläche der Zelle ersten Grades (vergleiche die schematische Figur T. VII f. 18). Er würde die Linie *ca'* betragen, und zur Linie *aa'* (oder der ihr gleichen Linie *ab*, mit anderen Worten zur zweitjüngsten Seite der Gipfelfläche des Complexes der Zelle ersten und der jüngsten Zelle zweiten Grades) sich verhalten müssen, wie der Sinus des Winkels *caa'* zu dem des Winkels *aba'*. Demnach müsste jede Zelle zweiten Grades gleich bei der Entstehung am Hinterende breiter sein, als am Vorderende:

bei $^2/_5$Stellung um die ganze Länge ihrer vorderen Wand und der ihre Verlängerung darstellenden ältesten Wand der Scheitelzelle (um die ganze Linie *ab* der Figur 18),

bei $^3/_8$Stellung um etwas über die Hälfte (0,5412) dieser Länge,

bei $^5/_{13}$Stellung um $^7/_{10}$ (0,70081) desselben.

Die Beobachtung widerlegt diese Voraussetzung aufs Vollständigste. Zwar divergirt bei älteren Zellen zweiten Grades, namentlich an den bereits mehrfach getheilten, die äussere Seitenwand regelmässig von der

nicht genau parallele Führung des Schnitts, welcher die äusserste Spitze der flachen Knospe vom übrigen Theile derselben abtrennte, Anlass zu Fehlern hätte geben können.

inneren. Aber je jüngere Zellen zweiten Grades man untersucht, um so mehr findet man ihre Seitenwände dem Parallelismus genähert, bis endlich offenbar eben erst entstandene Theilungswände der Zelle ersten Grades der ältesten Seitenwand derselben genau parallel erscheinen (T. VII f. 1, 2). Es geht hieraus hervor, dass zwar die nachträgliche Dehnung und die Vermehrung der Zellen zweiten Grades von hinten nach vorn allmälig fortschreitet (durch welches schrittweise Vorrücken die in scharfen Winkeln gebrochene Aufeinanderfolge dieser Zellen in eine Schraubenlinie umgewandelt wird), dass aber keine irgend merkliche Divergenz neu auftretender Theilungswände der Zelle ersten Grades von der vor ihnen stehenden ältesten Seitenwand dieser Mutterzelle stattfindet.

Nicht minder entschieden spricht eine zweite Reihe von Thatsachen gegen jene Annahme: das, wenn auch seltene, Vorkommen von Scheitelflächen der Zellen ersten Grades, welche andere Winkel zeigen, als die der Wedelstellung entsprechenden. Folgende Fälle sind beobachtet; es sind die sämmtlichen in der langen Untersuchungsreihe ermittelten.

| | | | | | Länge der ältesten Seitenwand der Scheitelzelle. M. M. M. | der jüngsten Seitenwand der Scheitelzelle. M. M. M. | Verhältniss beider. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Asp. spinul., | 3/13 | Stellung, | Windung | rechts | 60,583 | 83,0116 | 1:1,37 |
| .. .. | .. | .. | .. | .. | 56,3293 | 76,3088 | 1:1,355 |
| .. .. | .. | .. | .. | links | 52,7201 | 68,783 | 1:1,307 |
| .. .. | .. | .. | .. | rechts | 45,5017 | 52,4623 | 1:1,152 |
| .. .. | .. | .. | .. | links | 59,5518 | 61,0986 | 1:1,026 |
| .. filix mas, | .. | .. | .. | rechts | 55,427 | 73,9886 | 1:1,335 |
| .. .. | 8/21 | .. | .. | .. | 71,1528 | 88,1676 | 1:1,239 |
| .. spinul., | 3/8 | .. | .. | .. | 69,8638 | 75,7932 | 1:1,088 |
| .. filix mas, | 5/13 | .. | .. | .. | 88,4254 | 85,074 | 1:0,961 |
| .. .. | | .. | .. | .. | 69,0904 | 63,161 | 1:0,913 |

An der Mehrzahl dieser ungewöhnlich gestalteten Zellen fällt zunächst deren Grösse auf. An keiner der in den vorhergehenden Messungstabellen aufgeführten erreichte die Basis des Dreiecks die hier oft überschrittene Länge von 64 M. M. M. —

Besonders belehrend sind aber die Maasse der zum Schlusse erwähnten Scheitelzellen, wo die Länge der ältesten Seitenwand die der jüngsten beträchtlich überwiegt. Zusammengehalten mit der Thatsache,

dass in der grossen Mehrzahl der Fälle (26 von den genau ermittelten 36) die Winkel der Scheitelzelle der Divergenz der Blattstellung entsprechen, deuten diese Erscheinungen darauf hin, dass die Scheitelzelle nach jeder Theilung nicht nach allen Richtungen hin gleichmässig sich vergrössert, um den Umfang wieder zu erlangen, den sie vor der Theilung besass, sondern dass ihre Dehnung vorwiegend, wenn nicht ausschliesslich, in zur jüngst entstandenen Wand rechtwinkliger Richtung erfolgt. Diese Wand, im Augenblicke einer Theilung einen der Schenkel der gleichschenklig dreieckigen Scheitelfläche der Zelle ersten Grades bildend, wird bis zur nächsten Theilung von dem Längenwachsthum der beiden anderen Seitenwände der Scheitelzelle weit überholt, so dass diese dann die Schenkel, jene letztgebildete Wand die Grundlinie des Dreiecks darstellen. Die neue Theilung geschieht dann durch eine Wand, welche parallel ist der inzwischen verlängerten und verschobenen zweiten, bei der vorherigen Theilung längeren Seitenwand der Scheitelzelle.

Die T. VII f. 19 gegebene schematische Darstellung der Aufeinanderfolge vierer derartiger Theilungen der Knospen-Scheitelzelle bei $^5/_{13}$Stellung wird diese Voraussetzung verdeutlichen.

Das von den Linien 1, 2, 3 umschlossene Dreieck ist die Scheitelzelle vor der ersten dieser Theilungen, die Linie 4 bezeichnet den Verlauf der sie theilenden Membran. Jetzt dehnt diese Zelle (wir wollen sie bis zur nächsten Theilung mit II bezeichnen), sich nach links hin: die Linie 4 wird jetzt zur Basis des Dreiecks; die Linie 1, um das Stück $1^{II}$ verlängert, zum einen Schenkel; die Linie 3, zu der Linie $3^{II}$ verschoben und verlängert, zum anderen. Die nächste Theilung wird durch die Linie 5 ausgedrückt. Diese Linie wird zur Basis der von den Linien $3^{II}$, 4, 5 umschlossenen aufs neue nach links sich dehnenden Scheitelfläche der Zelle. Durch diese Dehnung wird die Linie 3 zu der $3^{III}$, die Linie 4 zu $4^{III}$. — Die Linie 6 bezeichnet die dritte Theilung. Die Scheitelzelle ist jetzt zunächst von den Linien 4, 5, 6 begränzt. Bei der neuen Dehnung der Zelle wird die Linie 5 um das Stück $5^{IV}$ verlängert, 4 nach $4^{IV}$, 2 nach $2^{IV}$ verschoben, I um $1^{IV}$ gedehnt.

Die Figur 20 zeigt die ziemlich complicirte Art der Anordnung und Verschiebung der Zellen zweiten Grades bei drei weiteren solchen Theilungen der Scheitelzelle.

Alle im Vorstehenden mitgetheilten Thatsachen können leicht unter

den einen Gesichtspunkt dieser Voraussetzung gebracht werden. Sie erklärt die Häufigkeit des Vorkommens der Blattstellung entsprechender Gestalt der Scheitelfläche der Zelle ersten Grades, wie deren seltene Abweichungen von dieser Form. Auch die durch sie geforderte Rückwärtskrümmung derjenigen Linien, welche die nach derselben Seite gekehrten ausspringenden Winkel der verschiedenen Umläufe der aufeinanderfolgenden Zellen zweiten Grades um die Stammachse verbinden, — Linien, die drei der Blattspirale gleichsinnige Schraubenwindungen darstellen — wird durch die Beobachtung bestätigt. Eine weitere Stütze erhält die ausgesprochene Ansicht dadurch, dass die bei ihr vorausgesetzte Dehnung und Verschiebung der Scheitelzelle nothwendig aus der von den älteren zu den jüngeren allmälig vorschreitenden Vergrösserung und Vermehrung der Zellen zweiten Grades folgen muss. Die Kantenwinkel der Seitenflächen der Zelle ersten Grades müssen in Richtung der aufsteigenden Schraubenlinie der Umläufe von Theilungen an den vorderen Kanten sich verengen, an den hinteren sich öffnen, wenn die Vermehrung der älteren Zellen zweiten Grades in Richtung der Tangenten des Stammes lebhafter ist (wie dies die Beobachtung zeigt), als die der jüngsten. Man kann die Scheitelzelle bei diesem Vorgang sich gewissermaassen passiv denken.

Die Voraussetzung eines hohen Grades der Dehnbarkeit und Bildsamkeit in den Wänden der jungen Zellen eines in der Entwickelung begriffenen Pflanzentheils ist unerlässlich zur Erklärung der Verschiebung, der Orts- und Gestaltveränderung der einzelnen Zellen, welche durch das Wachsthum des ganzen Pflanzentheiles, durch den Einfluss der Dehnung (und Vermehrung der älteren Zellen und Zellgewebsmassen) auf die jüngeren, und umgekehrt, bedingt wird. Dehnung und Vermehrung der secundären Zellen, und der aus ihren Theilungen hervorgegangenen Zellengruppen, schreitet in der Endknospe des Farrnkrauts in aufsteigender Schraubenlinie von unten nach oben fort. In der Nachbarschaft der Scheitelzelle ist diese Dehnung früher eingetreten, folglich weiter vorgeschritten, und von beträchtlicherem Ergebniss an der ältesten, die Basis der Scheitelfläche der Zelle darstellenden Wand, und an der nächstälteren, deren Kante als vorletzt gebildeter Schenkel jener Fläche erscheint. In der Richtung des von diesen beiden Seitenwänden gebildeten Kantenwinkels der, zwischen je zwei Theilungen stetig zu

ungefähr nämlicher Grösse heranwachsenden Scheitelzelle, wird sie vorzugsweise zum Wachsthum angeregt werden. Dies wird ihre Gestalt mehr und mehr in der oben geschilderten Weise verschieben, bis zur Erreichung der durch die Hypothese geforderten Verhältnisse der Winkel. Es ist leicht denkbar, dass das Maass der Schnelligkeit des Fortschreitens der Vermehrung von den älteren secundären Zellen zu den jüngsten das Ueberschreiten jener Oeffnungsgrade hindert.

Nur eine, ganz vereinzelte Thatsache ist im Laufe der zu diesen Schlüssen führenden langen Untersuchung aufgestossen, welche nicht in jene Auffassung passt: die Gipfelzelle einer Endknospe von Aspidium spinulosum, deren Scheitelfläche an der Basis 41,248 M.M.M., der Schenkel jeder 97,808 M.M.M. (= 1:2,252) maass. Der Stamm, mit links gewundener $^{5}/_{13}$Stellung der Wedel, war auf einem Grabenrande unter dichtem Gestrüpp halb unterirdisch nach abwärts gewachsen, seine Stängelglieder ungewöhnlich stark gestreckt. Es ist wahrscheinlich, dass hier eine Abnormität, vielleicht ein krankhafter Zustand vorliegt.

Der zweischneidigen Form der Scheitelzelle bei zweizeiliger Stellung der Wedel von Pteris aquilina wurde bereits gedacht; das gleiche Zusammentreffen findet sich, soweit die Beobachtungen reichen, ausnahmslos bei Niphobolus rupestris und Lingua, bei Polypodium punctulatum, cymatodes und aureum; vorwiegend häufig bei Polypodium vulgare und Dryopteris.

Die Ermittelung der Zellenfolge in der Scheitelregion von Laubknospen phanerogamer Gewächse hat beträchtliche Schwierigkeiten. Die Kleinheit der Elementarorgane ist das geringere Hinderniss; erschwerender wirkt, insbesondere bei Coniferen und Dikotyledonen, der sehr frühe Eintritt schneller und starker Vermehrung der secundären Zellen des flachen Knospenendes. Nicht immer lässt sich eine Zelle der Knospe aus der Lage zu den Blättern mit Sicherheit als Scheitelzelle des Stammes bestimmen. Wo es indess gelang, zeigte sich die Form dieser Zelle der Blattstellung entsprechend: zweischneidig bei Gräsern (Secale cereale T. VII f. 17, Phragmites arundinacea) und bei Arten von Iris; häufig ebenso gestaltet bei Bäumen mit decussirten Blättern: Acer, Fraxinus, Cupressus (T. VII f. 13—16). Doch kamen hier auch seltenere Fälle dreieckiger Scheitelflächen mit sehr spitzem Scheitelwinkel vor. Diese Abweichungen beruhen möglicherweise darauf, dass in jedem Internodium eine allmälige Umsetzung, eine Ablenkung um 90°, der in der

Scheitelzelle der Knospe auftretenden, den Blattflächen zugekehrten Theilungswände erfolgen mag.

Bäume mit unvollständig dreizähliger Blattstellung zeigten durchweges dreiseitige Scheitelzellen mit kürzerer einer Kante. Bei Robinia Pseudacacia (Blattstellung $^2/_5$, T. VII f. 11) maass

| die Grundlinie des Dreiecks: | einer der Schenkel |
|---|---|
| 9,9288 M. M. M. | 15,4448 = 1:1,555 |
| 10,121 ,, | 16,2936 = 1:1,689 |
| 9,875 ,, | 15,9975 = 1:1,62 |
| | im Mittel = 1:1,634 |

was dem durch die Rechnung geforderten Verhältnisse von 1:1,618 so nahe entspricht, als bei der durch die Kleinheit des Gegenstandes bedingten Grösse des wahrscheinlichen Messungsfehlers zu erwarten steht. (Es bedarf, wenn anders man nicht das erste obiger Maasse den Verschiebungen der Scheitelzelle zwischen zwei Theilungen zuzählen will, auch hier, wie bei dem zweiten zu grossen Verhältniss, nur einer Berichtigung von etwa $^1/_{6000}$ Millimeter, um sie der Rechnung genau entsprechend zu machen.)

Es maassen ferner Scheitelzellen von

| | Basis | Schenkel | Verhältniss beider. |
|---|---|---|---|
| Pinus Abies, Blattstellung $^8/_{21}$ rechts gewunden (T. VII f. 10) | 13,79 M.M.M. | 18,7544 M.M.M. | =1:1,36 |
| ,, desgleichen | 15,8569 ,, | 21,5124 ,, | =1:1,3566 |
| ,, $^{13}/_{34}$ rechts gewunden | 14,6174 ,, | 20,4192 ,, | =1:1,397 |
| ,, balsamea (T. VII f. 9) $^8/_{21}$ rechts gewunden | 13,8451 ,, | 19,0302 ,, | =1:1,375 |
| ,, desgleichen | 14,3416 ,, | 19,488 ,, | =1:1,359 |
| ,, desgleichen | 13,5422 ,, | 18,4615 ,, | =1:1,363 |
| Zamia longifolia, Blattstellung $^5/_{13}$ rechts gewunden | 27,58 ,, | 38,612 ,, | =1:1,4. |

Die erste Theilung der Zellen zweiten Grades von Aspidium filix mas rechtwinklig zur freien Aussenfläche erfolgt bald durch eine der Vorderfläche (der Fläche, mit welcher die Zelle zweiten Grades an die Zelle ersten Grades gränzt) parallele Wand (T. V f. 21. T. VII f. 5, 7, 8), bald durch eine die Vorderwand unter einem Winkel von etwa 70° treffende Längswand (T. VI f. 3. T. VII f. 4). Im ersteren Falle folgt auf die erste Theilung die zweite, im zweiten auf diese die erste; das Endergebniss ist das nämliche. Die ferneren Theilungen der Zellen

der Endknospe sind noch minder strengen Zahlenregeln unterworfen (vergl. T. V f. 11, 19—22. T. VI f. 3. T. VII f. 1—9). Das Bestreben, die Zickzacklinie der Aufeinanderfolge der von je einer Zelle zweiten Grades abstammenden Zellgenerationen in eine gleichmässig ansteigende Schraubenlinie zu verwandeln, spricht sich besonders in dem häufigen Vorkommen dreigliederiger Zellengruppen aus, welche entstehen, indem die in einer Zelle der Aussenfläche auftretende Theilungswand keiner der Seitenwände parallel ist, sondern zwei, eine Kante bildende Seitenwände der Mutterzelle schneidet, so, dass diese in eine kleinere Tochterzelle mit dreiseitiger, und eine grössere mit vierseitiger Aussenwand getheilt wird. Letztere Zelle theilt sich nochmals durch eine, auf der jüngstgebildeten nahezu rechtwinklige Scheidewand. An der Stelle einer Zelle $n$ten Grades stehen jetzt drei: eine $n+1$ten, und zwei $n+2$ten Grades.

Die Zellenfolge der Endknospe, die möglicherweise durch sie bestimmte, nicht sie bedingende Form der Endzelle sind Aeusserungen des nämlichen Bildungstriebes, welcher die Anordnung der Blätter an der Achse bestimmt. Es wird nach langen und ausgedehnten, oft wiederholten Untersuchungen hier einschlagender Verhältnisse der Ausspruch nicht übereilt sein, dass jener, die Gestalt werdender Pflanzentheile bestimmende Bildungstrieb um so weniger in den Einzelnheiten der Zellenvermehrung sich zu erkennen giebt, als die betreffenden Organe aus zahlreicheren Zellen zusammen gesetzt sind. Die Hauptrichtungen, in welchen die Zellenvermehrung erfolgt, sind bestimmte; die Zahl und Reihenfolge der Zelltheilungen in diesen Richtungen aber bewegt sich in nicht eben engen Gränzen [1]).

Die jüngeren Theile der Knospe von Aspidium filix mas sind von durchsichtigem Schleime umhüllt, wie dies für alle Knospen die allge-

1) Dieser Schluss ist der nämliche, den ich aus an Isoëtes gemachten Beobachtungen früher zog (S. 161 des zweiten Bandes dieser Abhandlungen). Die dort (S. 156) gemachte Angabe, dass alle in der Scheitelzelle auftretenden nach einer der drei Richtungen gekehrten Theilungswände von Scheitelzellen dreifurchiger Isoiden zu einer durch die ihnen nächste Stammkerbe gelegte Ebene rechtwinklig seien, ist eine zu streng und zu allgemein gefasste. Doch haben die Beobachtungen, deren Zahl indess durch Kargheit des Materials beschränkt war, allerdings ergeben, dass alle gesehenen Theilungswände einer der Kerben zugewendet waren; keine war gegen den Zwischenraum zwischen zwei Kerben gekehrt. Es mag dies mit den hohen Verhältnisszahlen der Blattstellung jener Isoidesarten zusammen hängen. Die dreiseitige Form der Schei-

meine Regel[1]). Bei dem sehr unvollständigen Abschluss der äusseren Luft von der flachen Endknospe unsres Farrnkrautes, bei welchem nur die zusammengeneigten Spreublätter älterer Theile den Vegetationspunkt bedecken, trocknet häufig dieser Schleim zum Theile ein, und bildet eine den Scheitel der Knospe überziehende, nach aussen körnige structurlose Haut (T. VI f. 8), ganz ähnlich, wie an den jüngsten Theilen der Frons von Anthoceros[2]). Zur Erlangung klarer Scheitelansichten ist die Entfernung dieser Haut nothwendig; eine mühsame und leicht misslingende Aufgabe.

Die Spreublättchen, über deren Entwickelung ich früheren Angaben[3]) nichts wesentliches zuzusetzen habe, treten an der Endknospe zwar sehr weit über dem Punkte auf, an welchem die Zellenzunahme des Stammes in die Dicke beendet ist; nie aber oberhalb der Ursprungsstelle des jüngsten Wedels (Taf. V f. 11. T. VIII f. 9). Dies gilt für Aspidium sowohl, als auch für Pteris polypodium etc. Der Nägeli'schen Definition von Blattorganen und Haargebilden nach[4]) würden sie unzweifelhaft zu den Letzteren gehören, wie ich früher auch angenommen[5]). Sucht man dagegen den Unterschied zwischen Haargebilden und Blättern darin, dass die jüngsten jener nie unter den sichtbaren ersten Anlagen dieser sich zeigen, dass die Blattbildung an der Achse der Haarbildung stets vorausgeht, so erhält man ein durchgreifendes Kennzeichen beider; man wird bei keiner Pflanzenachse, die beide Formen appendiculärer Organe besitzt, über die Bestimmung derselben in Zwei-

telzelle von Equisetum arvense und anderer Arten ist neuerdings von Cramer (Nägeli u. Cramer, Pflanzenphys. Unters. Heft 3) als Regel nachgewiesen worden. Ich kann dies nur bestätigen, und füge hinzu, dass Equisetum limosum in der Regel sich ebenso verhält. Doch kommen hier, wie auch bei den Sprossen mit vierzähnigen Blattscheiden der Keimpflanzen von Eq. arvense, bisweilen Ausnahmfälle zweischneidiger Scheitelzellen des Stammes vor, deren Auffinden mich früher (vergl. Unters. S. 89) auch der dreiseitigen Zellform angehörige Fälle irrig deuten liess.

1) Vergl. Unters. S. 82, Anmerkung.

2) Vergl. Unters. T. I f. 8, 9.

3) Vergl. Unters. S. 85, 86.

4) Zeitschr. f. wiss. Botanik, Heft 3, 4, S. 185. Das Blattorgan bildet sich aussen an der Stammspitze, dicht unter der Scheitelzelle, ehe das Wachsthum in die Dicke durch peripherische Zellbildung vollendet ist .... Das Haar etc. bildet sich nach aussen an einer Epidermiszelle durch Auswachsen derselben, nachdem die peripherische Zellbildung vollendet ist.

5) Vergl. Unters. S. 87.

fel sein. Die Spreuschuppen der Farrn fallen dann, sogut als die Haare in den Knospen von Laub- und Lebermoosen, unter den Begriff der Haargebilde, die Wedel folgerecht unter den der Blattorgane [1]).

Bei Entstehung eines Wedels nimmt eine der Oberflächezellen der Endknospe genau um den Divergenzwinkel der Blattstellung von dem nächstälteren Wedel entfernt an Umfang zu und wölbt sich papillenartig nach aussen (T. VI f. 5. T. VIII f. 9); in ihr beginnt eine Reihenfolge von in der Scheitelzelle stätig sich wiederholenden Theilungen durch wechselnd nach rechts und links gegen die künftigen Wedelränder gekehrte Wandungen. Die erste solcher in der Mutterzelle des Wedels auftretenden Wände ist stets, soweit die zahlreichen Beobachtungen reichen, gegen den nächst älteren Wedel gewendet. Die secundären Zellen vermehren sich nach allen drei Richtungen stärker auf der Rückenfläche des Wedels, so dass er zu einem nach vorn übergeneigten, ziemlich schlanken Kegel umgewandelt wird. Von jetzt an treten in der Scheitelzelle wechselnd mit den den Seitenrändern zugekehrten Scheidewänden auch solche auf, die gegen die Vorder- und Rückenfläche des Wedels gewendet sind. Seine fernere Ausbildung, die Anlegung seiner Spreite, erfolgt in der bei Pteris aquilina geschilderten Weise. Wurzeln bilden sich an der erwachsenen Pflanze unseres Farrn, wie schon oben besprochen, nie mehr am Stamme selbst, sondern ausnahmslos nur am unteren bauchig angeschwollenen Theile der Wedelstiele. Sie entspringen hier von den auf der Rückenseite des Wedelstiels den Längsleisten desselben parallel laufenden Gefässbündeln; gewöhnlich bilden sich zwei Wurzeln an jedem Wedelstiele. Die Zelle ersten Grades der Wurzel erscheint auf jedem Längs- und jedem Querschnitte (Taf. VI f. 9, 10) dreiseitig; ihre Form ist die einer niedrigen,

---

1) Zwei Hauptgründe, die früher für die Blattnatur der Spreuschuppen, für die Zweignatur der Wedel sprachen, sind in Wegfall gekommen. Die Angabe Kunze's, dass die Wedeln von Trichomanes ähnlichen zierlichen Bildungen am Grunde des Wedelstiels von hemiteria capensis umgewandelte Spreublätter seien, ist irrig, wie schon erwähnt. Sie haben, wie die Untersuchung selbst eines todten Stammes sofort zeigt, mit den Spreuschuppen nichts gemein. Der Verlauf des in sie eintretenden Gefässbündels ist entscheidend dafür, dass sie in frühester Jugend des Wedels noch vor Anlegung von dessen Spreite gebildet wurden. Die Verhältnisse bei den Ophioglosseen, deren Vegetation ich früher als eine Reihenfolge von Adventivsprossen auffassen zu müssen glaubte, haben neuerdings in überraschender Einfachheit, im Wesentlichen mit denen der Polypodiaceen übereinstimmend sich mir herausgestellt.

dreiseitigen Pyramide. Dadurch, dass sie mittelst einer, ihrer schwach convexen Grundfläche zugewendeten concaven Wand sich theilt, werden linsenförmige Zellen gebildet, deren jede zur Mutterzelle zweier der kappenförmigen Zellschichten der Wurzelmütze wird. Die linsenförmige Zelle theilt sich durch Längswände in vier kreuzweis stehende Zellen (T. VI f. 11), dies darauf durch Querwände. Indem nun in der Mitte der kreisförmigen Zellschicht die fernere Theilung durch Längswände rascher und öfter erfolgt, als an den Rändern, wird die Kappenform der Zellenfläche hervorgerufen. Zwischen den älteren dieser Zellschichten, deren Aussenwände sich sehr verdicken, treten lufterfüllte Intercellularräume auf; die Einleitung zum Abblättern der von aussen her allmälig absterbenden Zellenlagen der Wurzelmütze. — Auf jede der Theilungen mittelst einer der Grundfläche der Zelle ersten Grades zugewendeten concaven Wand folgen drei Theilungen derselben durch successiv jeder der drei Seitenflächen derselben parallele Wände. Die so gebildeten, im Dreieck stehenden drei Zellen zweiten Grades theilen sich durch Längs- und Querwände, lebhafter in ihrem, der Längsachse der Wurzel ferneren Theile. Das hier sich bildende kurzzellige Gewebe wird zur Rindenschicht, deren frühzeitige Entwickelung später das axile in der Quertheilung weit zurückgebliebene Zellgewebe der Wurzel durch rasche Längsdehnung wieder einholt, indem es zum centralen Gefässbündel sich umbildet[1]).

Nur in seltensten Fällen theilt sich die Endknospe des Stammes von Aspidium filix mas durch ächte Gabelung des Vegetationspunktes. Um so häufiger kommt die Sprossvermehrung durch Adventivknospen vor. Diese entstehen stets am Wedelstiel da, wo die bauchige Anschwellung desselben in den schlanken oberen Theil übergeht, auf der Rückseite jener. Hier zeigen sich die frühsten beobachteten Zustände nach Entfernung der den Wedelstiel dicht begleitenden Spreublätter als von einer Ringfurche umgebene Scheibe mit einem niedrigen Höcker, der Spitze der neu sich bildenden Achse im Mittelpunkte. Etwas spätere Zustände zeigen im Kreise um den centralen Höcker einige andere, die Anlagen von Wedeln (T. VI f. 6). Noch an der Mutterpflanze beginnt der neue Spross selbstständig Wurzeln zu treiben (T. VI f. 7), die von

1) Es ist wahrscheinlich, dass die bei Equisetum variegatum früher beobachteten linsenförmigen Zellen des Wurzelinneren (Vergl. Unters. T. XVIII f. 3) ebenfalls die Anfangszellen einer der Schichten der Wurzelmütze und nicht die Zelle ersten Grades der Wurzel ist, wie ich damals angenommen.

den Gefässbündeln des Wedels, an welchem er entsteht, zu ihm abgehenden Gefässbündel vereinigen sich in seiner Ansatzstelle zu einem geschlossenen Ringe, von dem aus ihre Vertheilung in den Insertionen der Wedel entsprechende Schleifen anhebt (T. VI f. 7[b]). Solche Adventivknospen bilden sich an kräftigen Individuen fruchtbarer Standorte etwa an jedem zwölften Wedel; an solchen, die in dürren Lagen vegetiren, noch weit häufiger[1]).

Aspidium spinulosum verhält in allen Stücken dem Aspid. filix mas sich ähnlich. Die Adventivknospen am Wedelstiel treten hier sehr nahe an dessen Grunde auf. Die Spreuschuppen tragen auf ihrer Spitze, häufig auch auf Zähnen des Randes, stark angeschwollene ey- oder birnförmige Endzellen mit schleimigem Inhalte, eine Erscheinung, die auch bei Asp. oreopteris, Aspl. filix femina, Struthiopteris germanica u. a. wiederkehrt.

### Asplenium filix femina; Asplenium Bellangeri; Struthiopteris germanica; Nephrolepis undulata; Nephrolepis splendens.

Die in der Ueberschrift genannten Farrnkräuter stimmen in den Hauptzügen der Vegetation — Form und Vermehrungsweise der Zellen der Endknospe, Stellung der Zellen ersten Grades der Wedel zur Scheitelzelle jener, Anordnung der Gefässbündel im Stamme — vollkommen mit Aspidium filix mas überein. Asplenium filix femina unterscheidet sich durch schlankere Form der Endknospe, an der schon in dem (von der Scheitelzelle ab- und seitwärts gezählten) vierten Complexe von Zellen, die einer den Zellen zweiten Grades entstammten, die Vermehrung in die Dicke endet, so dass die noch blattlose Stammspitze steil über den jüngsten Anlagen von Wedeln sich erhebt (T. VIII f. 4, 5). Eine weitere Eigenthümlichkeit dieser Pflanze ist, dass aus dem Scheitelwinkel jeder Gefässbündelschlinge des Stammes nur ein Gefässbündel in jeden Wedelstiel eintritt (T. VIII f. 3). Eine beträchtliche Strecke weit verläuft dieses Bündel einfach, theilt dann sich in zwei, weiter aufwärts in noch mehrere Stränge. Es erhält sich hier während der ganzen Lebensdauer des Gewächses das Verhältniss, welches bei Asp. filix mas nur in der Ju-

1) Es sind vermuthlich diese Knospen, welche Schleiden im Sinne hatte, als er unserem Farrn Axillarknospen zuschrieb (Grundzüge, 2. Aufl. Band II. S. 87), die dem Aspidium filix mas wie allen Farrnkräutern überhaupt absolut fehlen.

gend nur an der einjährigen Pflanze vorkommt (s. oben S. 633). Unterhalb der Stelle, an welcher das Gefässbündel des Wedelstiels die erste Gabelung zeigt, entsteht regelmässig eine Wurzel; an jedem Wedel nur eine, die genau in einer durch die Mediane des Wedels gelegten Ebene sich entwickelt. Dieser Umstand erleichtert in hohem Grade die Untersuchung frühester Zustände. Man erkennt hier auf gelungenen Längsschnitten dicht aussen an der Gefässbündelanlage des Wedels die Anfangszelle der zugehörigen Wurzel, aus deren Vermehrung, in der bei Asp. filix mas geschilderten Weise (S. 648), Wurzelhaube und bleibender, cylindrischer Theil der Wurzel hervorgehen (T. VIII f. 5, 6). Die Gewebe beider Hälften der werdenden Wurzel, auch die Zellen der Wurzelmütze, stehen in dieser frühen Jugend in innigstem parenchymatischen Zusammenhange mit den Zellen der Wedelrinde. Später (kurz vor dem Hervorbrechen aus der Rückenfläche des Wedelstiels) gränzt sich zwar die Wurzelmütze scharf von den Zellen vor ihr ab (T. VII f. 8), ohne dass aber eine Zerreissung der Gewebe, ein sichtbarer Intercellularraum zu bemerken ist. Die wenigen Zellschichten des Wedelstiels vor der Spitze der jungen Wurzel werden allmälig von ihr verdrängt und aufgelöst, nicht durchbrochen; der hervorgetretenen Wurzel fehlt der manschettenartige, aus dem Zellgewebe des mütterlichen Pflanzentheils gebildete Rand, der an den Adventivwurzeln vieler Monokotyledonen so auffallend ist.

Adventivknospen kommen an Aspl. filix femina nur höchst selten, wie es scheint in der freien Natur kaum jemals vor. Doch sah ich an der Basis abgerissener Wedelstiele, die längere Zeit in einer verschlossenen Flasche in feuchter Luft aufbewahrt worden waren, unterhalb der Ansatzstelle der Wurzel Adventivknospen entstehen (T. VIII f. 1). Die Gabelung der Stammspitze durch Theilung der noch blattlosen Endknospe dagegen ist ein, unseren Farrn ganz regelmässig zukommender Vorgang; die gewöhnliche ungeschlechtliche Sprossvermehrung der Pflanze, die, wie es scheint, in ziemlich regelmässigen Pausen (nach einem bis zwei Abschnitten der Wedelstellung) eintritt. Man wird selten an älteren Pflanzen die Bifurcation des Stammes vermissen; oft finden sich vier- bis neunköpfige Individuen.

Bei Struthiopteris germanica tritt zu den erwähnten Besonderheiten[1],

[1]) Ueber die Vertheilung der Gefässbündel (die gleiche wie bei A. filix femina) s. Schacht, Pflanzenzelle, T. XV f. 3—6.

die Bildung zahlreicher Adventivsprossen hinzu[1]). Aehnlich, wie bei Asp. spinulosum, entstehen sie aussen am Grunde des Wedelstiels, dicht über dessen Einfügung in den Stamm. Ihre erste Anlegung erfolgt ungemein frühe, lange vor der der Wedelspreite. Bei ihrer ersten Entwickelung sind sie schräg abwärts gerichtet (T. VIII f. 10, 12).

Das massenhafte Auftreten von Adventivknospen an allen Theilen, auch den Verzweigungen der Spreite des Wedels ist für Asplenium Bellangeri besonders bezeichnend. Die Art der Entwickelung ist im Wesentlichen die nämliche, wie bei Asp. filix mas; — auch hier entstehen die neuen Sprossen nicht innen im Gewebe des sie erzeugenden Pflanzentheils, sondern aussen an dessen Aussenfläche (T. VIII f. 13, 13[b]).

Die Arten von Nephrolepis treiben, wie bekannt, lange dünne Ausläufer, deren Enden bei Nephrolepis undulata und Nephrolepis tuberosa zu Knollen anschwellen[2]). Diese Stolonen entstehen aus Adventivknospen, welche an den mit dem Stamm verschmolzenen, ihn berindenden Basaltheile der Wedelstiele, scheinbar am Stamme auftreten (T. IX f. 9). Die $1/3$ Linie dicken, mit blassgelben Spreuschuppen spärlich besetzten, hier und da wurzelnden Ausläufer sind von einem centralen Gefässbündel durchzogen. Die Scheitelzelle der Endknospe ist bei Nephrolepis undulata stets zweiseitig (T. IX f. 5). An den dickeren Stolonen der Nephr. splendens erscheint sie häufig von dreiseitiger Gestalt (T. IX f. 3). Bei Nephr. undulata nimmt sie diese Form dann erst an, wenn die Spitze des Ausläufers zur Knollenbildung sich anschickt (T. IX f. 4). In der anschwellenden Parenchym-Masse verästelt sich das bis dahin einfache centrale Gefässbündel (T. IX f. 7); die Bündel sind fortan in einem, der Peripherie des Knöllchens concentrischen Kreis geordnet.

Mit der vollendeten Ausbildung der etwa zolllangen Knolle erlischt die Vegetation ihrer Endknospe, soweit meine Beobachtungen reichen[3]). Der Inhalt ihrer Zellen, deren Anordnung die Art der Zellenvermehrung (in der Weise erfolgt, wie im Stammende von Asp. filix mas) noch erkennen lässt, wie derjenige der sie zahlreich umstehenden, jetzt vertrocknenden Rudimente von Spreuschuppen wird durch-

1) Braun, Verjüngung, S. 115.

2) Kunze, Knollenbildung an den Ausläufern von Nephrolepis-Arten: Berliner bot. Zeit. 1849, Sp. 881.

3) Abweichend von der Angabe Kunze's, welcher die Weiterentwickelung der Gipfelknospe beschreibt (a. a. O. Sp. 882).

sichtig (T. IX f. 6). Die Knolle treibt aufs Neue Adventivknospen, welche an ihren Seitenflächen in Mehrzahl entstehen (T. IX f. 8). Bald nach Entwickelung dieser Sprossen wird die Knolle zerstört.

### Polypodium. Niphobolus.

Die untersuchten Arten von Niphobolus (Niph. rupestris, chinensis), sowie mehrerer ausländischer Arten von Polypodium (aureum, punctulatum, cymatodes) zeigten ausnahmslos zweischneidige Form der Scheitelzelle, entsprechend der zweizeiligen Blattstellung (T. IX f. 1, 2). Anders Polypodium vulgare. Hier bietet die Terminalknospe, bei Betrachtung von oben, bald die Gestalt der Zelle ersten Grades und die Anordnung ihrer nächsten Nachkommenschaft, wie bei Aspidium filix mas (T. IX f. 16, 17), bald die zweischneidige Form der Scheitelfläche der Gipfelzelle (T. IX f. 15, diese weitaus am häufigsten), bald Gestalten, die als Mittelformen zwischen beiden sich auffassen lassen, insofern die freie Aussenwand der Zelle ersten Grades als Dreieck erscheint, dessen Schenkel mehr als das Dreifache der Basis messen. — Abweichungen von der typischen zweizeiligen Wedelstellung sind bei dieser Art nicht selten. Sie kommen besonders häufig an Pflanzen vor, die (wie in der Ebene gewöhnlich) an Standorten verhältnissmässig geringer Luftfeuchtigkeit vegetiren. Einige aus einer grossen Zahl ähnlicher aufs Gerathewohl herausgegriffene Fälle in Umrissen skizzirt (T. IX f. 11, 12, 13), mögen als Beispiel dafür dienen, dass die Wedelstellung zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ unstät schwankt. — Aehnliche Gegensätze finden sich bei Polypodium Dryopteris (T. IX f. 18, 19).

Uebereinstimmend mit Aspidium filix mas, und im Gegensatze zu Pteris aquilina stehen die Wände, durch deren Auftreten in der ersten Zelle des entstehenden Wedels der Stipes desselben angelegt wird, radial, nicht tangental zur Stammachse (T. IX f. 2). — Schon in der frühesten Jugend der Spreublättchen giebt in deren fast kreisrunder Gestalt (T. IX f. 19) das Hinstreben zur Schildform sich zu erkennen, welche schliesslich eintritt durch Wucherung des Hinterrandes, an der die Tochterzellen der durch Längswände mehrfach sich theilenden, zur Anheftungszelle gewordenen Ursprungszelle Antheil nehmen (T. IX f. 14).

Die Ausscheidung der Gefässbündel vom übrigen Gewebe des Stamms, die Bildung von Wurzeln an ihnen geschieht ähnlich, wie bei Aspidium und Pteris. Den Verlauf der Gefässbündel in einem cylindri-

schen Ringnetze von Maschen, die auf die Einfügungen der Wedel nicht unmittelbar sich beziehen lassen, hat Polyp. vulgare mit Polyp. aureum (T. IX f. 10) gemein [1]).

### Platycerium alcicorne.

Der erste Wedel der Keimpflanze ist aufgerichtet fleischig, spatelförmig, schwach nach hinten übergekrümmt (T. X f. 3 *a*, *b*). Er ist besetzt mit den für die Pflanze charakteristischen Sternhaaren, arm an Spreuschuppen, die am Stämmchen reichlicher vorhanden, schon in der frühen Jugend der Pflanze durch ihre starke Entwickelung besonders in die Dicke auffallen. Die dem ersten Wedel folgenden unterscheiden sich von ihm auffällig in Form, Richtung und Bau (T. X f. 5, 6). Ihr Umriss ist kreis- oder nierenförmig; sie entwickeln sich in wagrechter Richtung (so stark vom Anheftungspunkt sich rück- und abwärts biegend, dass sie der Unterlage der Pflanze sich anschmiegen). Ihre Dicke übertrifft die des aufgerichteten Wedels mehrfach; ihre Gefässbündel liegen nicht in einer, sondern in zweien den Flächen des Wedels parallelen Ebenen. Diese Bündel stellen zwei vielmaschige Netze dar, das eine dicht unter der oberen, das andere dicht über der unteren Seite des Wedels; beide Geflechte stehen durch zahlreiche, die Wedelmasse quer durchsetzende Gefässbündeläste in häufiger Verbindung.

Hat die Pflanze einen gewissen Grad der Kräftigung erlangt, so bildet sie wiederum aufgerichtete Wedel, jene anmuthig überhängenden, mit wenigen schwach spreizenden Gabelungen, an denen unter Umständen Sporangien auftreten. Nachdem sechs bis acht solcher entstanden, entwickelt sich wieder ein Paar einfacher, abwärts sich krümmender Wedel, rechts und links am Stamme je einer. Alle Wedel, die dicken flachen, dem Boden angeschmiegten, wie die schlanken aufstrebenden, stehen streng zweizeilig, wie beim Zurückschneiden der Wedel bis auf die Ansatzstümpfe sofort deutlich wird (Taf. X f. 10, 11). Die Wendung der Blattstellung, die Aufeinanderfolge je zwei benachbarter flacher Wedel zur Richtschnur genommen, ist bald links (T. X f. 10), bald rechts (T. X f. 11). Tief unten an der Rückenseite des Stipes jedes der aufgerichteten Wedel pflegt eine Knospe sich zu bilden, die zur selbstständigen Pflanze sich entwickelt, wenn sie durch Ent-

1) Vergl. v. Mohl, Vermischte Schriften, S. 115.

fernung der mit dicker Decke sie verhüllenden platten Wedel blosgelegt wird.

Es ist unschwer zu vermuthen, welche Rolle die zurückgekrümmten dicken Wedel in der Oekonomie unserer Pflanze spielen mögen: sie hindern das Austrocknen des Standorts. Ihre dichte Umhüllung macht das von ihnen bedeckte Rindenstück des Baumstamms, auf welchem der Farrn wächst, zum Feuchtigkeitsbehälter. Die Arten der nämlichen Gattung, deren Wedel sämmtlich gleich am Grunde sich stark verbreitern, und mit dieser verbreiterten Basis die Ansatzstellen der älteren Wedel decken und so die Unterlage schützen (wie Platycerium grande), entbehren gänzlich der abweichend gestalteten fleischigen, niedergekrümmten Wedel.

Die Gefässbündel des wagerechten Stammes, in einen einfachen Kreis gestellt (T. X f. 14, 15), bilden oberseits ein Netz polygoner, unterseits ein solches sehr enger parallelseitiger Maschen; die Maschen beider im Quergürtel geordnet (T. X f. 11, 12). Von den Ecken der Maschen der Oberseite gehen die Gefässbündel zu den Wedeln ab; diese Bündel anastomosiren mehrfach in der Rindenschicht der Stammoberseite (T. X f. 15). An den oberen und unteren Endpunkten der engen Maschen der Stammunterseite entspringen die Gefässbündel der in Querreihen stehenden Wurzeln. Sehr häufig dringen Wurzeln in die Substanz abgestorbener platter Wedel, in dieser vielfach sich verzweigend.

Die Rindenschicht von Zellgewebe, welche das centrale Gefässbündel der Wurzel umgiebt, zeigt in sonderbarer Analogie mit baumbewohnenden Orchideen und Aroïdeen eine anatomische Eigenthümlichkeit: die früh sich bräunenden Wände ihrer Zellen sind netzfaserig verdickt. Zwischen den sehr zarten Netzfasern finden sich enge flache Tüpfel (T. X f. 17, 17[b]). Die äusserste, Wurzelhaare entsendende Zellschicht der Wurzel von Platycerium entbehrt der Netzfasern, aber nicht der Tüpfel.

Die Scheitelzelle des Stammendes unseres Farrn ist zweischneidig, von Form eines stark zusammengedrückten Kegels. Die Anordnung der sie umgebenden Zellen lässt erkennen, dass die Vermehrung der Zellen der Endknospe eingeleitet wird durch dauernd wiederholte Bildung nach zwei entgegengesetzten Richtungen geneigter Scheidewände in der Zelle ersten Grades. Eine durch die Mittelpunkte der Einfügungsstellen sämmtlicher jüngerer Wedel gezogene (parabolische) Linie schneidet

die Scheitelfläche der Gipfelzelle des Stamms in ihrem längsten Durchmesser, nicht in ihrem kürzesten. Die Scheitelzellen junger Wedel sind mit ihren Schneiden, nicht mit ihren Flächen, dem Stammende zugewendet, dessen Gipfelzelle ihnen ebenfalls ihre Schneiden zukehrt: Verhältnisse, die den bei Pteris aquilina vorkommenden geradezu entgegengesetzt, dagegen mit denen der Polypodien übereinstimmend sind.

### Marattia cicutaefolia[1]).

Die flache Endknospe des stattlichen Farrns zeigt in der Scheitelansicht eine dreiseitige Gipfelzelle, ähnlich wie Aspidium filix mas; auf Längsschnitten sehr steile Stellung der Seitenwände der Scheitelzelle sowohl, als ihrer Nachbarinnen (T. XI, f. 3). Die Anlagen junger Wedel umstehen in einer Spirale das flach kegelförmige Stammende. Die letztgebildeten erscheinen als spitzkonische, vorn her abgeplattete Wärzchen aus Zellgewebe, kaum zu unterscheiden von den ersten Anlagen der Wedel grösserer Polypodiaceen.

Während bei weiterem Längenwachsthum der Scheitel des jungen Wedels nach vorn sich überneigt, tritt, zunächst an seiner Vorderfläche, die Stipula auf als ein dieser angesetzter Querwulst (T. XI f. 4). Bald darauf wächst aus jedem der Seitenränder der Wedelanlage eine nach vorn gerichtete häutige Zellenmasse vor; beide verwachsen an ihren dem Wulste der Vorderseite zugewendeten Flächen mit dessen Seitenrändern (T. XI f. 4, 5). Die Vorderränder beider seitlicher Lappen der Stipula bleiben frei. Bei ihrer schnellen weiteren Entwickelung umhüllen sie beinahe vollständig die jüngeren Theile der Stammknospe. Die oberen Ränder der beiden Seitentheile der Stipula wachsen indess rasch und stark auf- und rückwärts; Kappenform annehmend umhüllen

1) In de Vriese's und Harting's Monographie des Marattiacées (Leyde et Düsseldorf, 1853, p. 49 u. 51) finden sich Angaben über die Entwickelung der Blätter der Marattiaceen, welche, wenn begründet, diesen Vorgang als einen sehr eigenthümlichen hinstellen würden. „Der Bildung jedes Wedels geht die seiner Perula voraus... Sie bedeckt auch noch die jüngeren Wedel zum Theil . . . Das Zellwärzchen, als welches der jüngere Wedel seitlich neben der Terminalknospe erscheint, besteht bei Angiopteris ursprünglich aus Zellen gleicher Grösse und gleicher Vermehrungsfähigkeit. Die äusseren wachsen und vermehren sich schneller; in Folge davon trennen sie sich von den inneren. Jene werden der häutige Theil der Perula; diese der Wedel." Meine Beobachtungen an Marattia cicutaefolia, von der Angiopteris in diesen Beziehungen zuverlässig nicht abweicht, widersprechen dem Allen aufs Entschiedenste.

sie übereinander greifend die fürerst nur langsam sich verlängernde Spitze der Wedelanlage (T. IV f. 8—12). So ist die Perula in allen Theilen angelegt, aber nichts weniger, als eine organisch geschlossene Hülle; ihr Haupttheil, die beiden häutigen Lappen, welche die eingerollte Frons umschliessen, besteht aus zwei, völlig gesonderten, nur übereinander klappenden Hälften, die auch da eine weite Oeffnung lassen, wo sie mit dem der Vorderfläche der Wedelanlage entsprossenen Theile der Stipula zusammentreffen (T. XI f. 12). Dieses Querjoch der Stipula gabelt sich bei weiterer Entwickelung am oberen Rande in zwei Zellflächen, deren eine rückwärts über die eingerollte eigene Frons hinweg, die andere vorwärts über die jüngeren Wedelanlagen sich krümmt (T. XI f. 13). Bei fernerer Ausbildung werden, wie bekannt, alle Theile der Stipula, besonders aber die Basilaren sehr massig entwickelt zu einem umfangreichen, aussen schwarzroth, innen rosenroth gefärbten, von einem vielverschlungenen Geflecht zahlreicher Gefässbündel und Gummigänge durchzogenen Gewebe, dessen Zellen von grossen Stärkemehlkörnern strotzen. Aber auch jetzt findet nirgends eine Verwachsung der bisher getrennten Stipulatheile statt.

Spreuschuppen und Wurzeln von Marattia unterscheiden sich in ihrer Entwickelung in nichts Wesentlichem von denen der Polypodiaceen. Die Zelle ersten Grades der Wurzel erscheint auf Längs- wie auf Querschnitten der Wurzel dreiseitig (T. XI f. 15).

Es ist den Gärtnern allgemein bekannt, dass Abschnitte der fleischigen Nebenblätter der Marattiaceen zur Anzucht neuer Individuen benutzt werden können. Bei M. cicutaefolia geht diese Vermehrungsweise mit ausnehmender Leichtigkeit vor sich. Es genügt, die Stipulen selbst der allerschmächtigsten Wedel, solchen Exemplaren entnommen, die in ähnlicher Weise erst vor einigen Monaten gezüchtet wurden, in halbquadratzöllige Stücke zu schneiden und in einer verstöpselten Glasflasche sich selbst zu überlassen, um nach zehn bis zwölf Wochen an einzelnen der zahlreichen Gefässbündel entstandene Adventivknospen die Rinde der Stipulastücke durchbrechen zu sehn. Die ersten Wedel dieser Sprossen sind ohne Laminartheil; gänzlich niederblattartig (T. XI f. 2).

# IV.

## UEBER DIE OPHIOGLOSSEEN.

### Keimung und Entwickelung des Botrychium Lunaria Sw.

Die Mondraute keimt unterirdisch. Man findet an Orten, wo die Pflanze häufig, in der Nachbarschaft ausgewachsener Individuen bisweilen ihre Keimpflanzen[1]). Sie sehen abgerissenen Stücken verzweigter Wurzeln der Pflanze nicht unähnlich (T. XII f. 8—11), erweisen sich aber bei genauer Untersuchung an allen Enden organisch geschlossen. Im Vereinigungspunkte der Wurzeln findet sich ein nach oben vorspringender Höcker (T. XII f. 11, 12). Die mikroskopische Zergliederung lässt in einer tiefen, fast geschlossenen Einsenkung dieses letzteren ein Knöspchen erkennen. Bei Nachsuchungen, die Irmisch und ich im September 1854 nahe bei Sondershausen gemeinschaftlich anstellten, wurden einen bis drei Zoll unter der Erdoberfläche nicht allein Reihenfolgen unzweifelhafter Uebergänge von jenen Gebilden zu erwachsenen Botrychium-Pflanzen gefunden. sondern auch Keimpflänzchen, denen noch das Prothallium anhaftete.

Das Prothallium von Botrychium (T. XII f. 1) ist eine eyförmige Masse festen Zellgewebes, deren grösster Durchmesser nicht über eine halbe Linie, oft noch weit weniger beträgt; aussen lichtbraun, innen gelblich weiss von Farbe, allseitig mit spärlichen, mässig langen Wurzelhaaren besetzt. Die Zellen, deren Grösse vom Mittelpunkte nach der Peripherie hin abnimmt, sind vollgestopft mit grösseren und kleineren

1) Die Keimpflanzen, an denen vorstehende Untersuchungen gemacht wurden, stammen aus der Nähe von Sondershausen; ich verdanke ihre Mittheilung der Güte meines Freundes Prof. Irmisch daselbst.

Klumpen halbdurchsichtigen, auf Jodzusatz sich nicht bläuenden Stoffes. Auf seiner der Erdoberfläche zugekehrten Seite trägt das Prothallium vorzugsweise Antheridien, auf der entgegengesetzten Archegonien. Die ersteren erscheinen als Höhlungen in der Masse des Prothallium, welche mit sehr enger Mündung nach aussen sich öffnen (T. XII f. 1, 2, 7$^b$). Die Samenfäden unterscheiden sich von denen der Polypodiaceen kaum anders, als durch die etwa um die Hälfte beträchtlichere Grösse. Die Wandungen entleerter Antheridien färben sich lichtbraun, körnige Substanz ist ihnen angelagert. Die Archegonien (T. XII f. 1, 6$^b$) sind dem Prothallium vollständig eingesenkt, stimmen aber in ihrer übrigen Beschaffenheit mit denen der Farrnkräuter überein. Künstlich ausgesäete Sporen nahmen um das Doppelte an Grösse zu, veränderten sich aber nicht weiter. Einem Prothallium anhängend wurde die Haut einer solchen vergrösserten Spore gefunden, kenntlich durch ihre in Winkeln von 120° zusammentreffenden vorspringenden drei Leisten der Aussenfläche (T. XII f. 3).

Die Lage des Embryo zum Prothallium weicht weit ab von der bei Polypodiaceen und Rhizocarpeen vorkommenden; Botrychium schliesst in dieser Beziehung sich an diejenigen Gefässkryptogamen an, deren Prothallium, gleich dem der Ophioglosseen, chlorophylllos ist (Isoëtes, Selaginella). Der Vegetationspunkt des Embryo liegt nahe dem Scheitelpunkte der Centralzelle des Archegonium; die ersten Wurzeln entstehen unter ihm, nach dem Grunde des Archegonium hin (T. XII f. 6$^b$, 7$^b$). In Folge der gewöhnlichen Richtung der Archegonien mit der Mündung nach unten wird der Embryo zu einer halben Wendung genöthigt, um seine Knospe aufwärts zu kehren, so dass man das Prothallium ihm scheinbar seitlich ansitzend, nicht aufsitzend findet.

Die jüngsten im Zusammenhange mit Prothallien beobachteten Keimpflanzen zeigten mindestens zwei Wurzeln und ausserdem neben dem Vegetationspunkte einen halbkugeligen bis eyförmigen Höcker (T. XII f. 4—7 *a*), bald mehr, bald minder entwickelt. Sein Aeusseres ähnelt nur entfernt (durch die Farbe) den Wurzeln; sein innerer Bau weicht von dem ihrigen weit ab: der halbkugelige Körper besteht aus weiten, parenchymatischen Zellen, die nach der Aussenfläche hin allmälig kleiner und platter werden; ein rudimentäres Gefässbündel, nur aus dünnwandigen Prosenchymzellen, mit Ausschluss von Gefässen bestehend, reicht vom nächsten Wurzelgefässbündel aus eine kurze Strecke in die Zellengewebsmasse. Diese Structur, wie auch die Stellung des Höckers

an der Keimpflanze, entsprechen völlig denen des Organs am Embryo der Polypodiaceen und anderer Gefässkryptogamen, welches ich als die in der Entwickelung stehen bleibende erste Achse des Embryo betrachte; dem „Primordialgewebe des Embryo, welches an seiner Seitenfläche die Bildungszellen für weitere Entwickelung trägt[1]).

Diese primäre Achse mag bei Botrychium, ungewöhnlich in die Dicke sich entwickelnd, aus dem aufreissenden Prothallium seitlich hervortreten. Oberhalb des Höckers stehen die Wurzeln, die älteste längste ihm zunächst; diese in der Richtung ihm gewöhnlich entgegengesetzt. Die höchste Stelle des Keimpflänzchens nimmt der Vegetationspunkt ein, das weiterer Entwickelung fähige Ende der secundären Achse des Embryo (T. XII f. 6[b], 7[b]). Dieses Knöspchen, eine flach kegelförmige Gruppe dünnwandiger Zellen, befindet sich auf dem Grunde einer engen kurzen Querspalte des stumpfen Scheitels der Keimpflanze: der engen Oeffnung des scheidig geschlossenen, niederblattartigen ersten Wedels des Keimlings (T. XII f. 7[b]).

Auch Keimpflänzchen minderer Entwickelung, als die eben beschriebenen, wurden mehrfach gefunden (T. XII f. 8, 9). Sie bestanden nur aus dem kugeligen Höcker und der ersten, oder der ersten und der eben hervorsprossenden zweiten Wurzel. Der Vegetationspunkt lag unmittelbar an der Oberfläche des Höckers. An diesen Pflänzchen war keine Spur vom Prothallium mehr wahrzunehmen. Sie waren vermuthlich eben so alt, wie die oben erwähnten, nur verkümmert und in der Entwickelung aufgehalten.

An die Beschaffenheit des Vegetationspunktes der Keimpflanze von Botrychium knüpft sich in sofern ein besonderes Interesse, als sie wesentlich zur Entscheidung der Frage beitragen muss, welche der hier widerstreitenden Auffassungen die berechtigtere sei. Röper[2]) nimmt an, dass der eigentliche Stängel senkrecht, aber wegen gar nicht entfalteter Internodien nur unmerklich sich erhebt, und jedes Jahr zwei Blätter oder Wedel erzeugt, deren Stiele aber weit hinauf zusammenwachsen und folglich die eigentliche Stängelspitze, nebst der gleichfalls aus zwei, ihnen in jeder Beziehung gleichenden Blättern bestehenden Knospe einschliessen. A. Braun[3]) wies nach, „dass der zellige Körper

1) Griesebach, Jahresber. 1852, S. 404.

2) Linnaea, Bd. I. S. 460; zur Flora Mecklenburgs I, S. 110.

3) Flora 1839, S. 301.

aus welchem bei Ophioglossum die Blätter hervorgehen, kein besonderes Scheidenblatt, auch kein Stipular- oder Ligulargebilde sein könne, sondern, dass es ein Zellkörper ist, der das Bildungscentrum umhüllt, und innerhalb dessen die Blätter in regelmässig spiraliger Succession sich bilden und verweilen. Jedes Blatt bildet sich in diesem Korper seine eigene Zelle, welche mit dem Wachsthum des Blattes sich vergrössert, allmälig kegelförmig erhoben und endlich scheidenartig durchbrochen wird. Die Aehre von Ophioglossum ist axillär; sie ist das einzige zur Ausbildung kommende Blatt eines Auges in der Achsel des sterilen Blattes... Botrychium hat den umhüllenden Zellkörper nicht, wogegen die Blätter selbst bei dieser Gattung sich umscheiden." Ich selbst habe versucht, den wesentlichsten Zug der Braun'schen Auffassung auch auf Botrychium zu übertragen, indem ich annahm, dass jedes der gleichzeitig sich entfaltenden Wedelpaare in einem völlig geschlossenen Hohlraume die Basis des nächstälteren Wedelpaares entstehe. Somit sei der Stamm von Botrychium ein Sympodium der Basilarstücke auf einander folgender Jahressprossen [1]. Dieser Anschauung trat auch Schacht bei, indem er aussprach, dass Botrychium nur durch Adventivknospen sich fortpflanze [2].

Es beruhen diese Ansichten indessen auf dem — durch die Undurchsichtigkeit der Gewebe leicht entschuldigten — Uebersehen der sehr engen Verbindungsstellen der Höhlen von Wedelpaaren verschiedenen Alters unter sich, mit der Atmosphäre und dem bisher gänzlich unbeachtet gebliebenen niedrigen Hohlraume über dem als Endknospe des Stammes zu betrachtenden Vegetationscentrum.

Auch der zweite, auch der dritte Wedel des keimenden Botrychium sind noch niederblattartig, von weisslicher Farbe, zusammengesetzt aus langgestreckten an festen Inhaltstoffen armen Zellen; doch trägt bisweilen schon der zweite, stets der dritte ein grünliches Spitzchen (T. XII f. 15): die erste Andeutung der Spreite. Am vierten wird dieser grüne Theil weiter ausgebildet: er enthält jederseits zwei bis drei Fiederklappen, zwischen deren untersten die Anlage des fruchtbaren Wedels, zunächst als halbkugeliges Knöpfchen auftritt. Sie entwickelt nur wenige, meist zwei einfache Verzweigungen. Dieses Wedel-

1) Vergl. Untersuchungen, S. 88.

2) Pflanzenzelle, S. 304.

paar erhebt sich, den die Hauptmasse des dritten Wedels ausmachenden Scheidentheil spaltend, in der nächsten Vegetationsperiode über die Erdoberfläche, und stellt so ein zwar winziges, aber in keinem wesentlichen Theile von den älteren abweichendes Individuum der Mondraute dar. Ob auch an der Keimpflanze, so lange sie völlig unterirdisch lebend keinen ihrer Theile zum Licht emporsendet, analog den erwachsenen, jährlich nur einer der niederblattartigen Wedel entwickelt wird, bleibe dahin gestellt. Es ist sehr unwahrscheinlich; vermuthlich erfolgt die Bildung des ersten bis dritten Wedels in der nämlichen, ersten Vegetationsperiode der Keimpflanze, die sonach im zweiten Jahre ihres Daseins den ersten grünen und zugleich den ersten sporentragenden Wedel entfalten würde.

Jedes neue Wedelpaar erscheint neben dem fast ebenen Stängelende der erwachsenen Pflanze als niedrige, flach kegelförmige Erhabenheit. Zunächst entwickelt sich der basilare Scheidentheil durch lebhafte Vermehrung der Zellen besonders in Richtung einer durch die Mittellinie des Organs gelegten, zur Längsachse des Stammes radialen Ebene, so dass die Anlage des zur Entfaltung im drittnächsten Frühlinge bestimmten Wedelpaares die Endknospe des Stängels nach Art des Cotyledons einer Liliacee bedeckt. Der Scheitel der Wedelanlage ist zu dieser Zeit fast halbkugelig, ohne Spur einer Theilung. Der Vorderrand einer Wedelbasis steht nicht in organischem Zusammenhang mit dem Gewebe des Stammendes, auf welchem er ruht; hier findet sich eine zwar niedrige, aber verhältnissmässig breite Spalte (T. XII f. 16$^b$, 17). Erst im zweiten Sommer wächst aus dem zugerundeten Gipfel der Wedelanlage eine flache Zellenmasse hervor, die Anlage des sterilen Wedels, an welchem zunächst die untersten Fiederlappen der Spreite auftreten. Während nun an dem fortwährend sich verlängernden Ende des Zellkörpers die nächsten vier bis sechs Abschnitte der sterilen Frons sichtbar werden, zeigt sich dicht unter den ältesten Fiederlappen derselben, beinahe zwischen ihnen, ein knopfförmiger Zellenhöcker: der Anfang des fruchtbaren Wedels. Soweit entwickelt sich das Wedelpaar bis zum Hochsommer des zweiten Jahres. Bis zum nächsten Vorfrühling ruht seine weitere Ausbildung. Während dieser Zeit bleibt der Querspalt, welcher den Vorderrand der scheidigen Wedelbasis von dem darunter liegenden Gewebe trennt, auf eine kurze Strecke noch offen; es besteht ein directer Zusammenhang zwischen den Hohlräumen,

welche das im zweitnächsten, im drittnächsten Jahre zur Entfaltung kommende Wedelpaar und die Terminalknospe einschliessen. Erst in der Vegetationsperiode, in welcher sämmtliche Theile des Wedelpaares ausgebildet werden, — vom zwölften Monate vor dem endlichen Hervorsprossen aus dem Boden ab — obliterirt jene Querspalte, während aus dem Höcker vor den Einfügungsstellen der untersten Abschnitte des sterilen Wedels die Verzweigungen des fertilen (gleich denen des sterilen und der Farrnwedel in centrifugaler Entwickelung) hervorgehen.

### Entwickelung der Vegetationsorgane von Ophioglossum vulgatum L.

Die dicke Hülle aus Zellgewebe, welche fest anliegend die jungen, noch unentfalteten Wedel von Ophioglossum umgiebt, ist nicht vollständig geschlossen. An ihrer, dem nächstälteren, aus seiner Hülle hervorgebrochenen Wedel zugekehrten Seite zeigt sie eine enge Oeffnung, welche von einem Büschel gegliederter Haare (den einzigen an dieser Pflanze vorkommenden Appendiculärgebilden der Epidermis) umgeben wird (T. XI f. 16). Auch nach Innen zu ist der den ältesten der verhüllten Wedel bergende Hohlraum nicht geschlossen. Ein enger, cylindrischer Gang führt von seiner Vorderseite in die Höhlung, welche den nächstjüngeren Wedel umschliesst; aus dieser in gleicher Weise in die Höhlung, in welcher der zur Entfaltung im drittnächsten Jahre bestimmte Wedel sich entwickelt, und diese endlich steht in offenem Zusammenhange mit dem engen Raume über dem flachen Stammende (T. XI f. 16, 17).

Die Wedel umstehen das Stammende in nach $^2/_5$ links aufsteigender Spirale, wie auf Querschnitten des Stammes deutlich an den Durchgangsstellen durch das Rindenparenchym der, vom Gefässbündel-Cylinder des Stamms schräg aufwärts zu Wedeln abgehenden Gefässbündel deutlich zu sehen ist (T. XI f. 18, 18[b]) Der junge Wedel tritt neben dem tief eingesenkten, fast flachen Stammende als schlanker, kegelförmiger Höcker auf, aus dessen Vorderseite zeitig ein fleischiger, flacher Auswuchs, ein Stipulargebilde wie bei Marattia hervorspriesst (T. XI f. 17[b]).

Diese Zellenmasse entwickelt sich stärker in die Breite, als der Theil des Wedels oberhalb ihrer Ansatzstelle. Sie nimmt etwa zwei Fünftel, der Wedel ungefähr ein Drittel von der Zone des Stammes ein, auf welcher beide stehen. Indem nun das achselständige Nebenblatt mit

seinem Vorderrande der Vorderfläche desjenigen des schräg gegenüberstehenden, nächstälteren Wedels sich anlegt, an seinen Seitenrändern aber sofort mit den (unter sich bereits verwachsenen, den jüngsten Wedel, hinter dem sie stehen, beträchtlich überragenden) Stipulen der rechts und links benachbarten älteren Wedel[1]) verwächst, wird der Hohlraum gebildet, welcher den jungen Wedel umschliesst. Die Wandungen der Höblung sind viererlei verschiedener Abstammung: die der Vorderfläche des eingeschlossenen Wedels zugekehrte Wand besteht im unteren Theile aus der Rückseite der ihm selbst angehörigen Stipula, im oberen Theile aus der Vorderfläche des Nebenblatts des nächstälteren Wedels. Die gegen die Ruckseite des Wedels gekehrte Wand des Hohlraums ist zusammengesetzt zum kleineren Theile aus der Vorderfläche des Nebenblatts des zweitjüngeren, zum grösseren aus derjenigen der Stipula des drittjüngeren Wedels. — Die verschiedenen Nebenblätter verwachsen an allen Berührungsstellen, mit Ausnahme derjenigen, welche in eine auf der Scheitelzelle des Stammes errichtete lothrechte Linie fallen. Somit bleibt ein auf die Stammspitze zuführender, sehr enger Kanal offen, in welchen die verschiedenen, Wedel einschliessenden Hohlräume mit kleiner Oeffnung münden (T. XI f. 16, 17).

An gelungenen Querschnitten durch die Region des Stammes, in welcher der Vegetationspunkt liegt, erkennt man im Grunde des auf ihn zuführenden, dicht über ihm etwas sich erweiternden Kanales die dreiseitige Scheitelzelle des Stammes, umgeben von den jüngsten secundären Zellen (T. XI f. 19). Längsschnitte durch die Endknospe (T. XI f. 17[b]) zeigen im höchsten Grade die tiefe Einsenkung der Stammspitze in das vorzeitig sich entwickelnde peripherische Gewebe, eine Erscheinung, die hier wie anderwärts beruht auf früher starker Zellvermehrung in die Dicke bei sehr geringer, hier fast unterdrückter Zellvermehrung in die Länge.

Der Gefässbündelverlauf von Ophioglossum ist einfach: ein cylindrisches Netz von Maschen, deren eine jedem Wedel entspricht, und zu ihm, aus ihrem Scheitelwinkel, ein Gefässbündel entsendet. Häufig aber wandelt sich das ganze die Maschen erfüllende Zellgewebe zu Treppengefässen um, so dass der Stamm auf beträchtliche Strecken dann einen

1) Des zweiten und dritten, von dem Wedel rückwärts gezählt, welcher uns beschäftigt.

geschlossenen Cylinder aus Gefässzellen zeigt. Bisweilen findet dies Vorkommen nur in der einen Längshälfte des Stammes statt, während in der anderen die Vertheilung der Gefässbündel noch die nämliche, in Schleifen, ist, wie in der Knospengegend. — Wurzeln — auffällig durch spärliche Entwickelung der Wurzelmütze — entspringen aus den die Schleifen des Gefässbündelnetzes des Stammes seitlich begränzenden Bündeln; ihre Stellung ist keine in Bezug zu den Wedeln bestimmte. Auch Ophioglossum vulgatum vermehrt sich häufig, wie andere Arten der Gattung,[1]) durch Wurzelbrut; doch ist diese Fortpflanzungsweise hier keine für die Oekonomie der Pflanze so nothwendige, wie bei Ophioglossum pedunculosum, einer Art, die monokarpisch genannt werden kann, indem ihre Sprossen, wenn sie Sporangien hervorgebracht haben, ganz in der Regel abzusterben pflegen, — sie perennirt so gut als ausschliesslich durch die Adventivsprossen der Wurzeln[2]).

Das Auftreten der fertilen Wedel an der Vorderfläche der sterilen ist bei Ophioglossum das Gleiche wie bei Botrychium und berechtigt zu dem nämlichen Schlusse: dass der fertile Wedel eine Sprossung des sterilen sei.

---

1) Bd. 2 dieser Abhandlungen, S. 133, Anmerkung.

2) Wie Pyrola uniflora, s. Irmisch, Berl. bot. Zeitung. 1856.

# V.

## UEBER DIE KEIMUNG DER SALVINIA NATANS, MICH.

Unsere Kenntniss von der Keimung der Salvinia ist auch nach den neueren Untersuchungen[1]) noch in mehreren Stücken mangelhaft. Die Entstehung der von mir aufgefundenen, Samenfäden erzeugenden Cysten ist noch nicht völlig aufgeklärt, wenn auch Milde meine Vermuthung bestätigte, welche sie für ihrer Exosporien entledigte primäre Zellhäute von Mikrosporen hielt. Die Art, in welcher die Mutterzelle des Prothallium[2]) zu dem Kissen aus Parenchym sich umwandelt, als welches das Prothallium dann erscheint, wenn es die drei Lappen des Scheitels der Makrospore aus einander treibend ans Licht tritt, ist unbekannt; ebenso die ersten Entwickelungsstufen des Embryo. Endlich ist auch in der Weise der Entfaltung der beblätterten Achse Einiges noch dunkel[3]).

Bei sorgfältiger Zergliederung von Mikrosporangien unter dem Mikroskope Anfang März gelang es, aus der zähen Inhaltsmasse, den aufgelockerten und verklebten Exosporien der Mikrosporen, die primären Zellen derselben unverletzt zu sondern. Vereinzelt erscheinen sie als bereits zur Eyform gestreckte Zellchen von 17½ M.M.M. grösstem Durchmesser; mit trübem körnigem Inhalte, und von lichterer Flüssigkeit erfülltem kugeligem Zellkerne (T. XIII f. 2). In der letzten Hälfte

1) Meiner selbst: Berliner botan. Zeitung 1849, Sp. 793; und vergleichende Untersuchungen S. 109. — Milde in N. A. A. C. L. XXIII, 2, S. 642.

2) Vergleichende Unters. T. XXII f. 1.

3) Bei Breslau gewachsene, fruchttragende Pflanzen der Salvinia natans, welche Milde im Herbste 1853 sehr reichlich mir mitzutheilen die Gefälligkeit hatte, und die im März 1854 keimten, lieferten den Stoff zu den nachstehend mitgetheilten Untersuchungen.

des März ist der Inhalt durch einen Schnitt geöffneter Mikrosporangien breiig; in körnigem (bei durchfallendem Lichte bräunlich-grauem) Schleime, welcher das Innere erfüllt, liegen die Zellchen frei, jetzt durchsichtigen Inhalts und meist quer getheilt (T. XIII f. 1). Fernere Theilungen der Hälften führen zur Ausbildung des mehrzelligen, eyförmigen Körpers, der Antheridie, in deren Fächern innerhalb sphärischer Bläschen die Samenfäden entstehen [1]. Bei Anwendung von Objectiven grosser optischer Kraft erkennt man, dass die Wimpern der Samenfäden, minder zahlreich, als die der Polypodiaceen, von ungemeiner Länge sind (T. XIII f. 3, 4) [2].

In seinen jüngsten Zuständen stellt das bereits mehrzellige Prothallium als eine der Innenwölbung der Makrospore eingelagerte einfache Zellschicht sich dar (T. XIII f. 7). Von oben gesehen erweist sie sich als von stumpf dreieckiger Gestalt (T. XIII f. 6); aus der Anordnung der Zellen lässt sich schliessen, dass bei den ersten Theilungen der Urmutterzelle durch auf der Haut der Makrospore senkrechte Wände regelmässig je eine dreiseitige und eine vierseitige Theilhälfte gebildet wurde. Schon dann, wenn das Prothallium durch Quertheilung seiner Zellen in der Mitte erst drei Zellenlagen dick geworden ist, wird auf seinem Scheitel das erste Archegonium gebildet [3]. Die Stellung der Zellen des im Längsdurchschnitt gesehenen (zu dieser Zeit von den Lappen der Sporenhaut noch völlig eingeschlossenen, chlorophylllosen) Prothallium macht es deutlich, dass dieses erste Archegonium angelegt wurde durch zweimalige Quertheilung der mittleren Zelle des Prothallium. Die mittlere der drei Tochterzellen wird zur Centralzelle des Archegonium. Sie ist zu Anfang sehr in die Breite gezogen, fast tafelförmig (T. XIII f. 8). Die obere theilt sich zunächst zweimal durch übers Kreuz gestellte Längswände. Die vier Tochterzellen werden später, nach Wölbung der freien Aussenfläche, durch Querwände getheilt (T. XIII f. 9): indem sie an den Berührungskanten aus einander treten, bilden sie den auf die Centralzelle zuführenden Kanal. In die untere der drei, von der mittleren Zelle des Prothallium abstammenden Zellen setzt sich die in der

1) Vergl. Unters. T. XXII f. 13—17.

2) Aehnlicher Beschaffenheit, doch ärmer an Wimpern, deren ich nicht über vier zählte, sind die Samenfäden von Pilularia globulifera, T. XIII f. 33—37.

3) Wie für Salvinia und Selaginella bereits früher von mir bemerkt: vergleichende Untersuchungen S. 109 u. 123.

ganzen Masse des Prothallium statt findende Zellvermehrung fort, welche dessen Umfang beträchtlich vergrössert, und so — geraume Zeit nach Anlegung des ersten Archegonium — die drei Lappen der äusseren Sporenhaut [1]) zurück biegt.

Die Bildung der später am Prothallium in Mehrzahl auftretenden Archegonien erfolgt in ähnlicher Weise durch Quertheilung einer der Zellen der Aussenfläche des Prothallium, indem aus der inneren der Tochterzellen die Centralzelle, aus der äusseren die Begränzungszellen des auf sie zuführenden Kanals sich entwickeln. Nach Anlegung solcher Archegonien, welche nahe der höchsten der drei stumpfen Ecken des dreiseitigen, kissenförmigen Prothallium stehen, wiederholt sich bisweilen zu mehreren Malen die Quertheilung in den Deckelzellen der Archegonien und dem sie umgebenden Gewebe. Der auf die Centralzelle solcher Archegonien zuführende Kanal hat eine beträchtliche Länge und gebogenen Verlauf (T. XIII f. 13).

Bei Entstehung des Archegonium ist die Centralzelle von körnigem Schleime völlig ausgefüllt, im Mittelpunkte schwebt ein Kern lichteren Inhalts (T. XIII f. 8). Später, bei Zunahme der Grösse der Centralzelle, sammelt sich das körnige Protoplasma zum Wandbeleg, dem der Kern eingebettet ist. Jetzt zeigen sich in der oberen Wölbung der Zelle eine oder zwei, der Innenwand angeschmiegte, ey- oder birnförmige Zellen, die Keimbläschen (T. XIII f. 9—13). Die Zweizahl derselben (bis jetzt der einzige unter den Gefässkryptogamen beobachtete derartige Fall) ist ziemlich häufig.

Archegonien, die unbefruchtet absterbend sich bräunen, lassen die Reste des Keimbläschens in ursprünglicher Grösse noch erkennen. Solche aber, die durch Erweiterung der Centralzelle und Vermehrung der ihr angränzenden als befruchtet sich zu erkennen geben, zeigen eine beträchtliche Grössezunahme des jetzt die Centralzelle nahezu ausfüllenden Keimbläschens (T. XIII f. 12 [2]). So bald die Ausfüllung voll-

1) Die beiden glasartig aussehenden inneren Schichten derselben bleiben während dieses Vorganges, wie während des ganzen Keimungsaktes, völlig unverändert (T. XIII f. 5); die Angabe ihrer Umwandlung in eine scheinbar zellige Masse ist irrig (Mettenius, Beitr. z. K. d. Rhizocarpeen, S. 17).

2) Es gelang nicht, Samenfäden im Innern solcher Archegonien zu beobachten. — Auch bei Salvinia kommt als Abnormität die bei verschiedenen Moosen und bei Pteris aquilina beobachtete Erscheinung vor, dass der Innenraum des Archegonium sich

ständig. erfolgt die erste Theilung des befruchteten Keimbläschens durch eine quere, zur Längsachse des Archegonium schwach geneigte Scheidewand. In beiden Theilhälften entstehen übers Kreuz gestellte Längs-, darauf wiederholt (zum Theil geneigte) Querwände. Die Reihenfolge dieser Theilungen bindet sich an keine strenge Regel (T. XIII f. 14—17); das Endergebniss aber ist in allen Fällen das gleiche: die Bildung eines eyförmigen, mit seiner Längsachse zu der des Archegonium rechtwinkligen Zellkörpers, dessen eine Spitze, die stumpfere, aus vier im Kreuz stehenden Zellen besteht (T. XIII f. 17[c]), während die andere deutlich eine einzige Scheitelzelle erkennen lässt (T. XIII f. 16, 17[b], 18[a b c]). Ich werde dieses das vordere, jenes das hintere Ende des Embryo nennen.

Am Hinterende mehrt die Zahl der Zellen nach allen Richtungen sich ziemlich gleichmässig (T. III f. 20, 24, 26). Am Vorderende dagegen tritt sehr bald eine besondere lebhafte Zellenvermehrung hervor, welche in der an Umfang zunehmenden, der ursprünglichen Scheitelzelle des spitzen Endes von oben her angränzenden Zelle beginnt mit dem (stetig sich wiederholenden) Auftreten wechselnd nach vorn und hinten geneigter, zu einer durch die Längsachsen des Archegonium und des eyförmigen Embryo gelegten Verticalebene rechtwinkliger Wände. Es entsteht so ein aufwärts gerichteter Auswuchs (T. XIII f. 24—26), der rasch sich verbreitert durch (zwischen die Theilungen durch gegen die Aussenflächen geneigte Wände öfters eingeschobene) Längstheilungen zuerst der Scheitelzelle, später auch anderer Zellen des Vorderrands (T. XIII f. 21, 27) des flach und blattartig werdenden Gebildes. Es ist dasselbe das erste Blatt.

Bald nach seinem Hervortreten wird unter seiner Ansatzstelle, vor seiner Mittellinie, eine Sprossung des Vorderendes des Embryo bemerklich; zunächst ein halbkugeliger, wenig hervortretender Zellhöcker Die Anordnung der Zellen des Embryo, wie sie besonders auf Längsschnitten, durch die Mittellinie des ersten Blattes geführt (T. XIII f. 24), erscheint, lässt schliessen, dass der Höcker gebildet wurde, indem die Scheitelzelle des Vorderendes durch eine, gegen das erste Blatt geneigte, darauf durch eine entgegengesetzt geneigte Wand sich theilte (die Reihenfolge der Theilungen kann auch umgekehrt sein, T. XIII f. 22); Theilungen die regel-

schneller vergrössert, als der kümmerlich sich entwickelnde Embryo, den dann ein weiter Hohlraum umgiebt (T. XIII f. 15).

mässig abwechselnd in der jeweiligen Endzelle von Form eines Kugelausschnitts sich wiederholen. Dieser Auswuchs ist die Hauptachse der Keimpflanze. Rechts und links von ihr entwickelt sich der Rand der Spreite des ersten Blattes zu öhrchenförmigen Anhängseln (T. XIII f. 27, 28). Während diese beiden, über das Ende der Hauptmasse greifend, mehr und mehr sich nähern, gabelt sich zweimal die noch blattlose Spitze des beblätterten Sprosses, in der Regel zuerst nach rechts (die Ansicht von oben, auf die Vorderfläche des ersten Blattes als maassgebend betrachtet), dann nach links den schwächeren Gabelast entsendend (T. XIII f. 28).

Inzwischen vermehren sich die Zellen des Hinterendes des Embryo nur unbeträchtlich. Dasselbe sitzt jetzt dem flachen, verhältnissmässig dicken ersten Blatte, welches die Hauptmasse des Embryo ausmacht, rechtwinklig als stielähnlicher Fortsatz an (T. XIII f. 26, 28$^{a,b,c}$, hier mit *c* bezeichnet). Seine Zellen sind jetzt durchweges ziemlich würfelig.

Dies Wachsthum des ersten Blattes sprengt das Prothallium (T. XIII f. 29). Durch nun eintretende, plötzliche Dehnung der Zellen des Hinterendes des Embryo, rechtwinklig zur Fläche des ersten Blattes (eine Richtung, die mit der Längsachse des Embryo einen Winkel von etwa 30° bildet) wird dieses und die Hauptknospe aus dem Risse hoch empor gehoben (T. XIII f. 30). Es ist also nicht ausschliesslich, nicht einmal vorzugsweise das untere, dem Eingang des Archegonium gegenüberliegende Ende des Embryo; nicht seine (bei Salvinia nur sehr wenig entwickelte) primäre Achse, deren Längsdehnung das stielartige Organ bildet, welches das schildförmige erste Blatt trägt. Den Hauptantheil an der Bildung dieses Stiels hat das Hinterende des Embryo.

Von dem Stiele aus nehmen die Gefässbündel ihren Ursprung. Doch bilden sich innerhalb seiner selbst keine Spiralgefässe aus (die im ersten Blatt und in dem Stängel oberhalb desselben sofort auftreten (T. XIII f. 31); hier bleiben alle Zellen des Bündels dünnwandig. Das zweite und dritte Blatt werden rückwärts von den Gabelungen der Hauptknospe gebildet, ohne dass neue Gabelzweige hinzutreten (T. XIII f. 31, 32). Dann aber verlängern sich die schwächeren Aeste (dabei gewöhnlich nochmals sich gabelnd) zu den blattlosen, ins Wasser herabhängenden Zweigen, den sogenannten Wurzeln.

## ERKLAERUNG DER ABBILDUNGEN.

### TAFEL I.

Pteris aquilina. Keimung.

1. Archegonium nebst den nächst angränzenden Zellen des Prothallium im Längsdurchschnitt; der Embryo besteht aus 4 in der Durchschnittsebene liegenden Zellen. Vergrösserung 300.
2. Vor einiger Zeit befruchtetes und unbefruchtetes Archegonium, von demselben durch das Prothallium geführten Längsschnitte getroffen.

2b. Das Zellennetz des Embryo dieser Figur. Die Linien, welche den Gränzen der Zellen älterer Generationen entsprechen, sind bedeutend verstärkt. Die Zellengruppe *a c* ist die Anlage der Hauptknospe und des ersten Wedels; die Zellengruppe *a d* der Anfang der Wurzel.

3. Ein ähnliches Präparat aus einem weiter entwickelten Prothallium. Die Zelle ersten Grades der Wurzel tritt hier schon sehr deutlich hervor.

3b. Das Zellennetz dieses Embryo, in der Weise bezeichnet wie die Fig. 2b.

4. Längsdurchschnitt des vorderen Theiles eines Prothalliumpolsters, welches ausser dem durch den Schnitt blosgelegten, befruchteten Archegonium, dessen Centralzelle der rudimentäre Embryo nicht ausfüllt, ein zweites befruchtetes Archegonium mit ungleich weiter entwickeltem Embryo trug. Oberhalb des Polsters aus Zellgewebe sieht man einen Theil des vom Schnitt getroffenen häutigen Vorderrandes des Prothallium.
5. Embryo mit mässig entwickelter primärer Achse im Längsdurchschnitt. Das angränzende Gewebe des Prothallium ist in der Zeichnung weggelassen. Die Zelle ersten Grades der Hauptachse ist mit *a*, die der Wurzel mit *w* bezeichnet.
6. Längsdurchschnitt durch das Zellgewebskissen eines Prothallium, welcher ein befruchtetes Archegonium mit einem Embryo ähnlicher Ausbildung wie der Fig. 5 abgebildete, aber mit stark entwickelter primärer Achse halbirte.
7. Vorderende des ersten Wedels eines wenig weiter entwickelten Embryo, von der Fläche (parallel der Ebene des Prothallium) gesehen.

### TAFEL II.

Pteris aquilina.

1. Junge Pflanze, die vor Kurzem das Archegonium gesprengt hat, im Längsdurchschnitt. Ein Theil des Prothallium, dem sie fest anhaftet, ist mit gezeichnet.

1b. Halbschematischer Grundriss einer weiter entwickelten Keimpflanze. *B* primäre

Achse; *A* erster, *D* zweiter Wedel; zwischen beiden ist die Stellung der Scheitelzelle des Stammes angedeutet. *C* erste, *E* zweite, *F* dritte Adventivwurzel.

2. Der Vorderrand des ersten Wedels einer Keimpflanze ähnlicher Entwickelung, von der Vorderfläche gesehen. Vgr. 400.
3. Das Knospenende der Hauptachse einer solchen im Längsdurchschnitt. Vgr. 400.
4. Eine weiter entwickelte Keimpflanze im Längsdurchschnitt durch die Mittellinien der ersten beiden Wedel. Die erste und vierte Adventivwurzel sind vom Schnitte getroffen.
5. Eine Keimpflanze wenig weiter gediehener Entwickelung, im zum vorigen rechtwinkligen Längsschnitt, welcher die zweite und dritte Adventivwurzel traf.
6. Querdurchschnitt des älteren Theiles der Achse eines Monate alten Sämlings. Vgr. 30.
7. 8. Querdurchschnitt derselben näher der Spitze, 8 gleiche Vgr.

8ᵇ. Ein solcher einer nahen anderen Stelle derselben Achse entnommen. Vgr. 5.

9. 10. Einjährige Sämlinge, natürlicher Grösse.

11. 12. Querdurchschnitt der Stämmchen derselben, nahe der Spitze genommen. Vgr. 5.

13. Querdurchschnitt des dritten Wedels einer Keimpflanze. Vgr. 10.
14. Längsdurchschnitt des sehr jungen Wedels eines 1½jährigen Sämlings, an welchem oberhalb des Spreuhaars der Anlage eine Beiknospe sich zeigt. Vgr. 250.
15. Längsdurchschnitt des jungen (einjährigen) Wedels einer erwachsenen Pflanze. Eine stehende Beiknospe ist blosgelegt. Vgr. 10.

15ᵇ. Diese letztere 200fach vergrössert.

## TAFEL III.

### Pteris aquilina.

1. Das Ende eines kräftigen Sprosses im November, natürlicher Grösse. Dem Stammende zunächst sieht man den zur Entfaltung im nächsten Frühjahre bestimmten Wedel; weiter links den unteren Theil des diesjährigen, dessen Spreite bereits abgesprungen.
2. *a*, *b*, *c*, ein ähnlicher Spross im Frühling bis auf die Rindengefässbündel geschält, um deren Verlauf zu zeigen; von rechts, von links und von oben gesehen. Natürliche Grösse.

2, *d*, *e* die Hauptgefässbündel des Sprosses mit ihren zum vorjährigen Wedel abgehenden Verzweigungen.

3. Gabelndes Sprossende im Schnitte durch die seitlichen Längsleisten. Die Gefässbündelscheide der Stammmitte ist durch den Schnitt blosgelegt; doppelt vergrössert.
4. Längsschnitte durch die Gabelungstelle eines Stammes durch das Obere der Hauptgefässbündel geführt, doppelt vergrössert.
5. Querdurchschnitt durch den Stamm an der Abgangsstelle eines Wedels, zeigt die Fortsetzung der Gefässbündelscheiden jenes in diesen. Natürliche Grösse.
6. Querdurchschnitt eines Stammes, doppelte Vergrösserung.
7. Querdurchschnitt eines Stammendes von der S. 630 geschilderten Beschaffenheit, welches keine Wedel mehr, sondern nur noch Gabelungen hervorbringt. Natürl. Gr.

7[b]. Die Spitze desselben im Längsdurchschnitt senkrecht zum Horizont. Vgr. 10.
8. Stammspitze, welche einen sehr jungen Wedel mit Anlage einer Beiknospe trägt. Natürliche Grösse.
8, *b*. Der junge Wedel und die Beiknospe seiner Basis nach Entfernung der Spreuhaare von oben gesehen. Vgr. 20.
8, *c*. Der Gipfel der Beiknospe, Scheitelansicht. Vgr. 150.
9. Wedel zur Entfaltung im nächsten Jahre bestimmt, im Spätherbst; nach Entfernung der Spreuhaare von vorn gesehen. Natürliche Grösse.
9, *b*. Die Anlage der Spreite dieses Wedels, 15fach vergrössert.
9, *c*. Die Spitze derselben in 150facher Vgr.
10. 11. 12. Querdurchschnitte eines Wedelstieles. Fig. 10, dicht am Stamme. Fig. 11 u. 12 etwas höher. Die Gefässbündel sind grau, die Gefässbündelscheiden schwarz gehalten. Vgr. 3fach.
13. Ein Theil des unteren Hauptgefässbündels der Stammknospe 1½ Linie rückwärts von deren Scheitel im Querdurchschnitt. Vgr. 150.
13, *b*. Querdurchschnitt desselben Theils desselben Gefässbündels 1½ Linie weiter rückwärts. Zahl der Zellen während der Verdickung der Wände der Uebrigbleibenden beträchtlich vermindert. Gleiche Vgr. Die verdickten Wände der Gefässzellen sind so dargestellt, wie sie an nicht ganz dünnen Schnitten bei schwächerer Vergrösserung in Folge von Interferenzerscheinungen sich zeigen.
(Durch einen Irrthum des Lithographen ist diese Figur umgedreht.)
14. Zwei Gefässe und benachbarte Zellen eines ausgebildeten Gefässbündels aus einem sehr zarten Querschnitt. Vgr. 500.
15. Längsschnitte vom Rande eines Hauptgefässbündels an der Stelle, wo die Verdickungsschichten in den Spiralgefässen aufzutreten beginnen. Vgr. 500.
16. Aehnlicher Längsschnitt aus einem weiter vorgeschrittenen Gefässbündel, in welchem die Verdickungen der Treppengefässe sich zeigen. Vgr. 200.

## TAFEL IV.

### Pteris aquilina.

1. Scheitelansicht an der Endknospe. Vgr. 300.
1, *b*, *c*. Schematische Darstellung der Formen der Scheitelzelle des Stammes und ihrer jüngsten Tochterzelle. Fig. 4. Scheitelansicht der mittelst eines Querschnitts durch die umgebende gewölbte Rindensubstanz blosgelegten Gipfelregion eines Stammendes. Die strahligen lichteren Stellen drücken den Verlauf der gegen den Vegetationspunkt convergirenden Rindengefässbündel aus. Vgr. 30.
2, *b*. Die Scheitelfläche selbst dieses Stammendes. Sie zeigt in der Mitte die Gipfelzelle, links neben (und über) ihr die Anlage des jüngsten Wedels. Vgr. 300.
3. Das Ende eines sehr kräftigen Sprosses in gleicher Ansicht. Links von der Scheitelzelle die Anlage des jüngsten Wedels. Vgr. 300.
4. Stammende im Längsdurchschnitt senkrecht zum Horizont. Vgr. 300.
5. Ein solches im Längsdurchschnitt parallel dem Horizont. Vgr. 200.
6. Ein ebensolches am Rindengefässbündel links, die ihrer ganzen Länge nach blosgelegte Anlage einer Wurzel. Vgr. 15.
6, *b*. Diese Wurzelanlage in 300facher Vgr.

7. Horizontalschnitt eines Stammendes, welcher mehrere Wurzelanlagen quer durchtraf; die mit *a* bezeichnete genau im Vegetationspunkte. Vgr. 5.
7, *b*. Diese Wurzelanlage 200fach vergrössert.

## TAFEL V.

### Aspidium filix mas.

1. Junges, in der Bildung begriffenes Archegonium im Längsschnitt. Vgr. 300.
2. Ein solches, kurz vor dem Aufbrechen des Scheitels. Vgr. 300.
3. Ein solches nach dem Aufbrechen des Scheitels und nach Bildung des den Hals durchziehenden Canals; noch unbefruchtet. Vgr. 300.
4. Augenblick der Befruchtung. In die Centralzelle des durch zwei Längsschnitte gestreiften Archegonium sind drei sich noch bewegende Samenfäden eingetreten. Die Innenmündung des Halskanals hat sich durch Dehnung der sie umgebenden Zellen bereits wieder geschlossen. Vgr. 300.
5. Archegonien im Längsschnitt, kurz nach der Befruchtung. Das herangewachsene, befruchtete Keimbläschen füllt die Centralzelle noch nicht vollständig aus. Vgr. 300.
6. Längsdurchschnitt des Stückes eines Prothallium, woran ein befruchtetes Archegonium mit durch den Schnitt gestreiftem, mehrzelligen Embryo. Vgr. 200.
6, *b*. Das Zellennetz dieses Embryo; die Gränzen der Zellen sind, je nach ihrem Alter, verschieden dick dargestellt.
7, *b*. Darstellungen ähnlicher, weiter vorgeschrittener Zustände. Vgr. 200.
8. Das Ende des ersten Wedels eines weiter entwickelten Embryo von der Fläche gesehen. Vgr. 300.
9. Keimpflänzchen nach Entwickelung des Wedels, im Längsschnitt. Zwischen der ersten und zweiten Wurzel primärer Achse des Embryo. Vgr. 20.
10. Zehnmonatlicher Sämling im Längsschnitt. Der Höcker unten links ist die primäre Achse des Embryo. Vgr. 20.
11. Der Scheitel des Stammes einer solchen Pflanze, von oben gesehen. Links die Anlage des jüngsten, rechts die des nächsten ältesten Wedels. Die rundlichen Zellen mit körnigem Inhalt sind Mutter- oder Ansatzzellen von Spreuschuppen. Vgr. 200.
12. 13. 14. Querschnitte durch den Stamm eines einjährigen Sämlings, Fig. 12 an der Basis, Fig. 13 in der Mitte, Fig. 14 nahe dem Wipfel genommen. Vgr. 30.
15. Grundriss eines jungen Wedels eines Sämlings, und der jenen umstehenden Spreublätter. Vgr. 30.
16. 17. 18. Querschnitte durch den Stiel eines um denselben ausgebildeten Wedels eines einjährigen Sämlings; Fig. 16 im Grunde, Fig. 17 etwas höher, Fig. 18 noch höher genommen. Vgr. 20.
19—22. Scheitelansichten der Stammenden ausgewachsener Pflanzen; Fig. 19—21 mit rechts gewundener, Fig. 22 mit links gewundener Schraubenlinie der Zellenfolge. Vgr. 200.
23. Endknospe einer ausgewachsenen Pflanze im Längsdurchschnitt. Vgr. 150.

## TAFEL VI.

### Aspidium filix mas.

1. Der obere Theil des Stammes einer erwachsenen Pflanze längs durchschnitten. Aus dem vom Schnitte halbirten älteren Wedel rechts ist das Zellgewebe bis an die Gefässbündel herausgenommen, um deren Verlauf zu zeigen. Natürl. Gr.
2. Eine Schlinge des blosgelegten Gefässbündelnetzes eines solchen Stammes, mit den Stümpfen der, von ihr zu den Wedeln abgehenden Gefässbündel. Vgr. 5.
3. Endknospe in der Scheitelansicht. Vgr. 300.
4. Das obere Ende eines erwachsenen Stammes längs durchnitten. Vgr. 30.
5. Die Endknospe dieses Präparates 200fach vergrössert. Neben dem Scheitelpunkte (k) die Anfangszelle des jüngsten Wedels (w).
6. Ein noch eingerollter Wedel nach Entfernung der Spreublätter von der Rückseite gesehen. An der oberen Hälfte der Anschwellung des Grundes sitzt die Anlage einer Adventivknospe. Natürl. Gr.
7. Der grundständige Theil eines Wedels, dessen Spreite bereits abgestorben. An ihm eine in Entfaltung begriffene Adventivknospe. Natürl. Gr.

7, *b*. Dasselbe Object, bis auf die Gefässbündel vom Rindengewebe entblösst. Natürl. Gr.

8. Die Endknospe eines solchen Sprosses im Längsdurchschnitt. Ueber ihrem Scheitel die aus eingetrocknetem Schleime entstandene Haut (s. S. 646). Vgr. 300.
9. Wurzelspitze im Längsdurchschnitt. Vgr. 200.
10. Eine solche im Querdurchschnitt, der durch den Vegetationspunkt geht, in der Höhe der Linie *a*, *b* der vorigen Figur. Vgr. 300.
11. Die Mittelgegend eines etwas tiefer, in der Höhe der Linie *c*, *d* der Fig. 9 durch die nämliche Wurzelspitze geführten Querschnittes. Vgr. 300.

## TAFEL VII.

1—10. Scheitelansichten von Knospen, 300fach vergrössert.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1—3 | „ | „ | Aspidium spinulosum. |
| 5—8 | „ | „ | „ filix mas. |
| 9 | „ | „ | Pinus balsamea. |
| 10 | „ | „ | „ Abies L. |
| 11 | „ | „ | Robinia Pseudacacia. |
| 12 | „ | „ | Zamia longifolia. |
| 13—16 | „ | „ | Cupressus pyramidalis. |
| 17 | „ | „ | Secale cereale. |

18. Schematische Ansicht der Aufeinanderfolge von 7 Zellentheilungen einer Stammzelle ersten Grades bei $^{5}/_{12}$Stellung, unter der S. 639 ausgesprochenen (in der Natur nicht vorkommenden) Voraussetzung.
19. Schematische Darstellung dreier solcher Theilungen, und der durch Gestaltveränderung der Scheitelzelle hervorgerufenen Verschiebung, nach der S. 641 gegebenen Auffassung. Die ursprüngliche Stellung der älteren Wände ist durch punktirte, die spätere durch volle Linien ausgedrückt; beide sind mit den nämlichen

(arabischen) Ziffern bezeichnet. Die römischen Ziffern beziehen sich auf die Zellen zweiten Grades; II ist die älteste, III die mittlere, IV die jüngste derselben.

20. Schematische Darstellung der durch die nächsten drei derselben Regel folgenden Theilungen hervorgerufenen Verschiebungen.

## TAFEL VIII.

Fig. 1—8. Asplenium filix mas.

1. Ein abgerissener, längere Zeit in geschlossenem feuchtem Raume aufbewahrt gewesener Wedel, der an seinem Grunde eine Adventivknospe entwickelte. Natürliche Grösse.
2. Ein junger Wedel von seinen Spreublättchen umgeben; der eingerollte Laubtheil ist durchschimmernd angedeutet. Natürl. Gr.
3. Der obere Theil eines Gefässbündelnetzes eines Stammes scelettirt; die Spitzen der jüngsten Wedel sind stehen gelassen. Natürl. Gr.
4. Endknospe im Längsdurchschnitt. Vgr. 250.
5. Junger Wedel mit Wurzelanlage im Längsdurchschnitt. Vgr. 300.
6. Ein etwas weiter vorgeschrittener ebensolcher. Vgr. 100.
7. Die Spitze der Spreite eines halb entwickelten Wedels, von oben gesehen. Vgr. 250.
8. Spitze einer aus dem Gewebe des Wedels noch nicht hervorgebrochenen Wurzel im Längsdurchschnitt. Vgr. 250.
9. Scheitelansicht einer von den Anlagen der jüngsten Wedel umstandenen Endknospe des Aspidium spinulosum. Vgr. 250.
10. Das obere Ende des Stammes von Struthiopteris germanica im Längsdurchschnitt. Vgr. 30. An dem entwickelten Wedel links die Anlage einer Adventivknospe.
11. Längsdurchschnitt durch eine Endknospe desselben Farrn. Vgr. 150.
12. Die Anlage zu einer Adventivknospe der Fig. 10, 150fach vergrössert.
13. Asplenium Belangeri: Wedelspindel im Querschnitt und Stück eines Fiederlappens des Wedels im Längsschnitt; an Letzterem eine Adventivknospe. Vgr. 30.

13, *b*. Diese Adventivknospe 300fach vergrössert.

## TAFEL IX.

1. Polypodium cymatodes Kze.: Scheitelansicht der Endknospe und des neben ihr stehenden jüngsten Wedels. Vgr. 200.
2. Niphobolus rupestris: ähnliches Präparat bei gleicher Vgr.
3. Nephrolepis splendens: Scheitelansicht der Endspitze eines Ausläufers. Vgr. 200.
4. Derselbe Farrn: Endknospe eines beblätterten Stamms in Scheitelansicht; gleiche Vgr.
5. Nephrolepis undulata: Scheitelansicht des Endes eines Ausläufers; gleiche Vergrösserung.

6. Derselbe Farrn: Scheitelansicht der (vertrocknenden) Gipfelknospe einer ausgebildeten Knolle. Vgr. 200.
7. Zur Knolle anschwellendes Ende eines Ausläufers desselben Farrn im Längsschnitt; gleiche Vgr.
8. Eine ausgebildete Knolle der Nephrolepis undulata. Natürl. Gr.
9. Der Trieb einer solchen Knolle, von dieser gelöst; — er hat bereits zwei Ausläufer getrieben.
10. Polypodium aureum: ein Stammende, dessen Gefässbündelnetz durch Abschälung der Rinde blosgelegt. Natürl. Gr.
11—13. Spitzen von Stämmen des Polypodium vulgare nach Entfernung der Spreublätter. Natürl. Gr.
14. Polypodium vulgare im Längsdurchschnitt. Vgr. 250.
15—17. Scheitelansichten von Stammspitzen desselben Farrn. Vgr. 250.
18. 19. Polypodium dryopteris: Stammenden in Scheitelansicht. Vgr. 250.

## TAFEL X.

1. Dicksonia rufescens: Stammende im Längsschnitt. Vgr. 10.
2. Derselbe Farrn. Stamm im Querschnitt. Vgr. 20.
3—19. Platycerium alcicorne.
3, *a*. Keimpflanze von vorn gesehen. Vgr. 20.
3, *b*. Dieselbe im Längsdurchschnitt. Vgr. 30.
4. Weiter entwickeltes Keimpflänzchen nach Entfernung der Spreublätter. Vgr. 10.
5—7. Sämlinge verschiedener Entwickelung. Natürl. Gr. Bei Fig. 7 sind die erwachsenen Wedel sämmtlich bis zur Basis weggenommen.
8. Eine halb erwachsene Pflanze von vorn gesehen. Natürl. Gr. Sämmtliche Wedel sind gestutzt.
9. Seitenansicht einer erwachsenen Pflanze nach Entfernung der Spreiten der flachen wie der aufrechten Wedel. Natürl. Gr.
10. Derselbe Stamm nach dem Zurückschneiden der Wedelstümpfe bis nahe an die Stammoberfläche. Natürl. Gr.
11. Ein ähnlicher Stamm, dessen Wedel bis dicht an die Stammoberfläche weggeschnitten. Natürl. Gr.
12. Gefässbündelnetz des Stammes scelettirt. Von oben gesehen. Natürl. Gr.
13. Derselbe von unten gesehen.
14. Querdurchschnitt des erwachsenen Stammes. Natürl. Gr.
15. Querdurchschnitt des Stammes, dicht unter der fortwachsenden Endknospe. Natürl. Gr.
16. Scheitelansicht der Endknospe und der sie umgebenden Wedel. Vgr. 10.
17. Längsdurchschnitt der Rinde einer Wurzel. Vgr. 100.
17, *b*. Einige Zellen derselben, 450fach vergrössert.
18. 19. Scheitelansichten von Stamm-Endknospen. Vgr. 300.

## TAFEL XI.

Fig. 1—15. Marattia cicutaefolia.

1. Stammende im Längsschnitt. Vgr. 10. Die kleinen im Parenchym vertheilten Kreise sind Gummigänge. Tief im Rindengewebe verborgen eine Adventivwurzel. Von dem jüngeren Wedel ist nur ein kleines Seitenstück stehen geblieben, an welchem der entsprechende häutige Seitentheil der Stipula hängt.
2. Längsdurchschnitt einer Adventivknospe der Stipularbasis. Vgr. 30.
3. Endknospe im Längsdurchschnitt. Vgr. 300.
4. 5. Junge Wedel verschiedenen Alters von oben gesehen. Vgr. 10.
6. 7. Ebensolche längs durchschnitten gleicher Vgr.
8. Ein seitlicher Abschnitt eines solchen, den in der Entwickelung begriffenen Seitentheil der Stipula zeigend. Gleiche Vgr.
9. Querdurchschnitt der Ansatzstelle eines weiter entwickelten Wedels; der Kreis in der Mitte bezeichnet die Einfügung des cylindrischen Wedelstiels (in ihm sind die Gefässbündel); das übrige Gewebe gehört der Stipula an. Natürl. Gr.
10. 11. Querdurchschnitte durch Stipula und Stiel desselben Wedels, eine um zwei Linien höher. Natürl. Gr.
12. Wedelähnliche Entwickelung im Längsdurchschnitt, doppelt vergrössert.
12, *b*. Seitenhälfte der Stipula dieses Wedels nach Herausnahme des laubigen Theiles.
13. Eine im Längsdurchschnitt geöffnete Stipula eines weiter entwickelten Wedels. Natürl. Gr. In der hinteren Kammer der von Spreuschuppen umgebene Stumpf des cylindrischen Wedelstiels.
14. Scheitelgegend eines halb entwickelten Wedels, von oben gesehen. Vgr. 200.
14, *b*. Eine solche im Längsdurchschnitt. Vgr. 250.
15. Vegetationspunkt einer Wurzel im Querdurchschnitt. Vgr. 300.

16—19. Ophioglossum vulgatum.

16. Längsdurchschnitt eines Stammes Anfang December. Links oben der Stumpf des etwa $\frac{1}{4}$ Zoll langen zur Entfaltung im nächsten Frühjahr bestimmten Wedelpaars. Der Schnitt ist genau durch die Mittellinie des etwas seitlich vor diesem Wedel stehenden Höckers von Zellgeweben geführt, welcher die jüngeren Wedel sämmtlich einschliesst. Vgr. 20.
17. Längsschnitt durch die Mittellinie des zur Entfaltung im nächsten Frühjahr bestimmten Wedels geführt, der Knospengegend eines ähnlichen Stammes. Gleiche Vergrösserung.
17, *b*. Die Endknospe und die beiden jüngsten Wedel dieses Präparates. Vgr. 200.
18. Querdurchschnitt dicht über der Endknospe eines solchen Stammes. Vgr. 20.
18, *b*. Querdurchschnitt durch den nämlichen Stamm $\frac{1}{8}$ Linie tiefer.
19. Querdurchschnitt dicht über der Endknospe, welche man durch die Oeffnung des auf sie zuführenden engen Kanals erblickt. Vgr. 300.

## TAFEL XII.

### Botrychium Lunaria Sw.

1. Prothallium im Längsdurchschnitt, 50fach vergrössert. Oben rechts ein Archegonium: von diesem links fünf Antheridien, deren drei entleert.
2. Antheridien kurz vor dem Aufbrechen im Längsdurchschnitt. Vgr. 300.
3. Hinterende eines Prothallium mit Anhängen der Sporenhaut. Vgr. 300.
4—7. Keimpflänzchen mit anhängenden Prothallien, 6mal vergrössert.
4 u. 7. Von der Seite, Fig. 5 u. 6 von oben gesehen. *p* Prothallium, *a* Ende der primären Achse der Keimpflanze.
6, *b*. Die Keimpflanze. Fig. 6 nebst anhängendem Prothallium längs durchschnitten. *g* das Knospenende der Hauptachse der Keimpflanze. Vgr. 30.
7ᵇ. Die Keimpflanze. Fig. 7 in der Richtung von *a* nach *p* längsdurchschnitten. Vgr. 300.
8. 9. Verkümmerte Keimpflänzchen, deren Prothallien bereits abgestorben. Vgr. 6.
10. 11. 12. Normal entwickelte, etwa einjährige Keimpflänzchen. Natürl. Gr.
13. 14. Keimpflänzchen, deren zweiter Wedel aus dem niedrigen ersten bereits hervorragt, doppelt vergrössert.
15. Eine solche längsdurchschnittene, 20mal vergrössert. Der erste Wedel ist bereits bis auf einen kaum bemerkbaren, häutigen Rand wieder abgestorben. — Im niederblattartigen zweiten Wedel sind die Anlagen des dritten und vierten verborgen.
16. Im September 1854 ausgegrabene Pflanze, parallel der Fläche des zur Entfaltung im nächsten Frühjahre bestimmten Wedels durchschnitten. Natürl. Gr.
16ᵇ. Der untere Theil dieses Präparats, 20mal vergrössert.
16ᶜ. Endknospe dieses Präparats in von rechts nach links umgekehrter Lage, 300fach vergrössert.
17. Durchschnitt der Knospe einer Anfang Juni in voller Vegetation stehenden Pflanze. An dem eingeschlossenen zur Entfaltung im zweitnächsten Jahr bestimmten Wedel ist bereits die Anlage des fertilen sichtbar.

## TAFEL XIII.

### Fig. 1—31 Salvinia natans.

1. Mikrosporangium quer durchschnitten; die Antheridien (Mikrosporen, welche ihre Aussenhäute abgestreift haben) fallen heraus. Vgr. 200.
2. Eine einzelne solche Mikrospore minder entwickelt. Vgr. 200.
3. Samenfaden durch Jod getödtet. Vgr. 500.
4. Ein solcher mit anhängenden Mutterzellchen gleicher Vergrösserung.
5. Ein Stück des Exosporium einer Makrospore im Längsdurchschnitt. Vgr. 300.
   Man unterscheidet drei Schichten davon. Eine dünne innere, eine dickere, mittlere, lichtere und eine sehr dicke äussere, scheinbar zellige.
6. Sehr junges Prothallium freigelegt, mit anhängendem Stück der inneren Sporenhaut. Vgr. 200.
7. Ebensolches und durch die ganze Spore geführten Längsdurchschnitt. Gleiche Vgr.

8. Weiter vorgeschrittenes Prothallium, an dem das erste Archegonium sich entwickelt, in ähnlichem Längsdurchschnitt. Gleiche Vgr.
9. 10. Durch Längsschnitte geöffnete unbefruchtete Archegonien, in welchen Keimbläschen zu sehen. Vgr. 300.
11. Durch einen Querschnitt geöffnetes unbefruchtetes Archegonium mit zwei Keimbläschen. Man blickt von unten in dasselbe und sieht in der Mitte der Zeichnung die Innenmündung des Einführungsganges.
12. Stück eines längsdurchschnittenen Prothallium, an welchem zwei Archegonien sichtbar: ein unbefruchtetes und ein eben befruchtetes. Vgr. 300.
13. Die hohe Ecke eines Prothallium im Längsdurchschnitt, durch welchen ein Archegonium mit ungewöhnlich langem Mündungsgange blosgelegt wurde. Vgr. 300.
14. Dreizelliger Embryo, der die Centralzelle seines Archegonium vollständig ausfüllt. Die Lage der Innenmündung des Kanals desselben ist durch zwei Linien angedeutet. Vgr. 200.
15. Befruchtetes Archegonium mit abnorm vergrösserter Centralzelle, welche vom wenig zelligen Embryo nur zum kleinen Theil ausgefüllt wird. Vgr. 200.
16. Befruchtetes Archegonium mit eingeschlossenem achtzelligem Embryo. Vgr. 300.
17, *a*, *b*, *c*. Sechzehnzelliger Embryo freigelegt, *a* von aussen, seitlich, *b* im Längsdurchschnitt, *c* von hinten gesehen.
18. Etwas weiter entwickelter Embryo ebenfalls freigelegt, *a* von oben, *b* von der Seite, *c* ebenfalls von der Seite um 90° gedreht. Vgr. 20.
19. 20. 21. Weiter vorgerückte Embryonen; Fig. 19 u. 21 ganz, Fig. 20 halb freigelegt. Erstere 200–, letztere 300fach vergrössert.
22. Vom Prothallium umschlossener Embryo. Vgr. 300.
23. Freigelegter Embryo von der Vorderfläche gesehen. Vgr. 200.
24. Embryo vom Prothallium umschlossen; das erste Blatt beginnt sich nach oben zu entwickeln. Vgr. 300.
25. Sporen mit Prothallium und Embryo etwas weiter vorgerückter Entwickelung im Längsdurchschnitt. Vgr. 50.
26. Ein solcher Embryo 200fach vergrössert.
27. Ein solcher Embryo freigelegt, und von der Vorderfläche des ersten Blattes gesehen, an deren unterem Rande das Ende der Hauptachse deutlich hervortritt. Gleiche Vgr.
28. Weiter vorgeschrittener Embryo freigelegt.
28, *a*. Halb von vorn gesehen. Neben dem ersten Blatte *a* tritt die bereits einmal gegabelte, und in der zweiten Gabelung begriffene Hauptachse *b* hervor: hinter ihr das Hinterende der Keimpflanze *c*.
28, *b*. Von vorn, Fig. 28 *c* von oben gesehen. Die nämlichen Buchstaben bezeichnen die gleichen Theile.
29. Keimende Spore, deren Prothallium vom ersten Blatte (nicht von der sich streckenden Achse des Embryo) durchbrochen ist. Vgr. 50.
30. Spore mit Prothallium und Embryo nach Streckung der Achse des letzteren. Vgr. 80.
30, *b*. Die Endknospe dieses Embryo. Vgr. 300.
31. Weiter entwickelte Keimpflanze mit anhängender Spore im Längsdurchschnitt. Vgr. 150.

32. Endknospe einer ähnlich entwickelten Keimpflanze von oben gesehen. Neben dem dritten noch scharf zusammengefalteten Blatte (in der Zeichnung zur linken) das Ende der Hauptachse; unter ihr drei ihrer schwachen Gabelungen, die zu sogenannten Wurzeln sich entwickeln.

Fig. 33—38. Pilularia globulifera.

33—37. Samenfäden in verschiedenen Lagen; Fig. 34 einer, der eben aus seinem Mutterzellchen sich hervorringt. Vgr. 500.

38. Der obere Theil einer keimenden Makrospore; im Eingange der Archegonienmündung ist ein Samenfaden sichtbar. Vgr. 150.

---

# INHALT.

## III. UEBER ENTWICKELUNG UND BAU DER VEGETATIONSORGANE DER FARRNKRAEUTER.





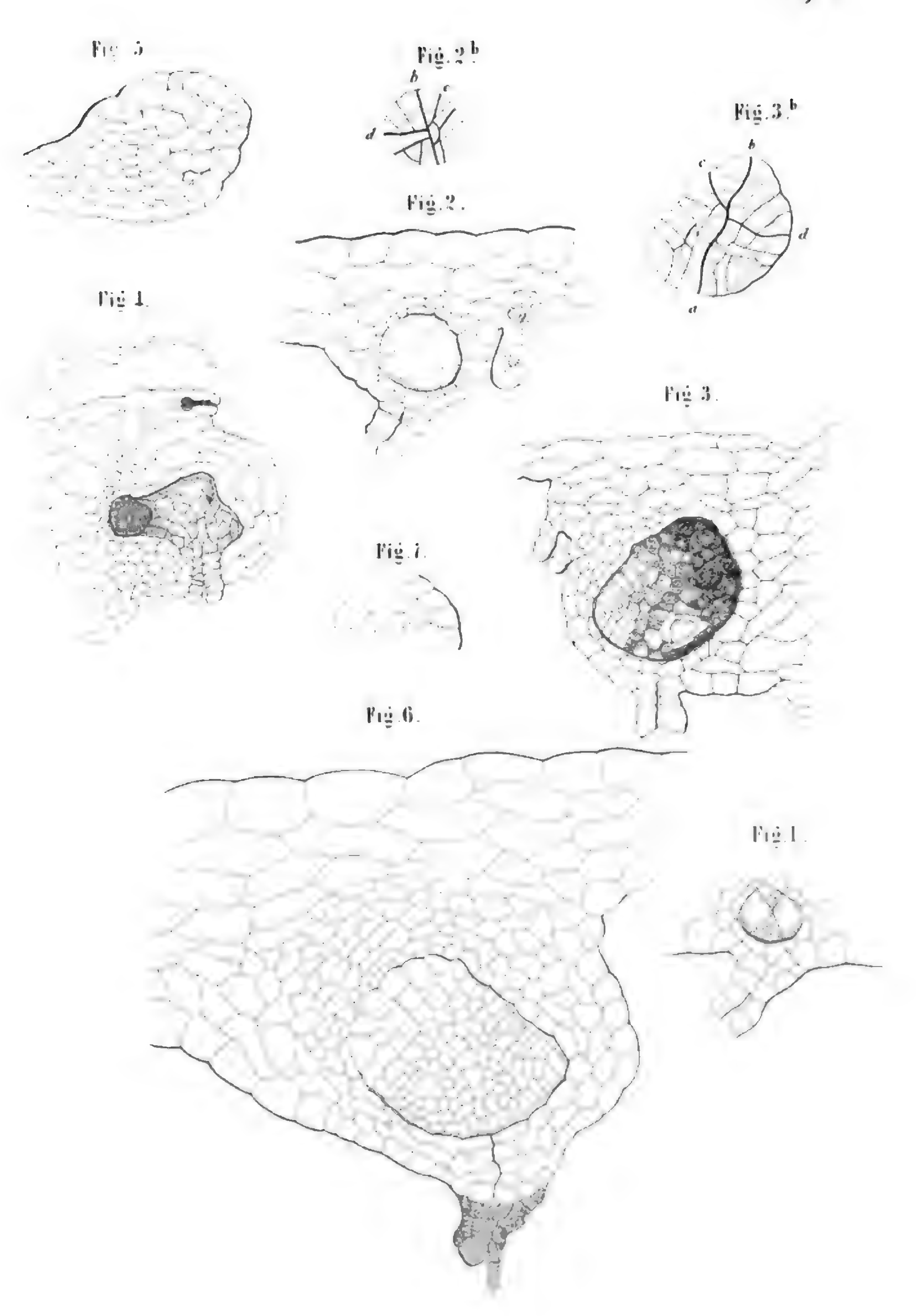
## IV. UEBER DIE OPHIOGLOSSEN.



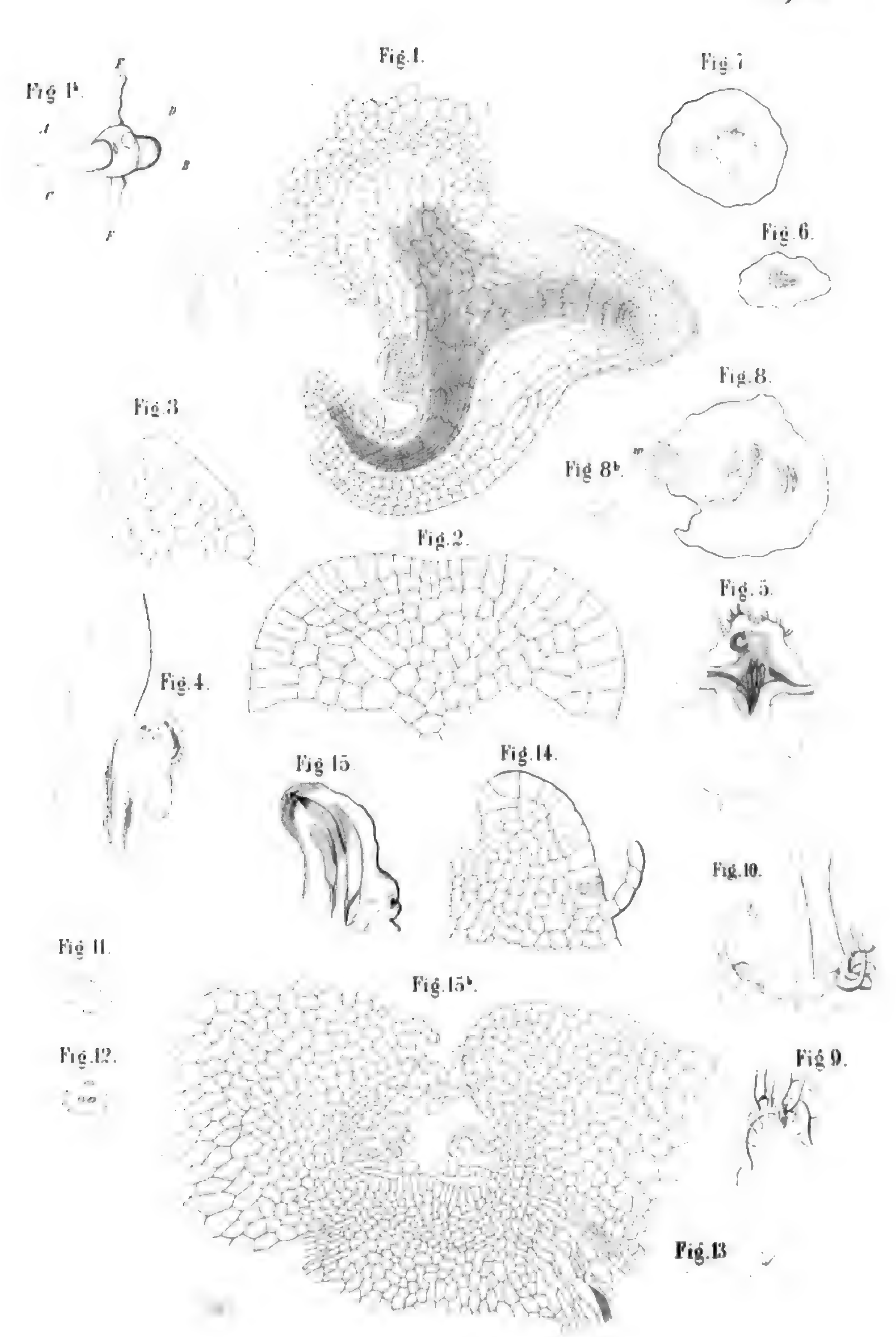
## V. UEBER DIE KEIMUNG DER SALVINIA NATANS.

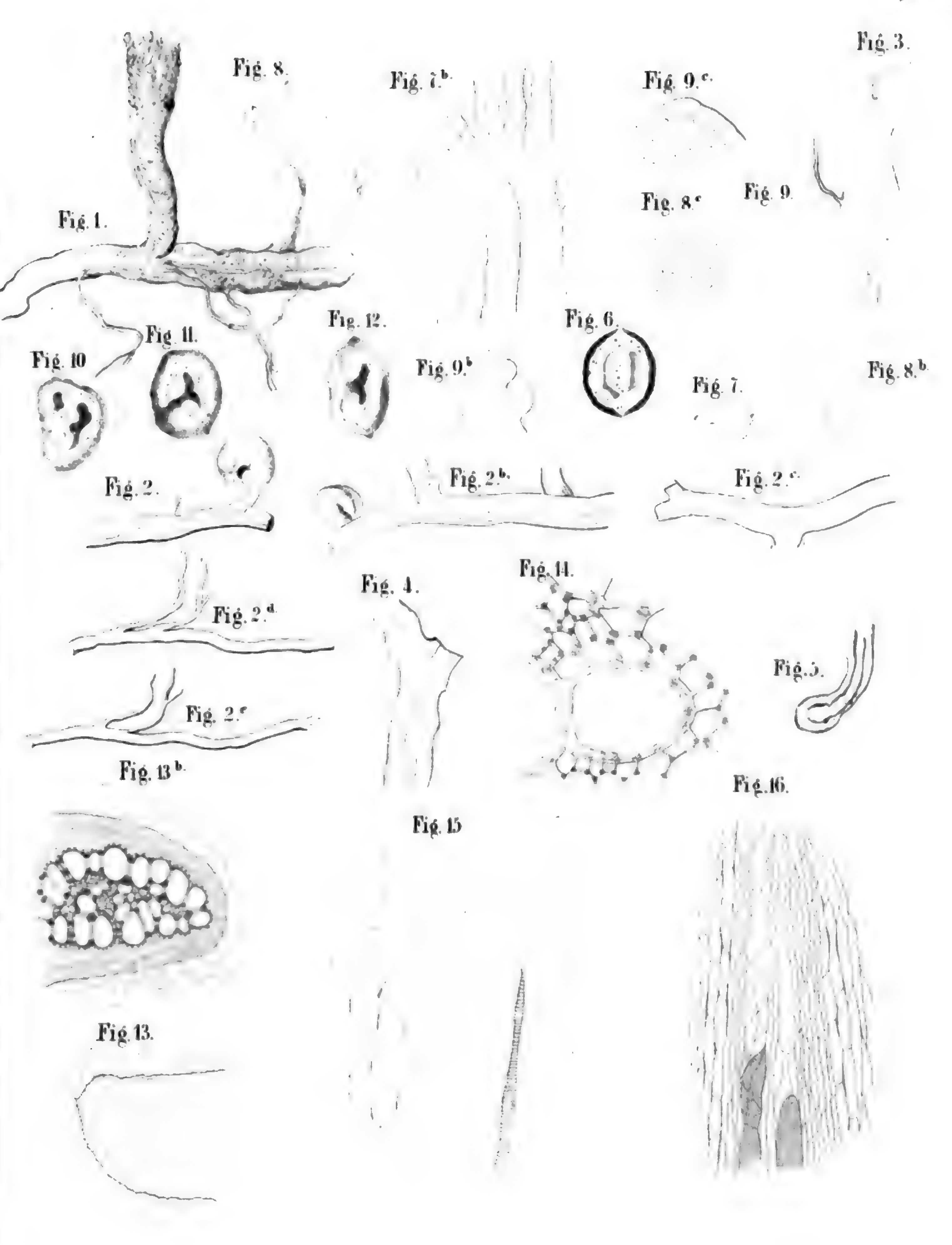


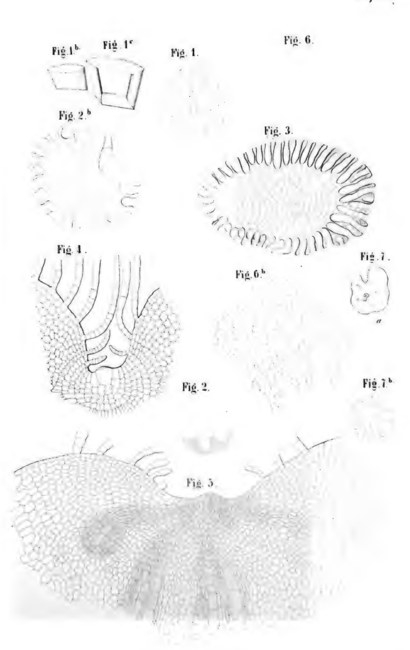
Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.


Fig. 5.
Fig. 2.b
b
c
d
Fig. 3.b
b
c
d
a
Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 3.
Fig. 7.
Fig. 6.
Fig. 1.

Taf. II


Fig. 1b.
Fig. 1.
Fig. 7
Fig. 6.
Fig. 8.
Fig. 8b.
Fig. 3
Fig. 2.
Fig. 5.
Fig. 4.
Fig. 15
Fig. 14.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 15b.
Fig. 12.
Fig. 9.
Fig. 13


Fig. 1.
Fig. 8.
Fig. 7.b
Fig. 9.c
Fig. 3.
Fig. 8.c
Fig. 9.
Fig. 10
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 9.b
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.b
Fig. 2.
Fig. 2.b
Fig. 2.c
Fig. 2.d
Fig. 4.
Fig. 14.
Fig. 5.
Fig. 2.e
Fig. 13.b
Fig. 16.
Fig. 15
Fig. 13.


Fig. 1.b
Fig. 1.c
Fig. 1.
Fig. 6.
Fig. 2.b
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 6.b
Fig. 7.
a
Fig. 2.
Fig. 7.b
Fig. 5.

Taf. V.

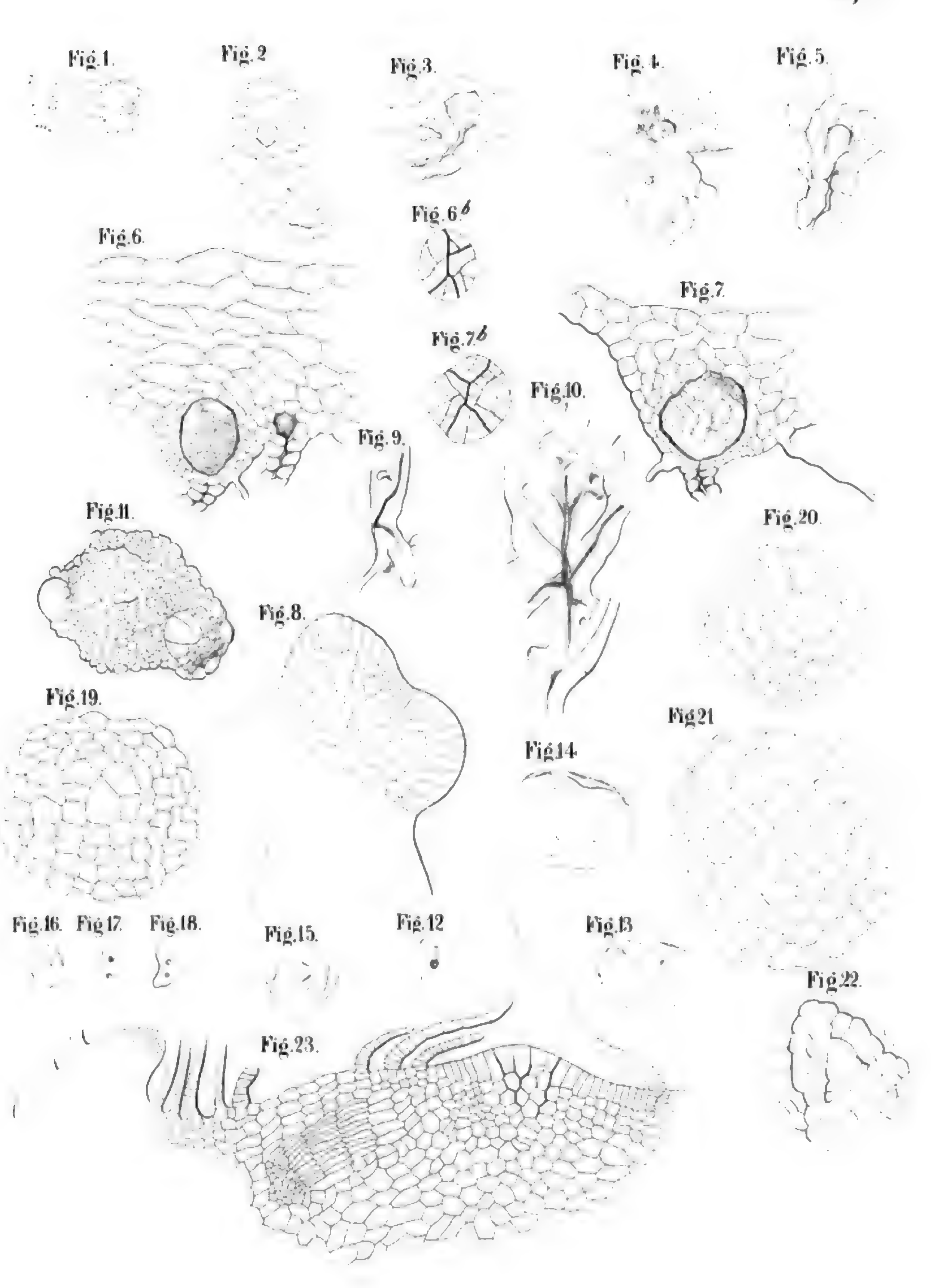
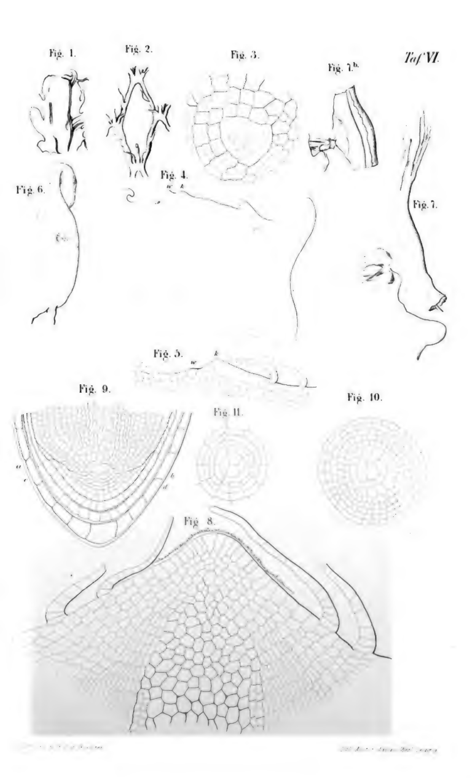
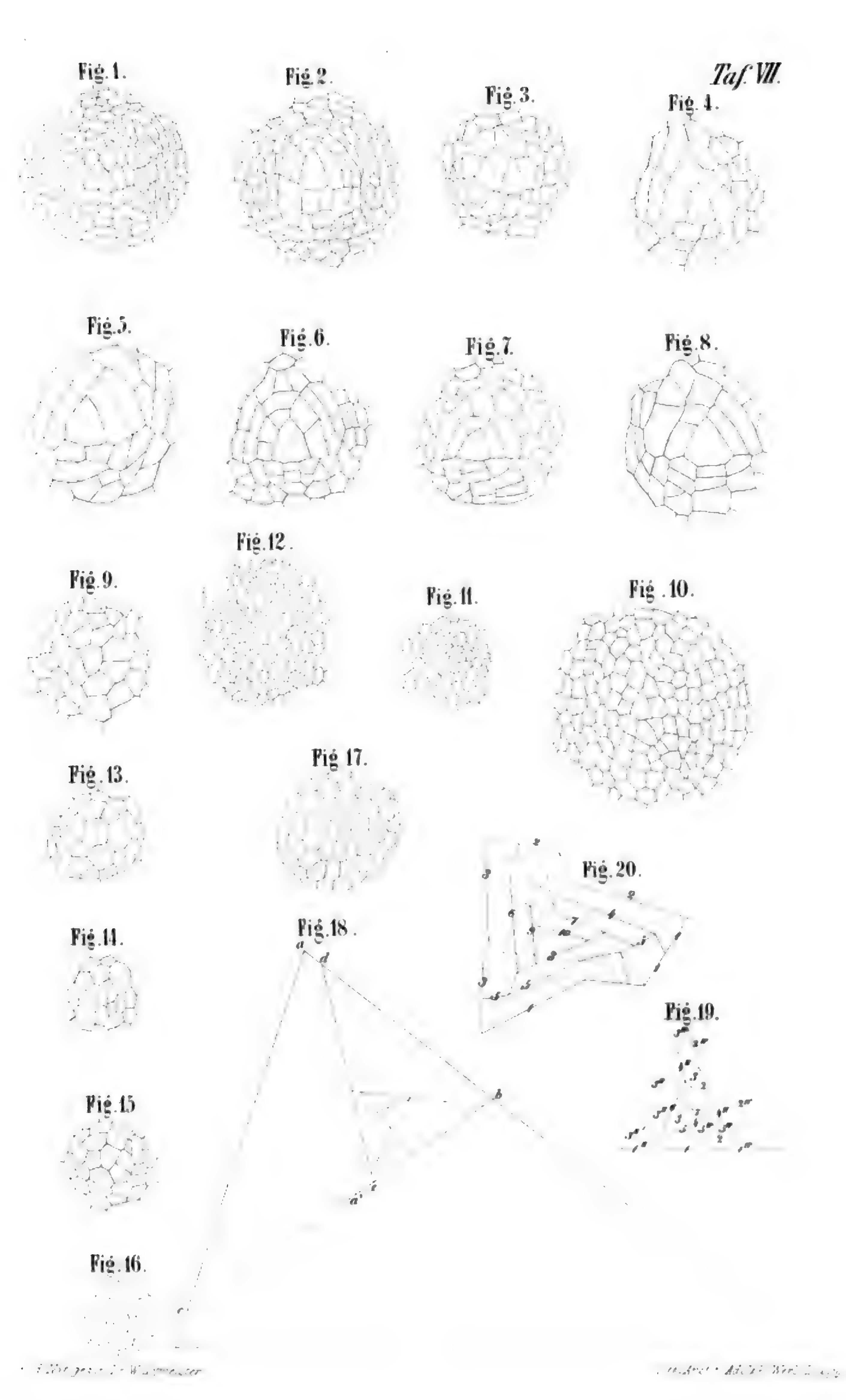
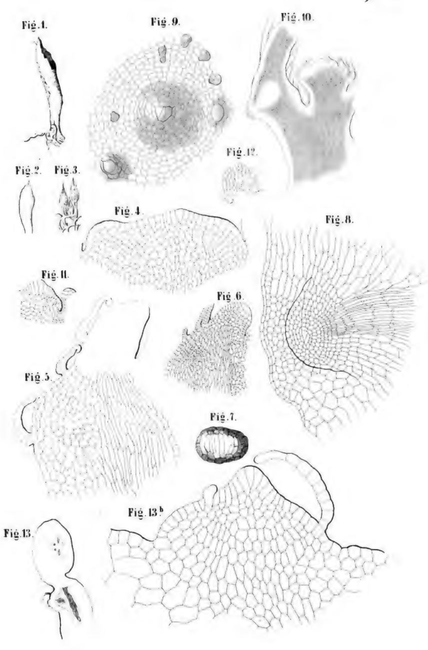


Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 6 b
Fig. 7.
Fig. 7 b
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21
Fig. 22.
Fig. 23.

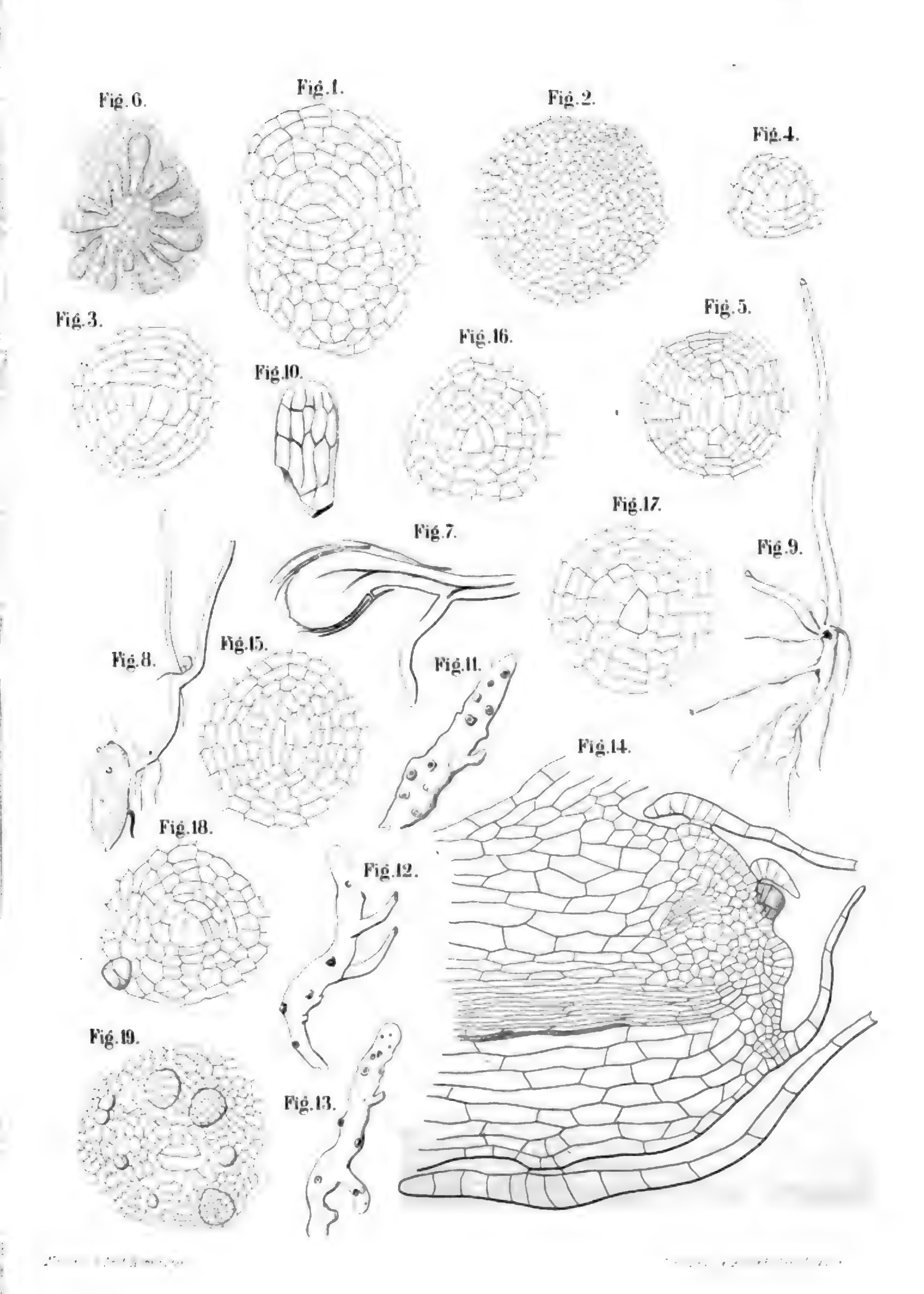

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 7.b
Taf. VI.
Fig. 6.
Fig. 4.
w
k
Fig. 7.
Fig. 5.
w
k
Fig. 9.
Fig. 11.
Fig. 10.
a
c
b
d
Fig. 8.

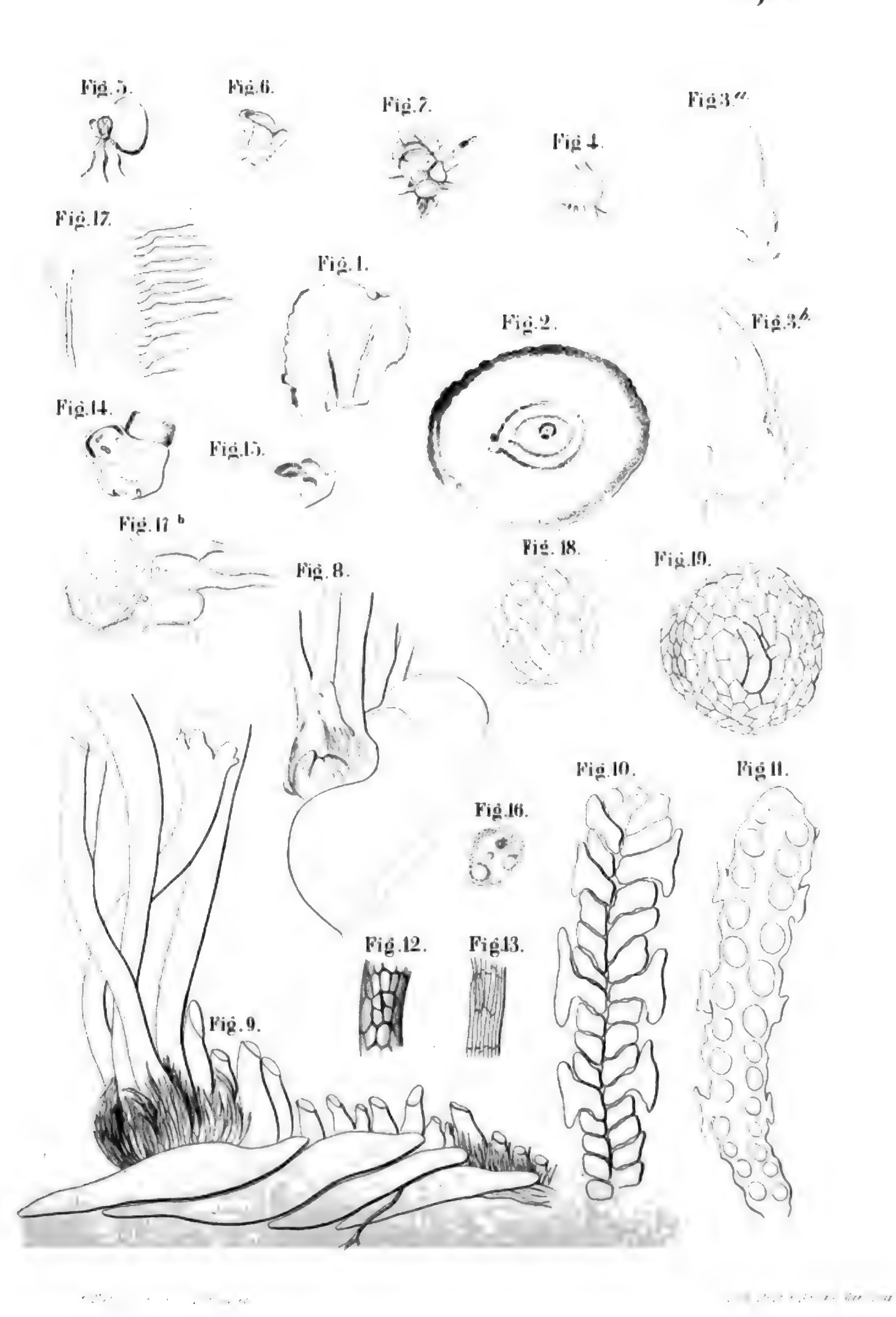

Taf. VII.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 12.
Fig. 11.
Fig. 10.
Fig. 13.
Fig. 17.
Fig. 20.
Fig. 14.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 15
Fig. 16.

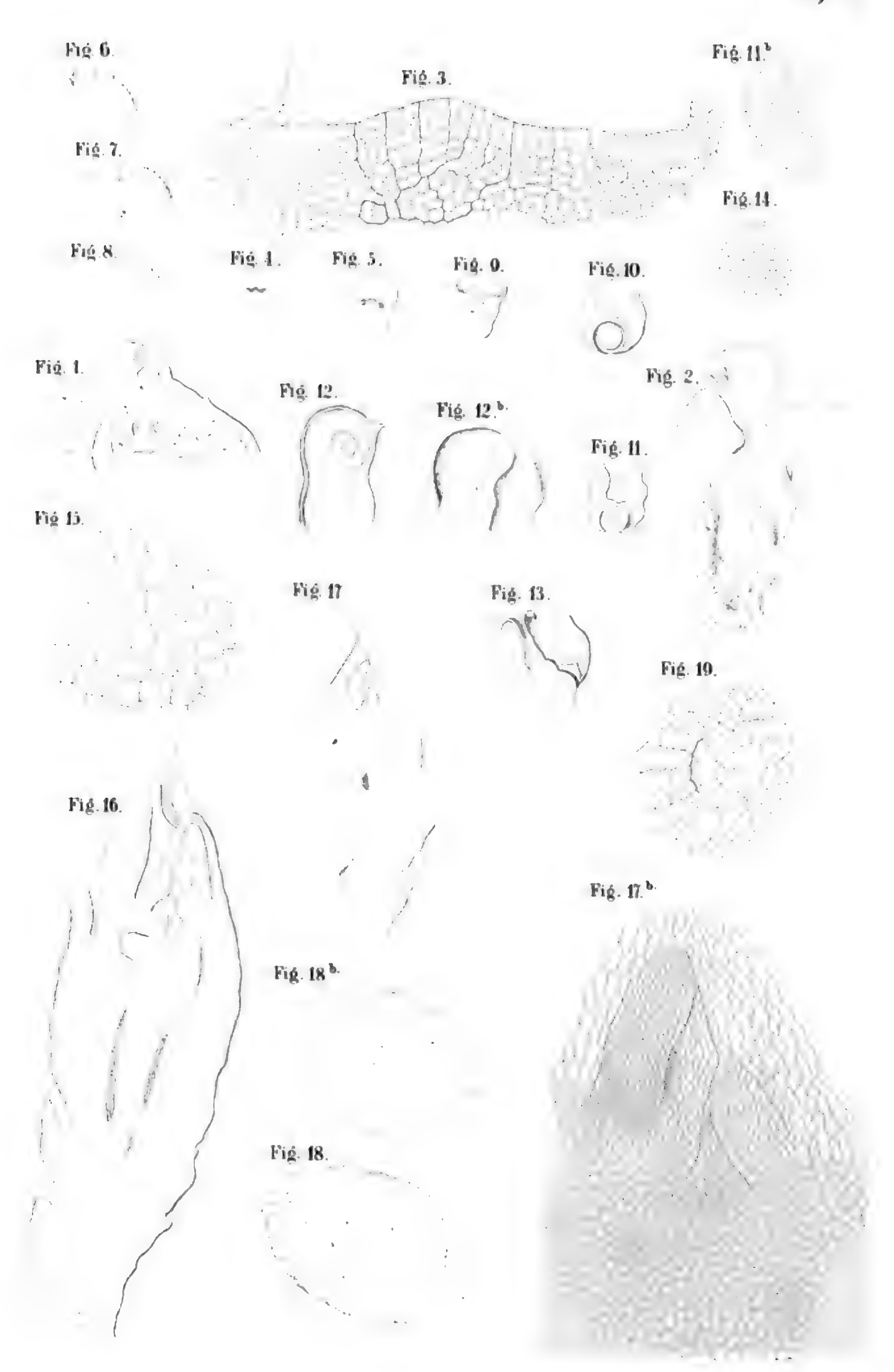
*Taf. VIII.*

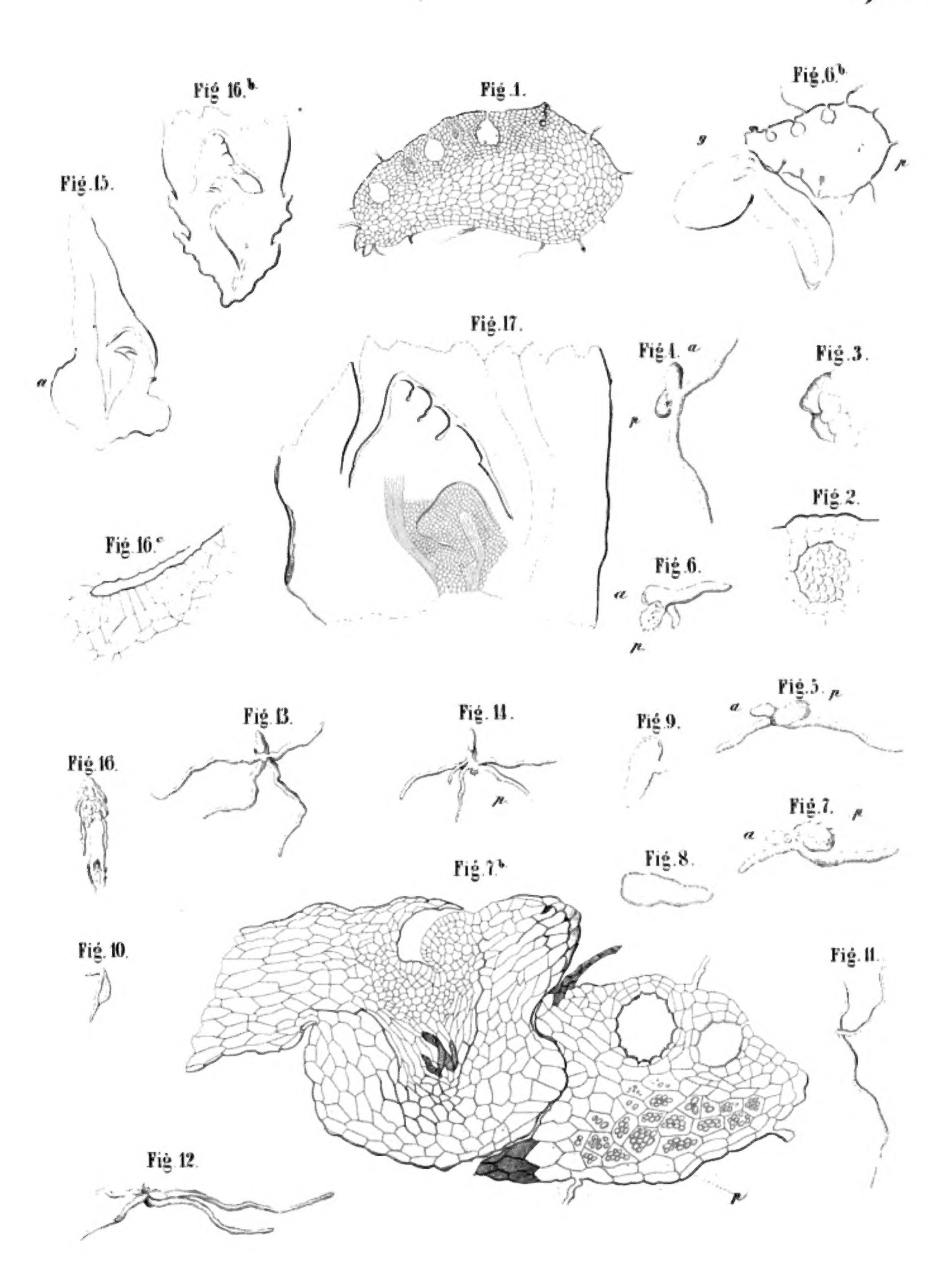

Fig. 1.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 12.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 8.
Fig. 11.
Fig. 6.
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 13.b
Fig. 13.

Taf. IX.

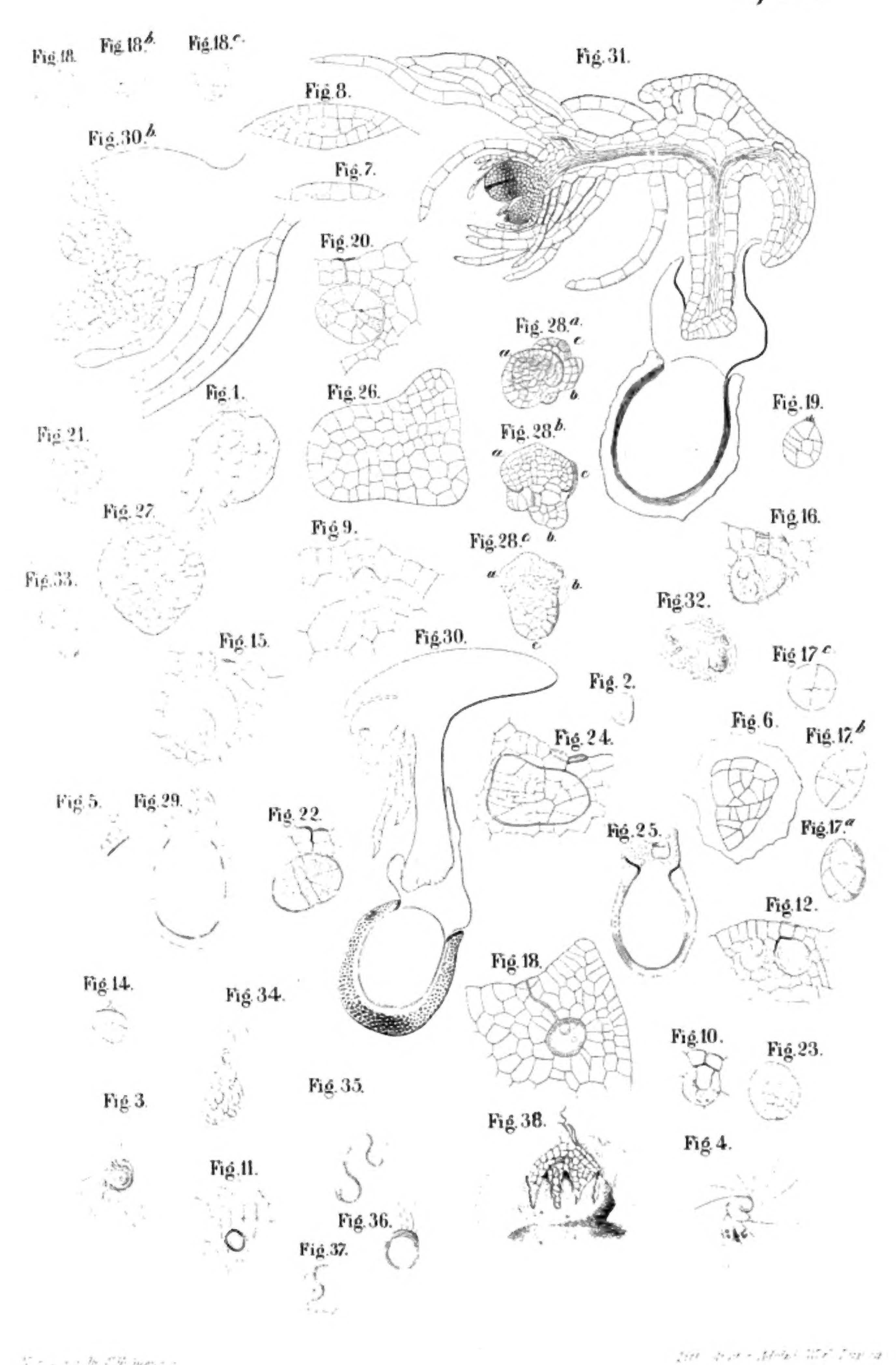

Fig. 6.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 3.
Fig. 16.
Fig. 5.
Fig. 10.
Fig. 17.
Fig. 7.
Fig. 9.
Fig. 8.
Fig. 15.
Fig. 11.
Fig. 14.
Fig. 18.
Fig. 12.
Fig. 19.
Fig. 13.


Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig 4.
Fig 3.a
Fig. 17.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.b
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 17 b
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 8.
Fig. 10.
Fig 11.
Fig. 16.
Fig. 12.
Fig 13.
Fig. 9.


Fig. 6.
Fig. 3.
Fig. 11.b
Fig. 7.
Fig. 14.
Fig. 8.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 1.
Fig. 12.
Fig. 12.b
Fig. 2.
Fig. 11.
Fig. 15.
Fig. 17
Fig. 13.
Fig. 19.
Fig. 16.
Fig. 17.b
Fig. 18.b
Fig. 18.


Fig. 16.b
Fig. 1.
Fig. 6.b
g
p
Fig. 15.
a
Fig. 17.
Fig. 4. a
p
Fig. 3.
Fig. 2.
Fig. 16.c
Fig. 6.
a
p
Fig. 5. p
a
Fig. 13.
Fig. 14.
p
Fig. 9.
Fig. 16.
Fig. 7. p
a
Fig. 7.b
Fig. 8.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
p

Taf. XIII.


Fig. 18.
Fig. 18.b
Fig. 18.c
Fig. 31.
Fig. 8.
Fig. 30.b
Fig. 7.
Fig. 20.
Fig. 28.a
Fig. 1.
Fig. 26.
Fig. 19.
Fig. 21.
Fig. 28.b
Fig. 27.
Fig. 9.
Fig. 28.c
Fig. 16.
Fig. 33.
Fig. 32.
Fig. 15.
Fig. 30.
Fig. 17.c
Fig. 2.
Fig. 6.
Fig. 24.
Fig. 17.b
Fig. 5.
Fig. 29.
Fig. 22.
Fig. 25.
Fig. 17.a
Fig. 12.
Fig. 14.
Fig. 34.
Fig. 18.
Fig. 10.
Fig. 23.
Fig. 3.
Fig. 35.
Fig. 38.
Fig. 4.
Fig. 11.
Fig. 36.
Fig. 37.

